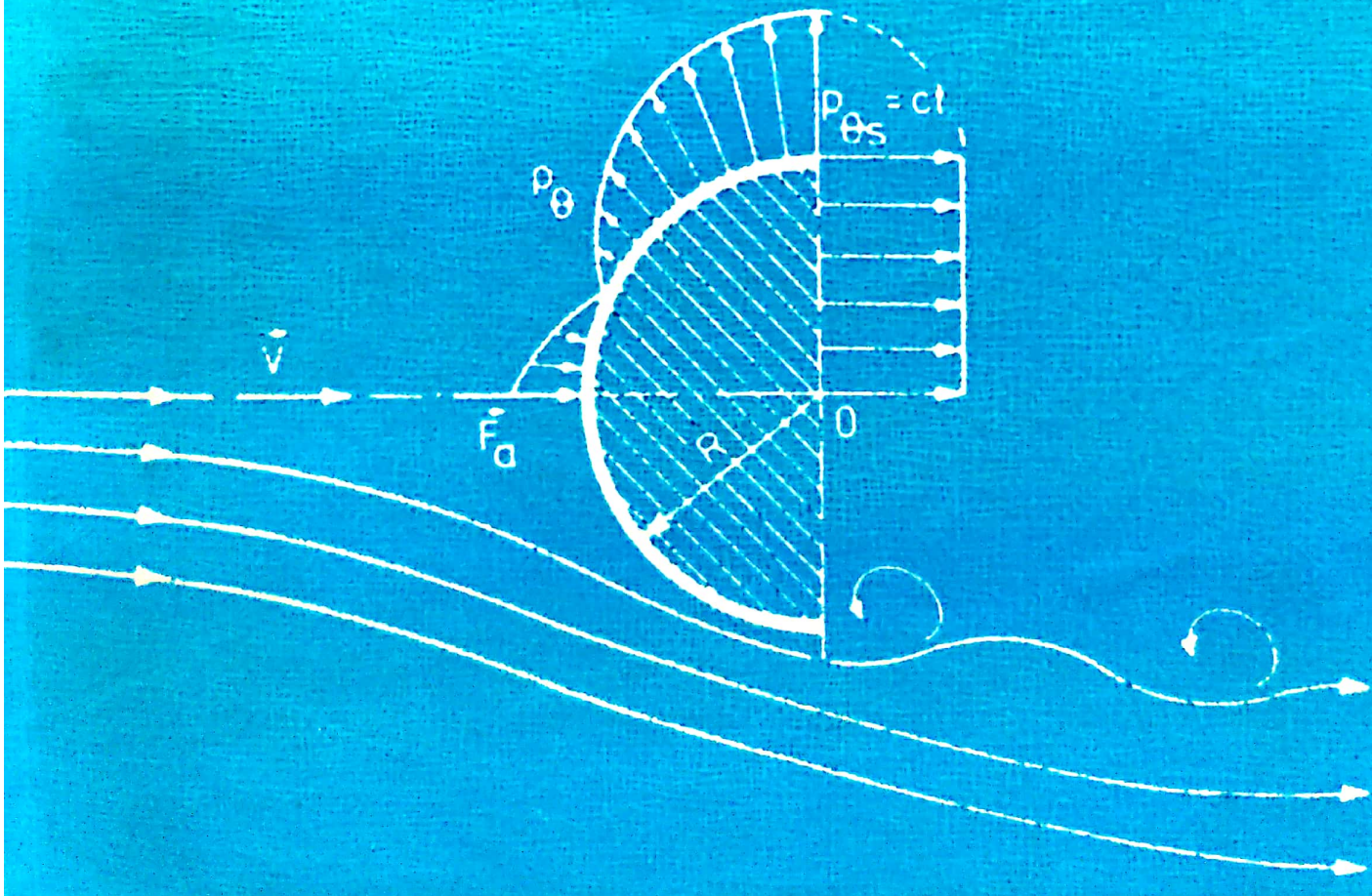
Petre Roman
Eugen Const. Isbăşoiu
Corneliu Bâlan

PROBLEME SPECIALE de HIDROMECANICĂ



Scanned with OKEN Scanner

Dr. ing. PETRE ROMAN
Dr. ing. EUGEN CONSTANTIN ISBĂŞOIU
Ing. CORNELIU BĂLAN

PROBLEME SPECIALE DE HIDROMECANICĂ

Coordonator : dr. ing. PETRE ROMAN

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREŞTI – 1987

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea acoperă principalele domenii ale hidraulicii, care prezintă un interes direct pentru inginerii mecanici specializați în proiectarea, construcția și exploatarea mașinilor și instalațiilor hidropneumatice. Lucrarea își propune să contribuie la actualizarea cunoștințelor, cu caracter teoretic și aplicativ, de bază din domeniul mașinilor și instalațiilor hidropneumatice. Astfel, cititorul poate să revadă cu ușurință, fără a mai rememora noțiunile teoretice fundamentale, probleme specifice privind proprietățile fizice ale fluidelor, calculul recipientelor sub presiune, mișcările efluente din rezervoare prin orificii și ajutaje, mișcările laminare din lagărele hidrodinamice, calculul forțelor de acțiune și de rezistență care apar la mișcarea fluidelor prin instalații, calculul hidraulic al conductelor și rețelelor de conducte, calculul hidraulic și determinarea regimurilor de funcționare în cazul mașinilor hidraulice și instalațiilor care utilizează mașini hidraulice etc. Problemele sînt prevăzute cu aplicații numerice și sînt rezolvate integral.

Datorită extinderii foarte mari a utilizării pompelor și altor echipamente și instalații hidropneumatice în toate ramurile industriei și în agricultură, lucrarea se adresează unui cerc larg de cititori care pot obține informații de bază, prezentate într-o formă accesibilă și totodată riguroasă din punct de vedere științific.

Lucrarea este rodul experienței tehnice și didactice a autorilor, obținută atît pe calea fundamentării științifice a problemelor de hidromecanică, cît și prin confruntarea directă cu problemele ridicate de utilizarea echipamentelor hidromecanice în industrie și agricultură.

Redactor : Ing. **Victoria Popescu**

Tehnoredactor : **Maria Trăsnea**
Coperta : Arh. **Silvia Mârțu**
Desene : **Ionel Țăranu**

Bun de tipar : 15.09.1987. Coli de tipar : 20
C.Z. 626/627

I. P. „Oltenia" Craiova
Str. M. Viteazul, nr. 4
Republica Socialistă România

CUPRINSUL

CAP. 1. Proprietăţile fizice ale fluidelor tehnice 5

CAP. 2. Calculul forţelor hidrostatice de presiune în rezervoare 29

CAP. 3. Repausul relativ al fluidelor conţinute în receptente 50

CAP. 4. Curgeri efluente din rezervoare prin orificii şi ajutaje 70

CAP. 5. Curgerea fluidelor în instalaţii hidraulice 96

CAP. 6. Calculul forţelor hidrodinamice în aparate şi maşini hidropneumatice . . . 118

CAP. 7. Mişcări laminare în instalaţii industriale 152

CAP. 8. Similitudinea hidrodinamică 192

CAP. 9. Curgerea fluidelor în conducte şi reţele de conducte 209

CAP. 10. Funcţionarea maşinilor hidraulice 259

Anexe 306

Bibliografie. 318

1

PROPRIETĂȚILE FIZICE ALE FLUIDELOR TEHNICE

Problema 1.1. Pentru determinarea densității unui lichid, se folosește un areometru (densimetru), de volum $\mathcal{V} = 95$ cm³ și masă $m = 0{,}1$ kg, având la partea superioară o tijă gradată de diametru $d = 10$ mm, iar la partea inferioară o sferă plină, de rază r (fig. 1.1, *a*).

1) Să se găsească relația dintre indicația h a areometrului și densitatea ρ a fluidului, stabilindu-se domeniul de măsură în cazul în care gradația maximă este $h_{max} = 100$ mm.

2) Să se determine densitatea fluidului dacă aparatul atinge fundul vasului, iar indicația sa este $h' = 15$ mm (fig. 1.1, *b*).

Se cunosc: $a = 20$ mm, care este poziția centrului de greutate al areometrului; $b = 20{,}5$, poziția centrului de greutate al volumului; $c = 42$ mm, distanța până la originea scării tijei gradate.

3) Cu un areometru similar, se determină densitățile pentru petrol $\rho_1 = 790$ kg/m³ și păcură $\rho_2 = 890$ kg/m³. Dacă se formează un amestec omogen alcătuit din α_1 părți petrol și α_2 părți păcură, să se determine densitatea amestecului dacă: a) părțile sînt din volumul amestecului; b) părțile sînt din masa amestecului.

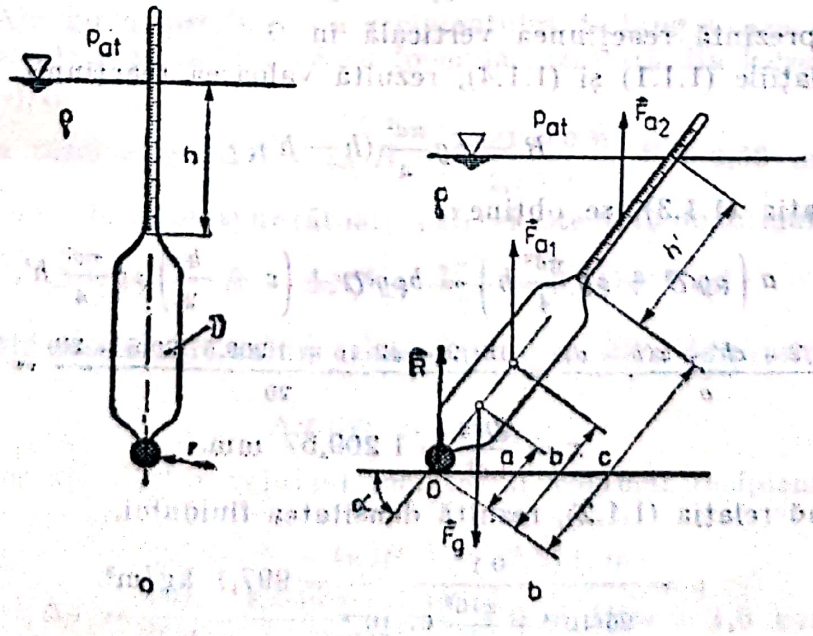


Fig. 1.1.

Rezolvare : 1) Pentru determinarea relației $\rho = \rho(h)$, se scrie echilibru hidrostatic al forțelor care acționează asupra areometrului cînd este în poziție verticală :

$$\vec{F}_g = \vec{F}_a, \tag{1.1.1}$$

unde $F_g = mg$ este forța de greutate ; $F_a = \rho g \mathcal{V}_t$ este forța arhimedică, cu $\mathcal{V}_t = \mathcal{V} + \frac{\pi d^2}{4} h$.

Rezultă

$$\rho = \frac{m}{\mathcal{V} + \frac{\pi d^2}{4} h}. \tag{1.1.2}$$

Densitatea maximă, care poate fi măsurată, se obține pentru $h = 0$,

$$\rho_{max} = \frac{0{,}1}{95 \cdot 10^{-6}} = 1\,052{,}6 \text{ kg/m}^3,$$

iar densitatea minimă, pentru $h = h_{max} = 100$ mm,

$$\rho_{min} = \frac{0{,}1}{95 \cdot 10^{-6} \frac{10^2}{4} 100 \cdot 10^{-9}} = 972{,}2 \text{ kg/m}^3.$$

Rezultă domeniul de măsură al acestui areometru $\rho \in (975{,}1050)$ kg/m³.

2) În cazul în care areometrul atinge fundul vasului, acesta se va înclina cu unghiul α, indicația fiind h'.

Se scrie ecuația de momente față de punctul de contact O,

$$aF_g = bF_{a1} + \left(c + \frac{h'}{2}\right) F_{a2}, \tag{1.1.3}$$

unde $F_{a1} = \rho g \mathcal{V}$, $F_{a2} = \rho g \frac{\pi d^2}{4} h'$.

Echilibrul forțelor este, în acest caz,

$$\vec{R} + \vec{F}_{a1} + \vec{F}_{a2} = \vec{F}_g, \tag{1.1.4}$$

unde $\vec{R}$ reprezintă reacțiunea verticală în O.

Din relațiile (1.1.1) și (1.1.4), rezultă valoarea reacțiunii,

$$R = \rho g \frac{\pi d^2}{4} (h - h'), \tag{1.1.5}$$

iar din relația (1.1.3), se obține :

$$a\left(\rho g \mathcal{V} + \rho g \frac{\pi d^2}{4} h\right) = b \rho g \mathcal{V} + \left(c + \frac{h'}{2}\right) \rho g \frac{\pi d^2}{4} h',$$

$$h = \frac{h'^2/2 + ch' + x(b-a)}{a} = \frac{15^2/2 + 42 \cdot 15 + 1\,209{,}57(20{,}5 - 20)}{20} = 67 \text{ mm},$$

unde

$$x = \frac{\mathcal{V} \cdot 4}{\pi d^2} = 1\,209{,}57 \text{ mm}.$$

Aplicînd relația (1.1.2), rezultă densitatea fluidului,

$$\rho = \frac{0{,}1}{95 \cdot 10^{-6} + \frac{\pi 10^2}{4} 67 \cdot 10^{-9}} = 997{,}1 \text{ kg/m}^3.$$

Scanned with OKEN Scanner

3) Densitatea amestecului format se calculează cu următoarele relații ($\alpha_1 = 0{,}33$, $\alpha_2 = 0{,}67$):

a) $m = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2$, $\rho_a \mathcal{V} = \alpha_1 \rho_1 \mathcal{V} + \alpha_2 \rho_2 \mathcal{V}$,

$$\rho_a = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 = 0{,}33 \cdot 790 + 0{,}67 \cdot 890 = 857 \text{ kg/m}^3.$$

b) $\mathcal{V} = \alpha_1 \mathcal{V}_1 + \alpha_2 \mathcal{V}_2$, $m/\rho_a = \alpha_1 m/\rho_1 + \alpha_2 m/\rho_2$,

$$\rho_a = \frac{\rho_1 \rho_2}{\alpha_1 \rho_2 + \alpha_2 \rho_1} = \frac{790 \cdot 890}{0{,}33 \cdot 890 + 0{,}67 \cdot 790} = 854{,}3 \text{ kg/m}^3.$$

Problema 1.2. Un recipient sferic din oțel, cu diametrul $D = 2$ m, conține fluid la presiunea absolută $p_i = 200$ bar, ce produce un efort în material $\sigma = 200$ N/mm² (fig. 1.2). Recipientul se află într-o incintă cubică, cu latura $a = 4$ m, umplută cu un produs petrolier la presiunea absolută $p_M = 2$ bar. Ce presiune absolută va indica manometrul M, dacă presiunea din recipient devine presiunea atmosferică? Admițînd procesul izoterm, care va fi variația de densitate a produsului petrolier în acest caz; care este variația de presiune maximă indicată de manometrul M, ce poate apărea astfel încît să nu se producă fenomenul de cavitație? Se cunosc: densitatea produsului petrolier $\rho_p = 850$ kg/m³, modulul de elasticitate $\varepsilon_p = 1{,}15 \cdot 10^9$ Pa, presiunea de vaporizare $p_v = 28{,}6$ kPa la temperatura $\theta = 20°$C, modulul de elasticitate al oțelului $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Pa și coeficientul lui Poisson $\nu = 0{,}3$.

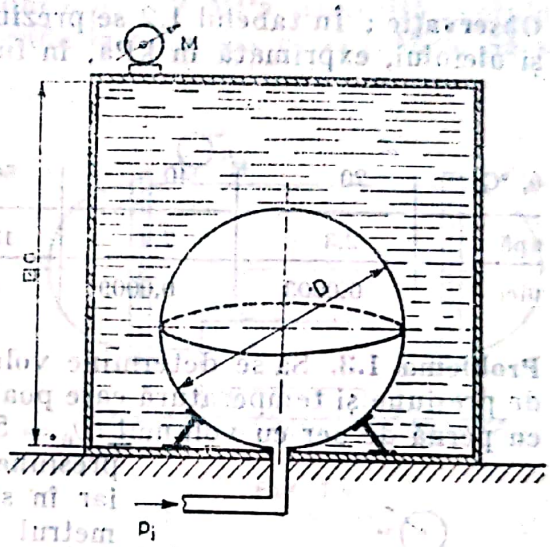


Fig. 1.2.

Rezolvare: Alungirea specifică ε_S a recipientului în lungul razei este aceeași pe toate direcțiile și se calculează cu formula rezultată din legea lui Hook: $\varepsilon_S = \sigma(1 - \nu)/E$.

Creșterea razei este: $\Delta R = \varepsilon_S \cdot R = \frac{200(1 - 0{,}3)}{2{,}1 \cdot 10^5} \cdot 1 = 0{,}66$ mm.

Variația de volum corespunzătoare a sferei este dată de formula:

$$\Delta \mathcal{V} = \frac{4\pi}{3}(R + \Delta R)^3 - \frac{4\pi R^3}{3} = 8{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

La această creștere de volum corespunde o creștere de presiune dată de relația:

$$\Delta \mathcal{V}/\mathcal{V}_0 = -\beta \Delta p,$$

$\mathcal{V}_0$ fiind diferența dintre volumul incintei și volumul recipientului sferic nedeformat:

$$\mathcal{V}_0 = a^3 - 4\pi R^3/3 = 59{,}811 \text{ m}^3.$$

Rezultă: $|\Delta p| = \frac{\Delta \mathcal{V}}{\mathcal{V}_0 \beta} = \frac{8{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}15 \cdot 10^9}{59{,}811} = 0{,}16$ MPa $= 1{,}6$ bar.

Scanned with OKEN Scanner

Deci manometrul M indică, în cazul în care în recipient se află presiunea atmosferică :

$$p = p_M - \Delta p = 0{,}4 \text{ bar} = 40 \text{ kPa}.$$

Ţinînd seama de valoarea presiunii de vaporizare $p_v = 28{,}6$ kPa, rezultă că variaţia maximă de presiune admisibilă este :

$$p_{max} = p_M - p_v = 1{,}714 \text{ bar}.$$

Variaţia de densitate a produsului petrolier este dată de relaţia :

$$\Delta\rho_p = -\frac{\Delta p}{\varepsilon_p}\rho ;$$

$$\Delta\rho_p = -\frac{1{,}6\cdot 10^5}{1{,}15\cdot 10^9}\cdot 850 \cong -0{,}12 \text{ kg/m}^3.$$

Observaţie : În tabelul 1.2 se prezintă variaţia presiunii de vaporizare a apei şi uleiului, exprimată în kPa, în funcţie de temperatură.

Tabelul 1.2

θ, °C	20	40	50	100	150	175
apă	2,3	7,2	12,5	100	—	—
ulei	0,0003	0,0009	0,007	0,3	6,5	21,7

Problema 1.3. Să se determine volumul maxim de lichid în condiţii normale de presiune şi temperatură care poate fi introdus într-un acumulator (fig. 1.3) cu pernă de aer cu volumul $\mathcal{V}_0 = 50$ l, ştiind că iniţial el este plin cu aer la presiunea $p_0 = 0{,}3$ MPa şi temperatura $\theta_0 = 15°C$, iar în starea finală presiunea măsurată la manometrul M să nu depăşească valoarea $p = 5$ MPa la temperatura $\theta = 200°C$. Lichidul pompat în acumulator are coeficientul de dilatare volumică $\alpha = 6{,}5\cdot 10^{-4}$ K^{-1} şi coeficientul de compresibilitate izotermă $\beta = 7{,}85\cdot 10^{-10}$ Pa^{-1}.

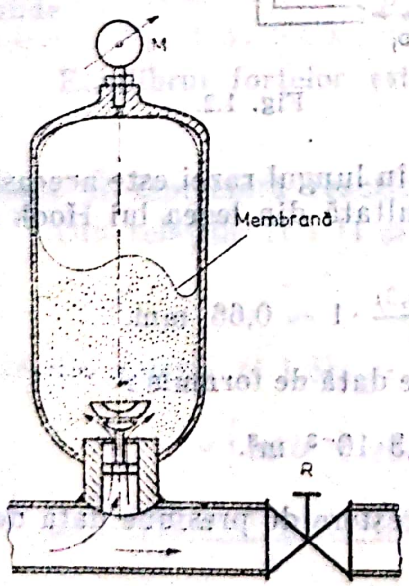


Fig. 1.3.

Rezolvare : Volumul de aer $\mathcal{V}_0 = 50$ l aflat iniţial în rezervor este comprimat, parametrii iniţiali fiind $p_0 = 0{,}3$ MPa şi $T_0 = 273{,}15 + \theta_0 = 288{,}15$ K, obţinînd volumul $\mathcal{V}$ la parametrii $p = 5$ MPa şi $T = 273{,}15 + \theta = 473{,}15$ K. Pentru determinarea volumului $\mathcal{V}$, se foloseşte legea gazelor perfecte :

$$p_0\mathcal{V}_0/T_0 = p\mathcal{V}/T, \qquad (1.3.1)$$

rezultînd volumul $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0\frac{T}{T_0}\cdot\frac{p_0}{p} = 50\cdot 10^{-3}\,\frac{473{,}15}{288{,}15}\cdot\frac{0{,}3\cdot 10^6}{5\cdot 10^6} = 4{,}93\cdot 10^{-3}$ m^3.

Volumul final de lichid din rezervor este :

$$\mathcal{V}_l = \mathcal{V}_0 - \mathcal{V} = 50 - 4{,}93 = 45{,}07 \text{ l}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Lichidul care se găseşte la parametrii din acumulator, $p = 5{,}0$ MPa şi $\theta = 200°C$, are, în rezervorul de aspiraţie al pompei ce alimentează acumulatorul, parametrii $p_{at} = 0{,}1$ MPa şi $\theta_0 = 15°C$.

Pentru a se determina volumul de lichid corespunzător parametrilor din rezervorul de aspiraţie se scrie ecuaţia de stare pentru lichide:

$$\mathcal{V}_l = \mathcal{V}_{0l}[1 + \alpha(T - T_0) - \beta(p - p_{at})], \qquad (1.3.2)$$

unde $\mathcal{V}_{0l}$ reprezintă volumul maxim care poate fi introdus în acumulator.

Rezultă $$\mathcal{V}_{0l} = \frac{\mathcal{V}_l}{[1 + \alpha(T - T_0) - \beta(p - p_{at})]},$$

$$\mathcal{V}_{0l} = \frac{45{,}07 \cdot 10^{-3}}{[1 + 6{,}5 \cdot 10^{-4}(200 - 15) - 7{,}85 \cdot 10^{-10}(5 - 0{,}1) \cdot 10^6]} = 40{,}37 \text{ l}.$$

Problema 1.4. Un rezervor cu volumul $\mathcal{V}_0 = 20$ m³ (fig. 1.4) este supus unei probe de presiune cu apă la presiunea $p_0 = 2$ MPa. Datorită faptului că rezervorul nu este etanş, presiunea scade la valoarea $p_1 = 1$ MPa. Să se determine volumul de apă scurs din rezervor în timpul probei. După efectuarea remedierii, rezervorul este umplut cu apă, închis ermetic şi încălzit cu $\Delta\theta = 40°C$. În acest caz, să se determine presiunea din rezervor. Se cunosc: coeficientul de dilatare izobar $\alpha = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ K^{-1} şi coeficientul de compresibilitate izotermă $\beta = 4{,}75 \cdot 10^{-10}$ Pa^{-1} (În ambele cazuri se neglijează deformarea elastică a rezervorului). Care este desfăşurarea fenomenului în realitate?

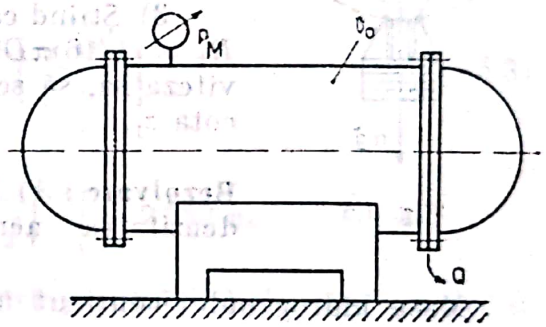


Fig. 1.4.

Rezolvare: Pentru determinarea volumului de lichid ce s-a scurs din rezervor în timpul probei, se scrie ecuaţia de stare a lichidului (1.3.2) în ipoteza temperaturii constante:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0(1 + \alpha\Delta T - \beta\Delta p)$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0[1 - \beta(p_1 - p_0)].$$

Rezultă, $\Delta\mathcal{V} = \mathcal{V}_0\beta\Delta p = 20 \cdot 4{,}75 \cdot 10^{-10} \cdot 1 \cdot 10^6 = 0{,}0095$ m³.

După umplerea rezervorului, prin încălzirea lui, apare tendinţa de mărire a volumului lichidului. Deoarece rezervorul este presupus rigid, creşterea de volum împiedicată se transformă în presiune. Ecuaţia de stare (1.3.2) se scrie

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0[1 + \alpha(T_1 - T_0) - \beta(p_1 - p_0)],$$

deoarece volumul rezervorului este $\mathcal{V}_0 = \text{const.}$ în timpul probei.

Rezultă $\alpha\Delta T = \beta\Delta p$,

deci $$\Delta p = \frac{\alpha}{\beta}\Delta T = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-4}}{4{,}75 \cdot 10^{-10}} \cdot 40 = 15{,}16 \text{ MPa}.$$

Dacă presiunea iniţială în rezervor este presiunea atmosferică, rezultă, în final, o presiune relativă în rezervor de 15,16 MPa.

Scanned with OKEN Scanner

În realitate, rezervorul este deformabil. Prin încălzire, pereții solizi se dilată corespunzător valorii coeficientului de dilatare termică a metalului, creșterea de volum duce la o diminuare a diferenței de presiune. Deci $\Delta p = 15{,}16$ MPa este valoarea maximă posibilă, valoare la care se dimensionează rezervorul.

Problema 1.5. Un balon sferic, cu volumul maxim $\mathcal{V}_1 = 1\,000$ m³, este umflat parțial cu volumul $\mathcal{V}_0 = 800$ m³ de hidrogen de densitate $\rho_{H0} = 0{,}084$ kg/m³ (fig. 1.5). Masa totală a balonului și a nacelei este $M = 700$ kg. Densitatea aerului la sol este $\rho_0 = 1{,}2$ kg/m³. Atmosfera și hidrogenul sînt presupuse în evoluție adiabatică pe înălțime cu $k = 1{,}4$, iar presiunea atmosferică la sol este $p_{at} = 0{,}1$ MPa.

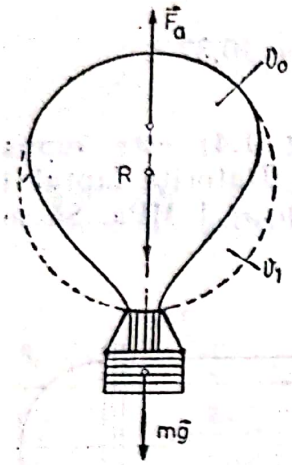


Fig. 1.5.

Să se arate că forța ascensională este constantă cît timp balonul nu este umflat complet. Să se calculeze această forță.

2) La ce înălțime de sol balonul este complet umflat ?

La ce înălțime stă în echilibru ?

3) Știind că rezistența la înaintare a balonului este $R_x = (1/16)\pi D^2 \rho V^{2*}$, D fiind diametrul balonului și V viteza sa, să se calculeze viteza balonului la sol și la cota z_1.

Rezolvare : 1) Dacă $\mathcal{V}$ reprezintă volumul balonului și ρ densitatea aerului, atunci portanța balonului este

$$F_a = \rho g \mathcal{V}.$$

Masa hidrogenului conținut în interiorul balonului este

$$M_H = \rho_H \mathcal{V} = \rho_{H0} \mathcal{V}_0,$$

unde s-a notat cu ρ_{H0} densitatea hidrogenului la sol, iar cu ρ_H densitatea la o înălțime oarecare, la care volumul balonului este $\mathcal{V}$.

Atîta timp cît $\mathcal{V} < \mathcal{V}_1$, balonul nu este umflat complet, presiunea din interior p_H va fi egală cu presiunea p din exterior. Pentru a se determina portanța balonului, se exprimă ρ și $\mathcal{V}$ în funcție de parametrii de la sol, considerînd că, atît aerul, cît și hidrogenul din interior, au evoluții adiabatice.

$$\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k} = C, \text{ respectiv } \frac{p_H}{\rho_H^k} = \frac{p_{H0}}{\rho_{H0}^k}. \tag{1.5.1}$$

Deci $$\rho \mathcal{V} = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/k} \mathcal{V} = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/k} \frac{\rho_{H0}}{\rho_H} \mathcal{V}_0,$$

adică $$\rho \mathcal{V} = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/k} \left(\frac{p_{H0}}{p_H}\right)^{1/k} \mathcal{V}_0 = \rho_0 \mathcal{V}_0.$$

Rezultă că forța ascensională este constantă :

$$F_a = \rho_0 g \mathcal{V}_0 = 1{,}2 \cdot 9{,}81 \cdot 800 = 9\,418 \text{ N}.$$

2) Balonul este umflat complet cînd presiunea din interior p_H, egală cu cea din exterior, corespunde unei densități $\rho_H = \rho_{H0} \mathcal{V}_0 / \mathcal{V}_1 = 0{,}0672$ kg/m³. Procedînd analog, densitatea aerului atmosferic la acea altitudine, deci aceeași presiune, este $\rho = \rho_0 \mathcal{V}_0 / \mathcal{V}_1 = 0{,}96$ kg/m³.

* $R_x = C_x \rho A V^2/2$, $A = \pi D^2/4$, $C_x = 1/2$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea variației densității ρ a aerului atmosferic cu altitudinea z, se scrie ecuația fundamentală a staticii fluidelor :

$$\frac{dp}{\rho} + d\Pi = 0 \qquad (1.5.2)$$

și se integrează, cunoscînd evoluția adiabatică a aerului exprimată în relația (1.5.1), iar potențialul forțelor masice este $\Pi = gz + \text{const.}$

Rezultă $$\int_{1,2} \frac{dp}{\rho} + \int_{1,2} d\Pi = 0,$$

sau $$\int_{1,2} \frac{dp}{\rho} = -gz,$$

în care caz z reprezintă altitudinea.

$$\int_{1.2} \frac{dp}{\rho} = Ck \int_{\rho_0}^{\rho} \rho^{k-2}\, d\rho = C \frac{k}{k-1} [\rho^{k-1} - \rho_0{}^{k-1}].$$

Deci $$z = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_0}{g\rho_0} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1}\right]. \qquad (1.5.3)$$

Pentru $\rho = 0{,}96$ kg/m³, rezultă

$$z_1 = \frac{1{,}4}{0{,}4} \cdot \frac{10^5}{9{,}81 \cdot 1{,}2} \left[1 - \left(\frac{0{,}96}{1{,}2}\right)^{0{,}4}\right] = 2\,539 \text{ m.}$$

La echilibru, forța ascensională egalează greutatea balonului nacelei și hidrogenului. Deci se poate scrie :

$$\rho g \mathcal{V}_1 - \rho_H g \mathcal{V}_1 - Mg = 0,$$

sau $$\rho \mathcal{V}_1 - \rho_{H0} \mathcal{V}_0 - M = 0.$$

Deci se obține $\rho = \dfrac{M + \rho_{H0}\mathcal{V}_0}{\mathcal{V}_1} = \dfrac{700 + 0{,}084 \cdot 800}{1\,000} = 0{,}767$ kg/m³.

Corespunzător acestei densități, din relația (1.10), rezultă

$$z = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{g\rho_0} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{k-1}\right] = 4\,874 \text{ m.}$$

3) Ecuația de mișcare a balonului este

$$\rho g \mathcal{V} - \rho_{H0} g \mathcal{V}_0 - Mg - \frac{\rho \pi D^2}{16} V^2 = \frac{dV}{dt} (M + \rho_{H0}\mathcal{V}_0),$$

unde $\mathcal{V} = \pi D^3/6$. Se face aproximația că $dV/dt = 0$ și rezultă

$$V = 4 \sqrt{\frac{\rho g \mathcal{V} - \rho_{H0} g \mathcal{V}_0 - Mg}{\rho \pi D^2}}.$$

Pentru $z = 0$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0$ și rezultă $V = 7{,}23$ m/s.

Pentru $z = z_1$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1$, $\rho = 0{,}96$ kg/m³ și rezultă $V = 8{,}08$ m/s.

Aceste rezultate justifică aproximația făcută.

Scanned with OKEN Scanner

Problema 1.6. Un tub cilindric închis la o extremitate, cu lungimea $l = 15$ cm, aria secțiunii $A = 2$ cm² și masa $M = 10$ g se introduce cu gura în jos într-un recipient cu apă la presiunea atmosferică $p_{at} = 0{,}1$ MPa (fig. 1.6). În ipotezele neglijării grosimii pereților tubului, a menținerii constante a temperaturii aerului din tub, a neglijării densității aerului în raport cu a apei și cunoscînd că tubul culisează fără frecare într-un ghidaj vertical, se cere să se determine:

1) înălțimea h_2 între nivelul apei din tub și nivelul apei în exterior;

2) înălțimea h_1 cu cît tubul se găsește afară din apă;

3) valoarea presiunii la suprafața recipientului pentru care tubul este complet imersat.

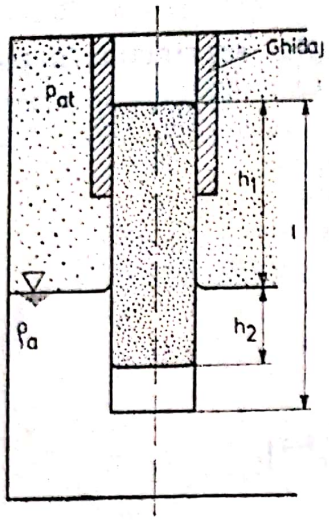


Fig. 1.6.

Rezolvare: 1) Deoarece tubul este în echilibru, rezultanta forțelor de presiune echilibrează greutatea tubului. Portanța este rezultatul forței de presiune pe capacul orizontal al tubului, iar forțele pe pereții verticali se anulează prin simetrie. Presiunea aerului în tub este:

$$p = p_{at} + \rho g h_2.$$

Deci se scrie echilibrul forțelor asupra tubului $\rho g h_2 A = Mg$,

și rezultă înălțimea $h_2 = \dfrac{M}{\rho A} = \dfrac{10 \cdot 10^{-3}}{10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 0{,}05$ m.

2) Pentru determinarea înălțimii h_1, se scrie ecuația de stare pentru evoluția izotermă a aerului în tub:

$$p_0 \mathcal{V}_0 = p \mathcal{V}, \tag{1.6.1}$$

cu $p_0 = p_{at}$, $\mathcal{V}_0 = lA$, $p = p_{at} + \rho g h_2$ și $\mathcal{V} = A(h_1 + h_2)$.

Rezultă $p_{at} Al = (p_{at} + \rho g h_2)(h_1 + h_2)A$,

deci $h_1 = \dfrac{p_{at} l}{p_{at} + g \dfrac{M}{A}} - \dfrac{M}{\rho A} = \dfrac{10^5 \cdot 0{,}15}{10^5 + 9{,}81 \dfrac{10 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}}} - \dfrac{10 \cdot 10^{-3}}{10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 0{,}09927$ m.

3) În cazul în care presiunea p_0 la suprafața liberă a rezervorului este mai mare decît presiunea atmosferică, tubul se scufundă în lichid, dar înălțimea h_2, determinată, rămîne constantă, deoarece asigură volumul de apă dislocat pentru plutirea tubului. În acest caz, ecuația de stare (1.6.1) se scrie:

$$p_{at} Al = (p_0 + \rho g h_2) h_2 A;$$

$$p_0 = \frac{p_{at} l}{h_2} - \rho g h_2 = \frac{p_{at} l}{M} \rho A - \frac{gM}{A};$$

$$p_0 \cong 0{,}3 \text{ MPa}.$$

Problema 1.7. Într-un rezervor cu volumul $\mathcal{V}_0 = 2$ m³ se află heliu la presiunea $p_0 = 0{,}5$ bar și temperatura $\theta_0 = 0$°C (fig. 1.7). Gazul este comprimat

Scanned with OKEN Scanner

izoentropic la un volum $\mathcal{V}_1 = 1$ m³. Să se determine masa gazului, modul de elasticitate și indicația manometrului M la sfîrșitul comprimării.

Se cunosc: constanta gazului $R = 2\,080$ J/kg·K și celeritatea în heliu $c = 970$ m/s.

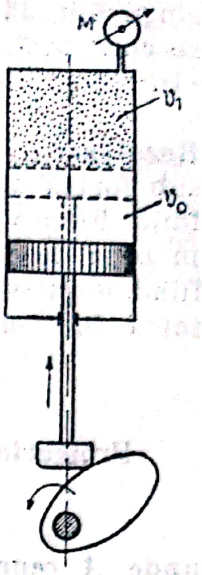


Fig. 1.7.

Rezolvare: Transformarea fiind izentropică (la entropie constantă), în ipoteza gazului ideal se scrie relația: $p_0/\rho_0^{\varkappa} = p_1/\rho_1^{\varkappa} = \text{ct}$, unde $\varkappa = C_p/C_v$ este exponentul izentropic.

Din expresia vitezei sunetului

$$c = \sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \qquad (1.7.1)$$

și a ecuației de stare a gazelor perfecte $p/\rho = RT$,

rezultă $$c = \sqrt{\varkappa p/\rho} = \sqrt{\varkappa RT},$$

deci $$\varkappa = \frac{c^2}{RT} = \frac{970^2}{2\,080 \cdot 273} \cong 1{,}66.$$

$$p_1 = p_0(\rho_1/\rho_0)^{\varkappa} = p_0(\mathcal{V}_0/\mathcal{V}_1)^{\varkappa} = 0{,}5(2/1)^{1{,}66} = 0{,}158 \text{ MPa}.$$

Modulul de elasticitate are expresia

$$\varepsilon_1 = \varkappa p_1 = 1{,}66 \cdot 1{,}58 \cdot 10^5 = 2{,}62 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Masa gazului se calculează cu relația

$$m = \rho_0 \mathcal{V}_0 = \frac{p_0}{RT_0}\mathcal{V}_0 = \frac{0{,}5 \cdot 10^5 \cdot 2}{2\,080 \cdot 273} = 0{,}176 \text{ kg}.$$

Problema 1.8. Într-o conductă din oțel cu diametrul interior $D = 100$ mm, grosime $\delta = 2$ mm, lungime $L = 100$ m, în care se găsește apă, un piston execută o mișcare de oscilație (fig. 1.8). În ipoteza peretelui conductei perfect rigid, să se determine, cunoscînd coeficientul de compresibilitate izotermă al apei, $\beta = 5{,}30 \cdot 10^{-10}$ Pa^{-1}, viteza de propagare a undelor elastice longitudinale din fluid (viteza sunetului) provocate de mișcarea pistonului și frecvența de oscilație a acestuia, astfel încît conducta să fie străbătută de o

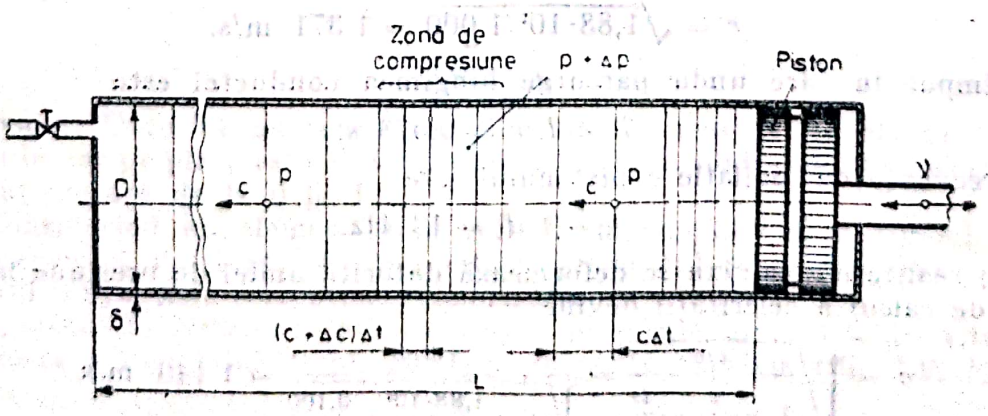


Fig. 1.8.

singură undă incidentă. Ce valoare va avea viteza sunetului, dacă conducta se consideră deformabilă, modulul de elasticitate al oțelului fiind $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Pa ?

Rezolvare : Datorită mișcării pistonului în conductă, apare o perturbație sub forma unei unde de presiune, care produce o zonă de compresiune în fluid. Fie c viteza de propagare a acestei unde. Cînd elementul de fluid intră în zona de compresiune, el este comprimat și decelerat, variația vitezei Δc, fiind negativă. Aplicînd legea a doua a dinamicii elementului de fluid care intră în zona de compresiune rezultă

$$\vec{F} = -m\ \Delta\vec{c}/\Delta t.$$

Proiectînd relația vectorială pe axa conductei se obține

$$(p + \Delta p)A - pA = \rho c \Delta t A(-\Delta c/\Delta t),$$

unde A reprezintă aria secțiunii transversale a conductei și ρ densitatea fluidului înainte de zona de compresiune. Se obține

$$\rho c^2 = \frac{-\Delta p}{\Delta c/c}.$$

Avînd în vedere că în ipoteza făcută secțiunea conductei se păstrează constantă, $\Delta c/c = \Delta\mathcal{V}/\mathcal{V}$, unde cu $\Delta\mathcal{V}$ s-a notat variația de volum în zona comprimată. Din expresia modulului de elasticitate $\varepsilon = -(\mathcal{V}/\Delta\mathcal{V})\Delta p$ semnul minus din expresia modulului de elasticitate ne indică variația opusă a presiunii cu volumul), formula de calcul a vitezei sunetului (formula lui Newton) este

$$c = \sqrt{\varepsilon/\rho}. \qquad (1.8.1)$$

O altă relație pentru viteza sunetului se poate obține aplicînd legea a doua a dinamicii unui volum fix de fluid

$$\Delta\rho\mathcal{V}\Delta c/\Delta t = \Delta p\mathcal{V}/\Delta l,$$

cu $c = \Delta l/\Delta t$ rezultă $c \rightarrow \Delta c = \Delta p/\Delta\rho$. Dar $\Delta c = c$ deoarece în afara domeniului perturbat viteza undei este nulă. Deci se obține

$$c = \sqrt{dp/d\rho}, \qquad (1.8.2)$$

cu $\varepsilon = 1/\beta = 1{,}88 \cdot 10^9$ N/m² și $\rho = 1\,000$ kg/m², rezultă

$$c = \sqrt{1{,}88 \cdot 10^9/1\,000} = 1\,371 \text{ m/s}.$$

Timpul în care unda parcurge lungimea conductei este

$$T = L/c = 0{,}073 \text{ s},$$

deci frecvența de oscilație a pistonului este

$$\nu = 1/T = 13 \text{ Hz}.$$

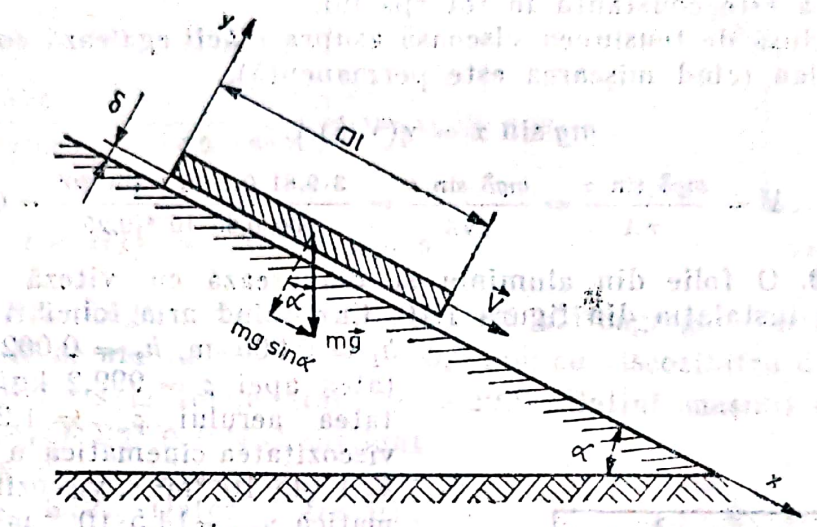
În realitate conducta se deformează datorită undei de presiune iar formula de calcul a celerității devine

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon/\rho}{1 + \frac{\varepsilon}{E} \cdot \frac{D}{\delta}}} = \frac{1\,371}{\sqrt{1 + \frac{1{,}88 \cdot 10^9}{2{,}1 \cdot 10^{11}} \cdot \frac{0{,}100}{0{,}002}}} = 1\,140 \text{ m/s}.$$

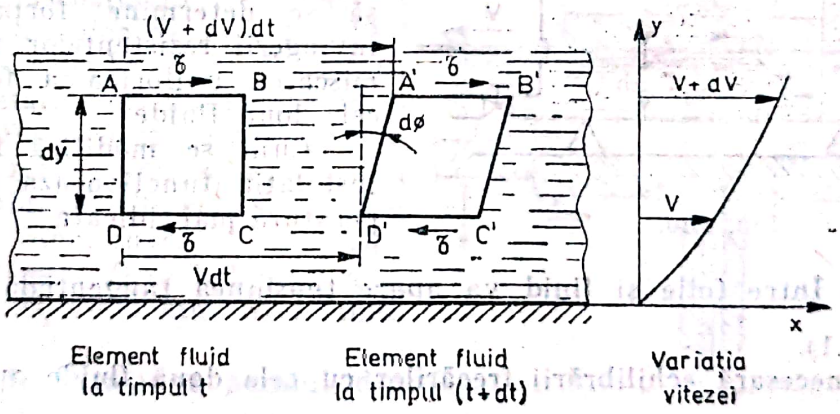
Scanned with OKEN Scanner

Deci viteza de propagare a undei de presiune este cu atît mai mică, cu cît materialul conductei este mai puțin rigid. (De exemplu în cazul conductelor din cauciuc celeritatea are valoarea de 20 m/s).

Problema 1.9. O placă plană pătrată, cu latura $l = 0{,}5$ m (fig. 1.9, *a*), alunecă pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală. Interstițiul dintre placă și plan, de grosime constantă $\delta = 0{,}1$ mm, este plin cu un ulei cu viscozitate cinematică $\nu = 0{,}65$ St și cu densitatea $\rho = 900$ kg/m³. Cunoscînd masa plăcii $m = 3$ kg să se determine viteza cu care se deplasează placa, considerînd mișcarea permanentă.



a



b

Fig. 1.9.

Rezolvare : Datorită aderenței uleiului viteza acestuia pe planul înclinat este nulă, iar pe placă este V, viteza plăcii. Deci în spațiul dintre plăci, viteza uleiului variază de la 0 la V.

Considerînd un element fluid $ABCD$, la timpul t și la timpul $t + dt$ se observă că datorită variației vitezei elementul se deformează — apar tensiuni tangențiale care produc deformația.

Ipoteza lui Newton arată că τ este proporțional cu $d\Phi/dt$, viteza de deformare a unghiului drept. Dar $d\Phi$ se poate exprima (fig. 1.9, *b*), prin relația

$$d\Phi = dvdl/dy.$$

Astfel, tensiunea τ este proporțională cu dv/dy, adică

$$\tau = \eta dv/dy, \qquad (1.9.1)$$

relație cunoscută sub numele de relația lui Newton, coeficientul de proporționalitate η fiind viscozitatea dinamică a fluidului.

Admițînd că în spațiul dintre plăci viteza variază liniar de la 0 la V, atunci

$$\tau = \eta dv/dy = \eta\, V/\delta,$$

adică tensiunea este constantă în tot spațiul.

Forța produsă de tensiunea vîscoasă asupra plăcii egalează componenta greutății în plan (cînd mișcarea este permanentă).

$$mg \sin \alpha = \eta(V/\delta)A.$$

De unde $$V = \frac{mg\delta \sin \alpha}{\eta A} = \frac{mg\delta \sin \alpha}{\rho \nu A} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3} \sin 30^\circ}{900 \cdot 0{,}65 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}25} = 0{,}1 \text{ m/s}.$$

Problema 1.10. O folie din aluminiu se deplasează cu viteză constantă $V = 5$ m/s în instalația din figura 1.10. Cunoscînd aria foliei $A = 10$ m², $h_1 = 0{,}005$ m, $h_2 = 0{,}002$ m, densitatea apei $\rho = 999{,}2$ kg/m³, densitatea aerului $\rho_{aer} = 1{,}29$ kg/m³, viscozitatea cinematică a apei $\nu = 1{,}145 \cdot 10^{-6}$ m²/s, viscozitatea cinematică $\nu_{aer} = 14{,}5 \cdot 10^{-6}$ m²/s în condiții normale de temperatură și presiune ($\theta = 15°$C, $p = 0{,}1$ MPa), să se determine forța necesară învingerii rezistențelor vîscoase la mișcarea uniformă a foliei între cele două fluide.

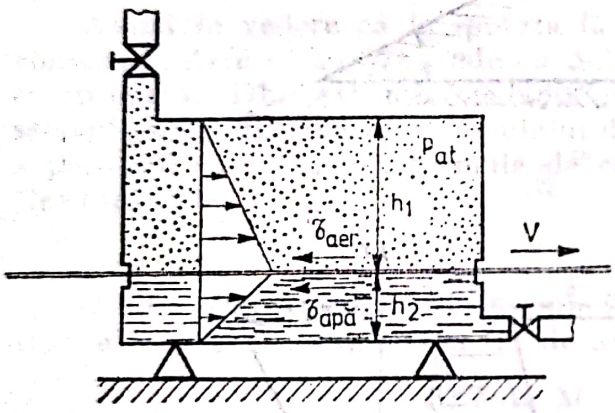


Fig. 1.10.

Cum se modifică forța dacă instalația funcționează la o temperatură mai ridicată ?

Rezolvare : Între folie și fluid va apare tensiunea tangențială $\tau = \eta \frac{V}{h}$ (relația 1.9.1).

Forța necesară echilibrării frecărilor cu cele două fluide are expresia

$$F = (\tau_{apă} + \tau_{aer}) \cdot A = (\eta_{apă}\, V/h_2 + \eta_{aer}\, V/h_1)$$

$$F = \left(999{,}2 \cdot 1{,}145 \cdot 10^{-6} \frac{5}{0{,}002} + 1{,}29 \cdot 14{,}5 \cdot 10^{-6} \frac{5}{0{,}005}\right),$$

$$F = 28{,}6 + 0{,}187 = 28{,}8 \text{ N}.$$

În cazul în care fluidele au o temperatură mai ridicată, viscozitatea lichidelor scade și a gazelor crește. Avînd în vedere că forța de frecare dintre folie și apă are ponderea cea mai mare, rezultă că forța F va avea o valoare mai mică la o temperatură mai ridicată de funcționare a instalației.

Problema 1.11. Un cilindru hidraulic susține o masă $m = 50$ kg (fig. 1.11). Să se determine timpul t de coborîre a pistonului pînă la reperul R dacă droselul DR se deschide la presiunea atmosferică. Se consideră viteza de cobo-

rîre V a pistonului constantă. Se cunosc : diametrul cilindrului $D = 200$ mm, $L = 50$ mm, $\delta = 0{,}01$ mm, $H = 1{,}5$ m, viscozitatea dinamică a uleiului $\eta = 4$P.

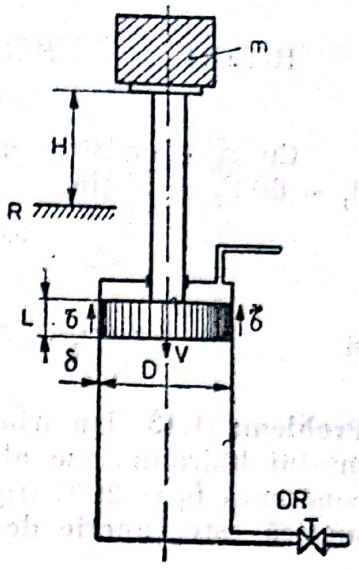


Fig. 1.11.

Rezolvare : Se face ipoteza simplificatoare că forţa de greutate care acţionează asupra pistonului este echilibrată de forţa de frecare vîscoasă

$$mg = \pi DL\tau \text{ ; unde } \tau = \eta V/\delta.$$

Rezultă

$$V = \frac{mg\delta}{\pi DL\eta} = \frac{50 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}01 \cdot 10^{-3}}{\pi 0{,}2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}4} = 0{,}39 \text{ m/s.}$$

Deci

$$t = H/V = 1{,}5/0{,}39 \cong 4 \text{ s.}$$

Problema 1.12. Lagărul de susţinere al unui hidroagregat vertical (fig. 1.12) are o peliculă de ulei de grosime $\delta_0 = 0{,}5$ mm cu viscozitatea dinamică $\eta_0 = 5{,}66 \cdot 10^{-2}$ Pa·s la temperatura $\theta_0 = 20°C$. Batiul maşinii este încărcat de două forţe $F = 25\,000$ N şi susţinut pe o pernă de aer de grosime constantă (fig. 1.12). Datorită frecării, ansamblul de susţinere se va încălzi în timpul funcţionării la temperatura $\theta_1 = 60°C$, viscozitatea dinamică a uleiului avînd valoarea $\eta_1 = 2{,}3 \cdot 10^{-2}$ Pa·s. Să se calculeze : 1) Presiunea aerului necesară susţinerii hidroagregatului. 2) Puterea consumată pentru învingerea rezistenţei vîscoase din filmul de lubrifiant la cele două temperaturi de funcţionare. Se cunosc : $n = 500$ rot/min, $D = 300$ mm, $d = 150$ mm, $D_1 = 450$ mm, $h = 3$ mm.

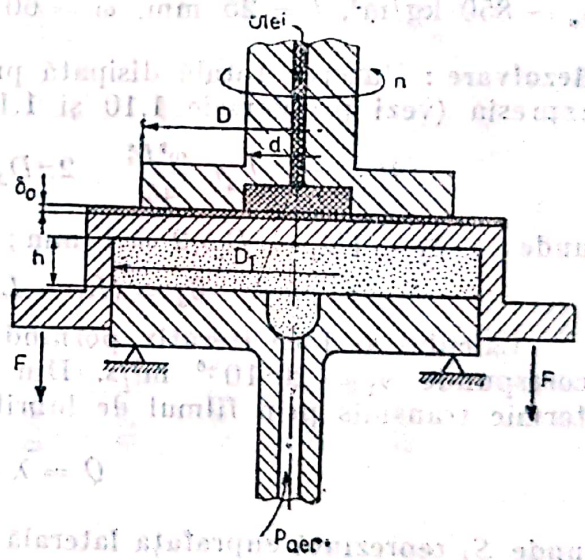


Fig. 1.12.

Rezolvare : 1) Presiunea aerului din incintă se calculează cu relaţia :

$$p = \frac{2F4}{\pi D_1^2} = \frac{2 \cdot 25\,000 \cdot 4}{\pi 0{,}45^2} = 0{,}314 \text{ MPa.}$$

2) Efortul de frecare vîscoasă este dat de formula lui Newton (1.9.1)

$$\tau = \eta V/\delta, \text{ cu } V = \omega r.$$

Puterea elementară consumată prin frecare se scrie

$$dP = V\,dF = V\tau\,dA,$$

$$dP = \eta \frac{\omega r}{\delta} \omega r\, 2\pi r\, dr.$$

Rezultă $$P = \int_{d/2}^{D/2} \eta \frac{2\pi\omega^2}{\delta} r^3 \, dr = \frac{\eta\pi\omega^2}{32\delta}(D^4 - d^4).$$

Cu $\omega = \pi n/30 = \pi 500/30 = 52{,}36$ rad/s, la temperaturile $\theta_0 = 20°C$ și $\theta_1 = 60°C$, se obține

$$P_0 = \frac{5{,}66 \cdot 10^{-2}\pi 52{,}36^2}{32 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}}(0{,}3^4 - 0{,}15^4) = 0{,}231 \text{ kW}$$

și $$P_1 = \frac{2{,}3 \cdot 10^{-2}\pi 52{,}36^2}{32 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}}(0{,}3^4 - 0{,}15^4) = 94 \text{ W}.$$

Problema 1.13. Un arbore prin care se transmite o mișcare de rotație unei mașini hidraulice se află într-o incintă închisă menținută la temperatura constantă $\theta_1 = 20°C$ (fig. 1.13, *a*), umplută cu ulei a cărui viscozitate cinematică este funcție de temperatura θ după formula :

$$\nu = \frac{35 \cdot 10^{-6}}{1 + 0{,}0337\theta + 0{,}0002\theta^2} \quad (\text{m}^2/\text{s}).$$

În ipoteza că întreaga căldură produsă prin frecare se transmite prin conducție în filmul de lubrifiant pe lungimea L_2, să se calculeze puterea hidraulică disipată între pinionul de antrenare și cuplaj. Se cunosc : $L_1 = 303$ mm, $L_2 = 300$ mm, $D_1 = 152$ mm, $D_2 = 150$ mm, $d_1 = 30{,}4$ mm, $d_2 = 30$ mm, $\rho_u = 850$ kg/m³, $l = 25$ mm, $\omega = 60$ rad/s.

Rezolvare : Puterea totală disipată prin frecare în filmul de lubrifiant are expresia (vezi problemele 1.10 și 1.11)

$$P = \pi D_2 L_2 \eta \frac{\omega^2 D_2^2}{4\delta_1} + 2\pi D_2 l \eta \frac{\omega^2 d_2^2}{4\delta_2} + 2\eta \frac{\pi\omega^2}{32\delta^3}(D_2^4 - d_2^4),$$

unde : $\delta_1 = (D_1 - D_2)/2 = 1$ mm ; $\delta_2 = (d_1 - d_2)/2 = 0{,}2$ mm ;

$$\delta_3 = (L_1 - L_2)/2 = 1{,}5 \text{ mm}.$$

Calculul se face iterativ pornind de la temperatura $\theta_1 = 20°C$ la care corespunde $\nu_1 = 20 \cdot 10^{-6}$ m²/s. Din legea lui Fourier, rezultă gradientul termic transmis prin filmul de lubrifiant de grosime δ_2

$$Q = \lambda \frac{\Delta T}{\delta_2} S_l, \qquad (1.13.1)$$

unde S_l reprezintă suprafața laterală a cilindrului de lungime L_2 și λ coeficientul de transfer termic prin conductibilitate ce se citește din figura 1.13, *b*, unde, pentru comparație, se indică curbele de variație pentru alte lichide. Variația lui λ cu temperatura fiind mică, se poate considera valoarea constantă și egală cu $\lambda = 0{,}1$ W/m·K.

Deci $$\Delta T = \frac{p\delta_2}{\lambda\pi D_2 L_2}.$$

Rezultă : $$P_1 = \left[\pi 0{,}15 \cdot 0{,}3 \frac{0{,}15^2}{4 \cdot 0{,}001} + 2\pi 0{,}03 \cdot 0{,}025 \frac{0{,}03^2}{4 \cdot 0{,}0002} + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\pi}{32 \cdot 0{,}0015}(0{,}15^4 - 0{,}03^4)\right] 850 \cdot 60^2 \cdot 20 \cdot 10^{-6} = 53 \text{ W} ;$$

$$\Delta T = \frac{53 \cdot 0{,}001}{\pi 0{,}15 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1} = 3{,}7°C.$$

Scanned with OKEN Scanner

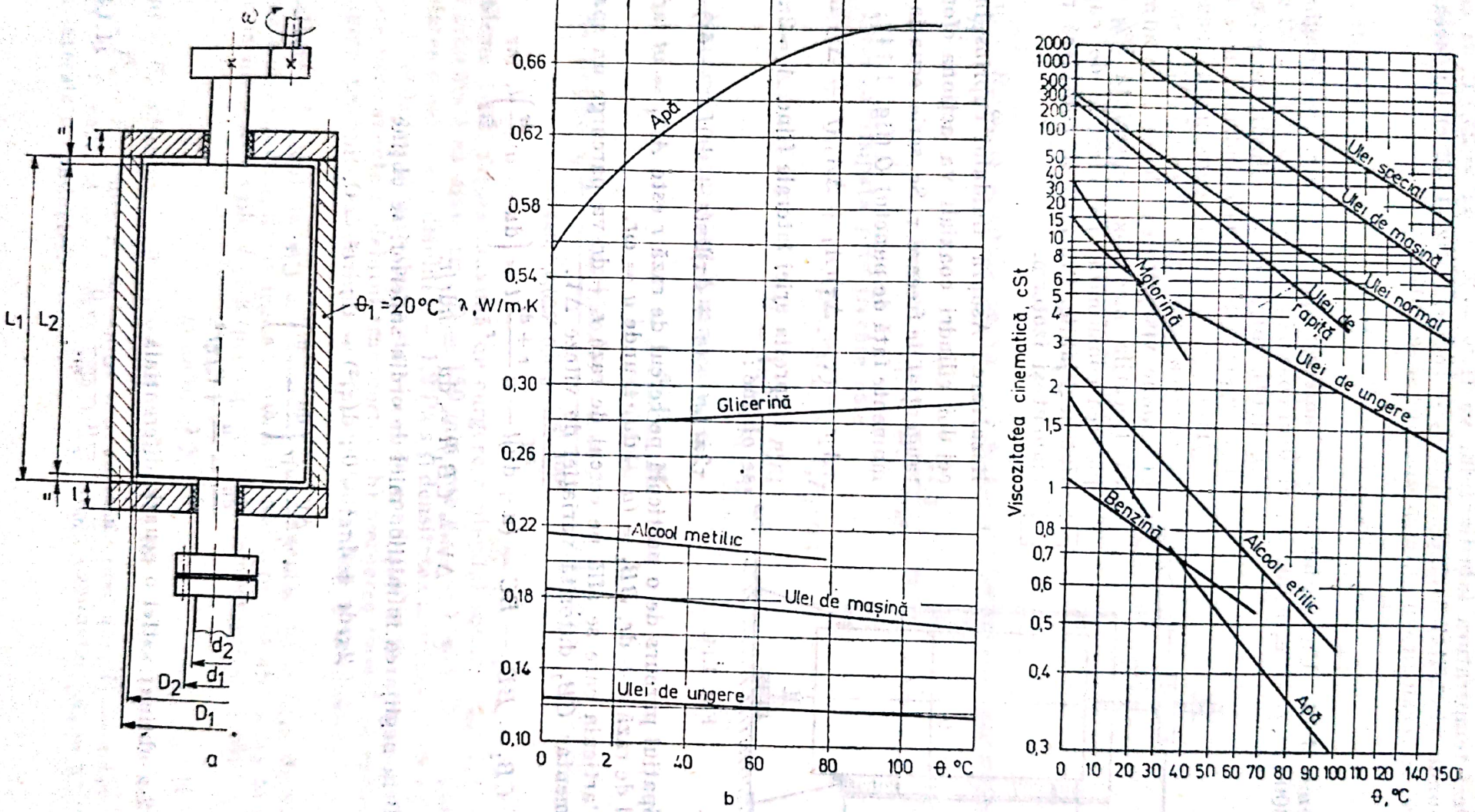


Fig. 1.13.

Scanned with OKEN Scanner

Deci temperatura lubrifiantului va fi $\theta_2 = \theta_1 + \Delta T = 23{,}7°C$, la care corespunde vîscozitatea cinematică $\nu_2 = 18{,}3$ cSt (fig. 1.13, *c*). Cu această valoare, se recalculează puterea disipată și se obține

$$P_2 = P_d = 48{,}5 \text{ W}.$$

Problema 1.14. Un cilindru cu diametrul $D_1 = 50$ mm și lungimea $L = 300$ mm se rotește într-un cilndrul coaxial fix cu diametrul $D_2 = 52$ mm (fig. 1.14). Între cei doi cilindri se găsește ulei. Cunoscînd turația cilindrului $n = 100$ rot/min și puterea consumată pentru antrenarea acestuia $P = 1{,}5$ W, să se determine viscozitatea uleiului. Se admite că frecările mecanice reprezintă 5% din puterea consumată, iar efectele de capăt sînt neglijabile. Procesul se consideră permanent și izoterm.

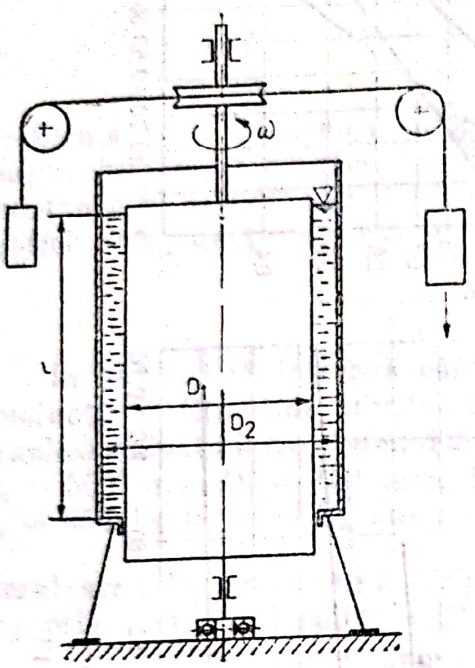


Fig. 1.14.

Rezolvare : Asupra fluidului cuprins între cei doi cilindri coaxiali va acționa efortul tangențial de frecare τ. Se scrie ecuația de momente față de punctul *O* (fig. 1.14) :

$$\tau A_l r - (\tau + \Delta\tau)(A_l + \Delta A_l)(r + \Delta r) = 0.$$

Expresia ariei laterale fiind $A_l = 2\pi rL$. se obține :

$$\tau 2\pi rLr - (\tau + d\tau)2\pi(r + dr)L(r + dr) = 0.$$

Spațiul parcurs de o particulă pe cercul de rază r este $AA_1 = ut$ iar pe cercul de rază $r + dr$, $BB_1 = (u + du)\cdot t$, unde $u = \omega r$..

Particula care se află pe cercul de rază $r + dr$ va parcurge un spațiu suplimentar CB_1 datorită variației de viteze ΔV.

$$CB_1 = BB_1 - BC = (u + du)t - u\frac{r + dr}{r}t = \left(du - u\frac{dr}{r}\right)t, \text{ iar}$$

$$\Delta V = CB_1/t = du - udr/r.$$

Prin neglijarea infiniților mici de ordin superior, se obține :

$$2\tau r dr + d\tau r^2 = 0\,;\ d(\tau r^2) = 0\,;\ \tau r^2 = C,$$

$$\tau = \eta\frac{\Delta V}{\Delta r} = \eta\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) = C/r^2$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{u}{r} + C/\eta r^2.$$

S-a obținut astfel o ecuație diferențială

$$\frac{du}{dr} - \frac{1}{r}u - \frac{C}{\eta r^2} = 0 \qquad (1.14.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

de tipul $\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x) = 0$, care are soluția generală

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(B - \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx\right).$$

Rezultă

$$u = C/2\eta r + Br.$$

Condițiile la limită sînt următoarele:

$$r = R_1, \quad u = u_0;$$

$$r = R_2, \quad u = 0.$$

Se obține:

$$C = 2\eta B R_2^2; \quad B = R_1 u_0/(R_1^2 - R_2^2).$$

Deci distribuția de viteze va avea expresia

$$u = \frac{R_2^2 R_1 - R_1 r^2}{(R_2^2 - R_1^2)r}\cdot u_0; \qquad (1.14.2)$$

cu $u_0 = R_1\cdot\omega$, $\omega = \pi n/30$, se va calcula efortul tangențial maxim pentru $r = R_1$

$$\tau_{max} = \eta\frac{C}{R_1^2} = \frac{2\eta R_2^2}{(R_1^2 - R_2^2)R_1}\cdot u_0. \qquad (1.14.3)$$

Puterea disipată prin frecare este

$$P = M\omega = \tau A_l R_1\cdot\omega;$$

$$P = 4\pi\eta L\frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}\omega^2.$$

Expresia viscozității dinamice va fi

$$\eta = \frac{P\,|R_1^2 - R_2^2|}{4\pi L R_1^2 R_2^2\omega^2}.$$

Se obține $\eta = \dfrac{0{,}95\cdot 1{,}5(0{,}026^2 - 0{,}025^2)}{4\pi 0{,}3\cdot 0{,}025^2\cdot 0{,}026^2\cdot\dfrac{\pi^2\cdot 100^2}{30^2}} = 0{,}416\text{Pa s} = 416\ \text{cP}.$

Problema 1.15. Viteza maximă de curgere a uleiului într-o conductă circulară orizontală cu diametrul $D = 150$ mm este $v_{max} = 1$ m/s. Cunoscînd vîscozitatea dinamică a uleiului $\eta = 1{,}2$ Pa s și densitatea acestuia $\rho = 0{,}9$ g/cm³, să se determine: a) distribuția de viteze în conductă în ipoteza mișcării laminare permanente și debitul transportat; b) pierderea liniară de sarcină în conductă pe unitatea de lungime (panta hidraulică a conductei).

Rezolvare: În ipoteza mișcării laminare permanente, distribuția de viteza se poate determina aplicînd legea a doua a dinamicii pentru un volum de fluid cuprins între secțiunile *1* și *2* (principiul lui d'Alembert), (fig. 1.15)

$$m\,\vec{dv}/dt = \Sigma\vec{F}. \qquad (1.15.1)$$

$\vec{dv}/dt = 0$, mișcarea fiind cu viteză constantă, iar

$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_f$, unde $\vec{F}_p = -\vec{n}pA$ este forța de presiune, $\vec{F}_f = \tau A_l\vec{\tau}$ este forța de frecare, $A = \pi r^2$ este aria transversală conductei, $A_l = \pi rl$ este aria laterală a conductei.

Scanned with OKEN Scanner

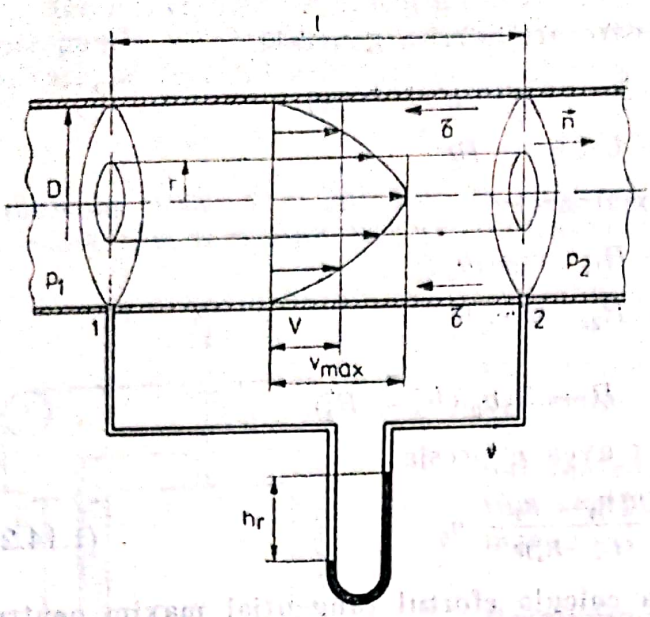


Fig. 1.15.

Relaţia vectorială proiectată pe axa conductei devine

$$\Delta p \pi r^2 = \eta\, 2\pi l r dv/dr, \tag{1.15.2}$$

unde $\Delta p = p_2 - p_1$ reprezintă diferenţa de presiune între cele două secţiuni. Integrînd relaţia obţinută cu condiţiile la limită $v = 0$ pentru $r = R$, se obţine

$$v = \frac{1}{4\eta}\frac{\Delta p}{l} r^2 + C\,;\; v = \frac{1}{4\eta}\frac{\Delta p}{l}(r^2 - R^2). \tag{1.15.3}$$

Expresia debitului transportat va fi

$$Q = \int_0^R v dA = \frac{1}{4\eta}\frac{\Delta p}{l}\int_0^R (r^2 - R^2) 2\pi r dr, \tag{1.15.4}$$

$$Q = \frac{\pi}{2\eta}\cdot\frac{p_1 - p_2}{l}\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{\pi D^4 (p_1 - p_2)}{128\eta l}.$$

Se defineşte viteza medie cu relaţia

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{D^2}{32\eta}\cdot\frac{p_1 - p_2}{l} \tag{1.15.5}$$

şi viteza maximă, pentru $r = 0$ este

$$v_{max} = \frac{D^2}{16\eta}\cdot\frac{p_1 - p_2}{l} = 2V. \tag{1.15.6}$$

Pierderea de presiune pe unitatea de lungime va fi

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{16\eta v_{max}}{D^2} = \frac{16\cdot 0{,}12\cdot 1}{0{,}150^2} = 85{,}3 \text{ N/m}^3.$$

Debitul va avea valoarea $Q = \frac{\pi 0{,}150^4}{128\cdot 0{,}12}\cdot 85{,}3 = 8{,}83\cdot 10^{-3}$ m^3/s.

Pentru verificare se calculează numărul Reynolds ; în cazul în care acesta este mai mic de 2 300, mişcarea fluidului este laminară, deci ipoteza de la care s-a plecat în calcul este corectă.

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}15\cdot 900}{0{,}12} = 563 < 2\,300.$$

Energia disipată în curgerea fluidului are expresia :

$$E_d = mgh_r,$$

unde h_r poartă denumirea de pierderea liniară de sarcină.

Rezultă valoarea pantei hidraulice : $\frac{h_r}{l} = \frac{\Delta p}{\rho g l} = \frac{85{,}3}{9{,}81\cdot 900} = 0{,}00966.$

Scanned with OKEN Scanner

Tensiunea tangențială la peretele conductei are expresia :

$$\tau_0 = \eta \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{2l}\frac{D}{2}$$

și corespunde unei forțe de frecare $F_\tau = \tau A_l$. Forța de rezistență la înaintare este dată de relația $R_x = \frac{C_x}{2} \rho A V^2$ (vezi problema 1.5), unde s-a notat cu V viteza medie în conductă.

Mișcarea fiind permanentă, rezultă :

$$F_\tau = F_R ;$$

$$\Delta p = \frac{\lambda}{2} \rho \frac{l}{D} V^2, \qquad (1.15.7)$$

unde $\lambda = 4C_x$ poartă denumirea de coeficientul lui Darcy. Din (1.15.6) și (1.15.7) rezultă

$$\lambda = 64/\mathbf{Re}. \qquad (1.15.8)$$

Expresia este cunoscută ca rezultat al integrării curgerii laminare în tuburi cilindrice și se numește relația Hagen-Poiseuille. A se vedea capitolul 7.

Problema 1.16. Pentru măsurarea viscozității cinematice a unui lichid, se folosește aparatul Bingham-Oswald din figura 1.16 și formula de calcul este $\nu = Ct - B/t$ unde : t reprezintă timpul de curgere a lichidului între reperele E și F iar C și B sînt constantele aparatului. Care este semnificația constantelor C și B ?

Rezolvare : Una din metodele de determinare a viscozității unui lichid este măsurarea timpului de curgere a unui volum dat de lichid printr-un orificiu mic sau tub calibrat sub acțiunea greutății proprii. Debitul care trece printr-un tub calibrat are expresia (1.15.4) :

$$Q = \frac{\pi d^4 \Delta p}{128 \eta L}.$$

În ipoteza curgerii cu diferență de presiune constantă $\Delta p = \rho g h$ și ținînd seama că $Q = \mathcal{V}/t$ rezultă expresia

$$\nu = \frac{\pi d^4 h g}{128 L \mathcal{V}} \cdot t = Ct,$$

unde : d reprezintă diametrul tubului capilar, h diferența de nivel între punctele E și F, L lungimea tubului capilar, $\mathcal{V}$ volumul incintei EF. În aceste condiții C reprezintă o constantă a aparatului. Termenul de

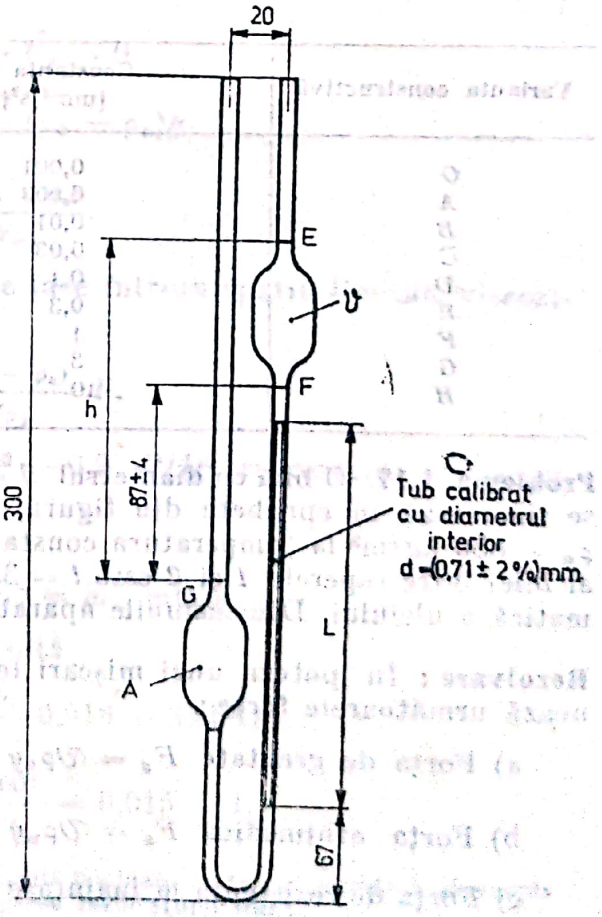


Fig. 1.16.

corecție B/t apare datorită faptului că nu s-a ținut seama de nepermanența mișcării. Constanta B are expresia

$$B = \frac{a\mathcal{V}}{8\pi L}, \text{ cu } a \text{ egal cel mult cu } 1{,}5.$$

La aceste tipuri de aparate, se recomandă ca timpul de curgere să fie cuprins între 200 și 1 000 de secunde.

În acest caz, influența termenului B/t nu este semnificativă. În timpul executării măsurătorii, aparatul se va menține într-o baie cu temperatură constantă.

Exemplu de calcul. Pentru aparatul din figură, se dau următoarele date geometrice : $\mathcal{V} = 5$ ml, $L = 120$ mm, $d = 0{,}71$ mm, $h = 100$ mm. Se obține :

$$\nu = \frac{\pi(0{,}71\cdot 10^{-3})^4 \cdot 0{,}1 \cdot 9{,}81}{128 \cdot 0{,}120 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} \cdot t - \frac{1{,}5 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{8\pi 0{,}120} \frac{1}{t};$$

$$\nu = 0{,}01\ t - 2{,}5/t. \text{ [cSt]}$$

Presupunînd că timpul de curgere între reperele E și F este de $t = 250$ s, va rezulta o viscozitate :

$$\nu = 0{,}01 \cdot 250 - 2{,}5/250 = 2{,}49 \text{ cSt.}$$

Observație : Aparatul și relațiile de calcul folosite în această problemă sînt prezentate în standardele ISO 3104/3105. Pentru o gamă de viscozități cuprinse între 0,3 și 10 000 cSt, se recomandă următoarele variante de construcție ale aparatului, prezentate în tabelul 1.16.

Tabelul 1.16

Varianta constructivă	Constanta C [mm²/s²]	Viscozitatea [cSt]
O	0,001	0,3— 1
A	0,003	0,9— 3
B	0,01	2 — 10
C	0,03	6 — 30
D	0,1	20 — 100
E	0,3	60 — 300
F	1	200 — 1 000
G	3	600 — 3 000
H	10	2 000 —10 000

Problema 1.17. O bilă cu diametrul $d = 1$ mm și densitatea $\rho_b = 4\,000$ kg/m³ se imersează în eprubeta din figură, în care se găsește ulei cu densitatea $\rho_u = 850$ kg/m³ la temperatura constantă $\theta = 10°C$. Dacă timpul de cădere al bilei între reperele *1* și *2* este $t = 35$ s, să se determine vîscozitatea cinematică a uleiului. Dimensiunile aparatului sînt prezentate în figura 1.17, *a*.

Rezolvare : În ipoteza unei mișcări lente și permanente asupra bilei, acționează următoarele forțe :

a) Forța de greutate $F_g = \mathcal{V}\rho_b g = \frac{\pi d^3}{6}\rho_b g$;

b) Forța arhimedică $F_a = \mathcal{V}\rho_u g = \frac{\pi d^3}{6}\rho_u g$;

c) Forța de rezistență la înaintare (formula dată de Stokes)

$$F_r = 3\pi\nu\rho_u dV, \qquad (1.17.1)$$

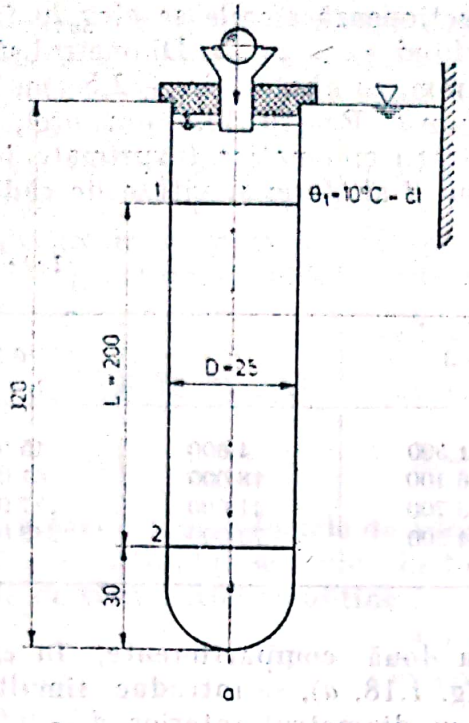
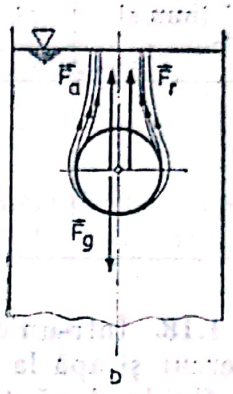


Fig. 1.17.



unde V reprezintă viteza uniformă de deplasare a sferei într-un fluid infinit în repaus.

Se scrie echilibrul forţelor care acţionează asupra sferei, (fig. 1.17, *b*).

$$\vec{F}_r + \vec{F}_a + \vec{F}_g = 0$$

$$3\pi\nu\rho_u dV = \frac{\pi d^3}{6}(\rho_b - \rho_u)g$$

$$\nu = \frac{d^2 g(\rho_b - \rho_u)}{18V\rho_u}.$$

Avînd în vedere că mişcarea bilei se face într-un spaţiu limitat, viscozitatea cinematică va fi dată de expresia

$$\nu = \frac{d^2 g(\rho_b - \rho_u)}{18V\rho_u} \cdot F,$$

unde $F = 1 - 2{,}104\ d/D + 2{,}09\ d^3/D^3 - 0{,}9\ d^5/D^5$ reprezintă un factor de corecţie.

Viteza de cădere a sferei este :

$$V = L/t = 0{,}200/35 = 5{,}7 \text{ mm/s}.$$

Cu $D = 25$ mm şi $F = 0{,}916$, rezultă

$$\nu = \frac{0{,}001^2 \cdot 9{,}81(4\,000 - 850)}{18 \cdot 0{,}0057 \cdot 850} \cdot 0{,}916 = 324 \text{ cSt}.$$

$$\mathrm{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0{,}0057 \cdot 0{,}001}{324 \cdot 10^{-6}} = 0{,}015 < 1.$$

Formula lui Stokes este valabilă pentru mişcări laminare lente, cu numărul Reynolds $\mathrm{Re} < 1$, valoare care trebuie verificată după obţinerea rezultatului final.

Stabilirea formulei lui Stokes se face în capitolul 6.

Observație : Materialele din care se confecționează sferele se aleg în funcție de densitatea fluidului studiat, condiția fiind $\rho_b > \rho_{fluid}$. Diametrul sferelor este cuprins în intervalele din 0,5 în 0,5 mm, cu abateri de $\pm$ 2,5 μm. Nu se admit viteze mai mari de $V_{max} = 10$ mm/s. Pentru bile din oțel, $\rho_b = 7\,500$ kg/m^3, se obțin valorile viscozității cinematice (exprimate în cSt) din tabelul 1.17, în funcție de diametrul d al sferei și viteza de cădere V.

Tabelul 1.17

d mm \ V [mm/s]	10	3	1	0,3
1	460	1 500	4 600	15 000
2	1 800	6 100	18 000	61 000
3	4 100	13 700	41 000	137 000
4	7 300	24 300	73 000	243 000

Problema 1.18. Într-un vas împărțit în două compartimente, în care se găsește mercur și apă la același nivel (fig. 1.18, *a*), se introduc simultan în cele două fluide două tuburi capilare cu diametrul interior $d = 0{,}5$ mm. Să se determine denivelarea maximă H ce apare între nivelul mercurului și nivelul apei din tuburile capilare. Se cunosc ; densitatea apei $\rho_a = 1\,000$ kg/m^3, densitatea mercurului $\rho_{Hg} = 13\,595$ kg/m^3, tensiunea superficială dintre apă și aer $\sigma_a = 0{,}077$ N/m și tensiunea superficială dintre mercur și aer $\sigma_{Hg} = 0{,}470$ N/m.

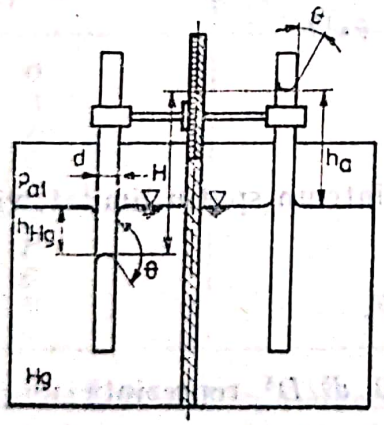
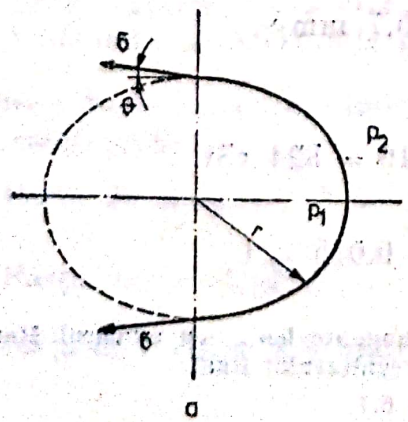
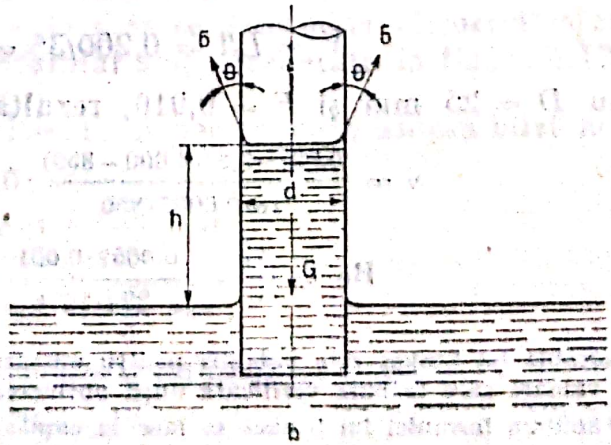


Fig. 1.18.



a



b

Rezolvare : În cazul tuburilor capilare (tuburi cu diametrul de ordinul de mărime al zecimilor de milimetru) imersate în fluide în repaus se stabilește un echilibru între forța de greutate, forța de adeziune la suprafața solidă și forțele de coeziune intermoleculară.

Fie un tub capilar în care se găsește un lichid, care udă peretele tubului (fig. 1.18, *b*). Se observă că între nivelul lichidului în vas și cel din tub există denivelarea h. Coloana de lichid se menține datorită forțelor interne — greutatea lichidului este echilibrată de tensiunea superficială. :

$$\sigma\pi d \cos\theta = \rho g h \pi d^2/4,$$

de unde rezultă formula denivelării h dată de Jurin

$$h = \frac{4\sigma}{\rho g d} \cdot \cos\theta. \qquad (1.18.1)$$

În cazul în care forțele de adeziune sînt mai mari decît cele de coeziune, $\cos\theta > 0$ și fluidul se ridică în tubul capilar. Acesta este cazul apei în tuburile de sticlă. Aici se obține

$$h_a = \frac{4 \cdot 0{,}0077 \cdot 1}{9{,}81 \cdot 1\,000 \cdot 0{,}0005} = 0{,}063 \text{ m}.$$

În cazul mercurului, forțele de coeziune intermoleculară sînt mai mari decît forțele de adeziune, $\cos\theta < 0$ și fluidul coboară în tubul capilar. În cazul considerat, rezultă

$$h_{Hg} = -\frac{4 \cdot 0{,}470 \cdot 1}{9{,}81 \cdot 13\,595 \cdot 0{,}0005} = -0{,}028 \text{ m}.$$

Rezultă $H_{max} = h_a - h_{Hg} = 0{,}091$ m.

În realitate, denivelările h sînt mai mici, deoarece unghiul θ este diferit de 0°, respectiv 180°.

Problema 1.19. Să se calculeze excedentul de presiune din interiorul unui jet de apă cu diametrul de 5 mm, datorat tensiunii superficiale. Care este diametrul unui jet de tetraclorură de carbon dacă excedentul de presiune rămîne același. În ambele cazuri, jeturile sînt libere în aer. Se cunoaște tensiunea superficială dintre apă și aer $\sigma_a = 0{,}0726$ N/m și dintre tetraclorura de carbon și aer $\sigma_c = 0{,}0262$ N/m (valorile sînt date pentru temperatura $\theta = 20°C$).

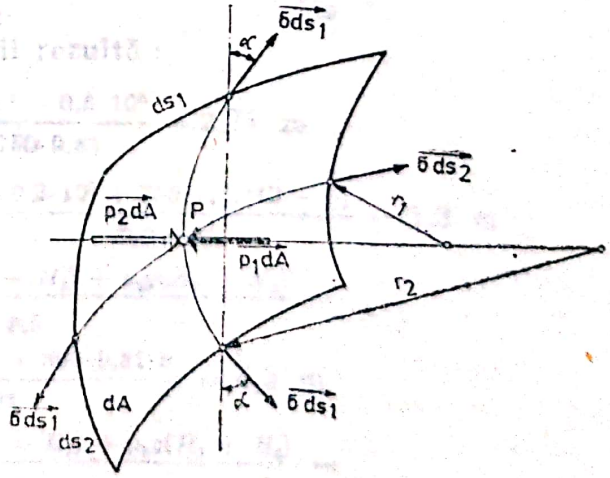


Fig. 1.19.

Rezolvare : Pentru a calcula diferența de presiune ce apare datorită tensiunii superficiale, se pleacă de la relația lui Laplace* :

$$p_1 - p_2 = \sigma(1/r_1 + 1/r_2), \qquad (1.19.1)$$

* Dan Gh. Ionescu ș.a. Mecanica fluidelor și mașini hidraulice. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1983.

Scanned with OKEN Scanner

unde r_1 și r_2 sînt razele de curbură ale suprafeței lichidului în punctul considerat; $\Delta p = p_1 - p_2$ — diferența de presiune corespunzătoare celor două medii, σ — tensiunea superficială (forța pe unitatea de lungime (fig. 1.19). Aplicînd formula (1.19.1), cu $r_1 = 0$, $r_2 = d/2$, se obține

$$\Delta p = \frac{2\sigma_a}{d} = \frac{2 \cdot 0{,}0726}{0{,}005} \cong 29 \text{ Pa}.$$

$$d = \frac{2\sigma_t}{\Delta p} = \frac{2 \cdot 0{,}0262}{29} = 0{,}0018 \text{ m}.$$

2

CALCULUL FORȚELOR HIDROSTATICE DE PRESIUNE ÎN REZERVOARE

Problema 2.1. Recipientul din figura 2.1 conține trei lichide imiscibile cu densitățile $\rho_1 = 750$ kg/m³, $\rho_2 = 800$ kg/m³, $\rho_3 = 1\,100$ kg/m³. Cunoscînd presiunea relativă indicată de manometrul A, $p_1 = 0{,}2$ bar, înălțimile $H_1 = 12$ m, $H_2 = 8$ m, $H_3 = 3$ m, $H_4 = 2$m, să se determine indicațiile h_1, h_2, h_3, h_4 din tuburile piezometrice și forța de presiune ce acționează pe fundul recipientului cu diametrul $D = 5$ m.
Presiunea atmosferică are valoarea $p_{at} = 1$ bar $= 0{,}1$ MPa.

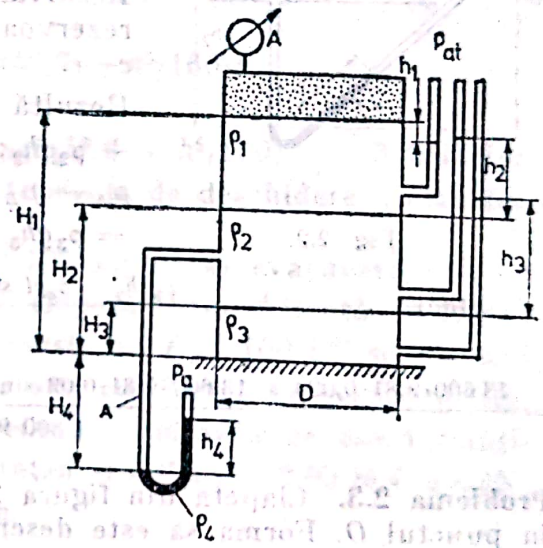


Fig. 2.1.

Rezolvare : Presiunile la nivelurile de referință *1*, *2*, 3, *4* se calculează folosind relația fundamentală a staticii fluidelor pentru fluide incompresibile în cîmp gravitațional, $p + \rho g z = \text{const.}$ Rezultă $p_1 = p_A$; $p_2 = p_A + \rho_1 g(H_1 - H_2)$; $p_3 = p_A + \rho_1 g(H_1 - H_2) + \rho_2 g(H_2 - H_3)$; $p_4 = p_A + \rho_1 g(H_1 - H_2) + \rho_2 g(H_2 + H_4)$.

Tot presiunile p_1, p_2, p_3 și p_4 se pot exprima în funcție de cotele h din tuburile piezometrice :

$p_1 = p_{at} - \rho_1 g h_1$; $p_2 = p_{at} + \rho_2 g h_2$;
$p_3 = p_{at} + \rho_3 g h_3$; $p_4 = p_{at} + \rho_3 g h_4$.

Din egalitatea celor două expresii rezultă :

$$h_1 = \frac{p_{at} - p_A}{\rho_1 g} = \frac{1 \cdot 10^5 - 0{,}8 \cdot 10^5}{750 \cdot 9{,}81} = 2{,}71 \text{ m};$$

$$h_2 = \frac{p_A - p_{at} + \rho_1 g(H_1 - H_2)}{\rho_2 g} = \frac{-0{,}2 \cdot 10^5 + 750 \cdot 9{,}81(12 - 8)}{800 \cdot 9{,}81} = 1{,}2 \text{ m};$$

$$h_3 = \frac{p_A - p_{at} + \rho_1 g(H_1 - H_2) + \rho_2 g(H_2 - H_3)}{\rho_3 g} =$$

$$= \frac{-0{,}2 \cdot 10^5 + 750 \cdot 9{,}81 + 800 \cdot 9{,}81 \cdot 5}{1\,100 \cdot 9{,}81} = 4{,}5 \text{ m}.$$

$$h_4 = \frac{p_A - p_{at} + \rho_1 g(H_1 - H_2) + \rho_2 g(H_2 + H_4)}{\rho_4 g} =$$

$$= \frac{-0{,}2 \cdot 10^5 + 750 \cdot 9{,}81 \cdot 4 + 800 \cdot 9{,}81 \cdot 10}{13\,600 \cdot 9{,}81} = 0{,}65 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Presiunea pe fundul rezervorului are expresia

$$p = p_A - p_{at} + \rho_1 g(H_1 - H_2) + \rho_2 g(H_2 - H_3) + \rho_3 g \cdot H_3 =$$

$$= -0{,}2 \cdot 10^5 + 750 \cdot 9{,}81 \cdot 4 + 800 \cdot 9{,}81 \cdot 5 + 1100 \cdot 9{,}81 \cdot 3 = 0{,}81 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Rezultă forța de presiune $F = pA = 0{,}81 \cdot 10^5 \cdot \pi 25/4 = 1{,}59$ MN, care acționează în centrul de greutate al suprafeței (suprafața fiind orizontală, centrul de greutate coincide cu centrul de presiune).

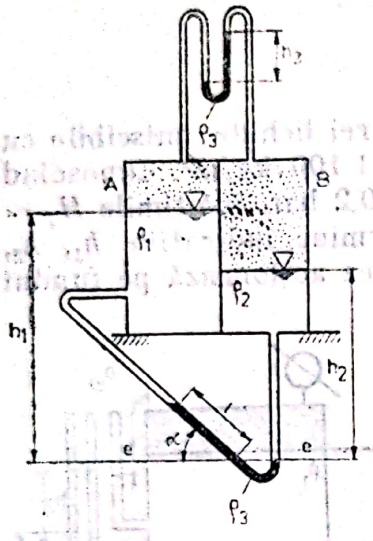


Fig. 2.2.

Problema 2.2. În rezervoarele A și B din figura 2.2 se găsesc două fluide cu densitățile $\rho_1 = 1\,000$ kg/m³ și $\rho_2 = 1\,800$ kg/m³. Indicațiile manometrelor care conțin fluidul de densitate $\rho_3 = 13\,600$ kg/m³ sînt $h_3 = 0{,}024$ m și $l = 0{,}03$ m. Cunoscînd înălțimea fluidului din rezervorul A, $h_1 = 1{,}2$ m, să se determine înălțimea coloanei de lichid h_2.

Rezolvare: Presiunile fluidelor din cele două rezervoare se raportează la linia echipotențială e—e.

Rezultă $p_A + \rho_1 g(h_1 - l \sin \alpha) + \rho_3 g l \sin \alpha = p_B + \rho_2 g h_2$;

$p_A - p_B = \rho_2 g h_2 - \rho_3 g l \sin \alpha - \rho_1 g(h_1 - l \sin \alpha) = \rho_3 g h_3$.

Deci $$h_2 = \frac{\rho_3 g h_3 + \rho_3 g l \sin \alpha + \rho_1 g(h_1 - l \sin \alpha)}{\rho_2 g} =$$

$$= \frac{13\,600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}024 + 13\,600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}03 \sin 30° + 1\,000 \cdot 9{,}81(1{,}2 - 0{,}03 \cdot \sin 30°)}{1\,800 \cdot 9{,}81} = 0{,}95 \text{ m}.$$

Problema 2.3. Clapeta din figura 2.3, de lățime $b = 2$ m, este articulată în punctul O. Forma sa este descrisă de ecuația $x = y^2/4$.

În cazul în care adîncimea apei este constantă, $h = 1$ m, să se determine momentul necesar în articulație pentru menținerea clapetei în această poziție (se neglijează masa clapetei).

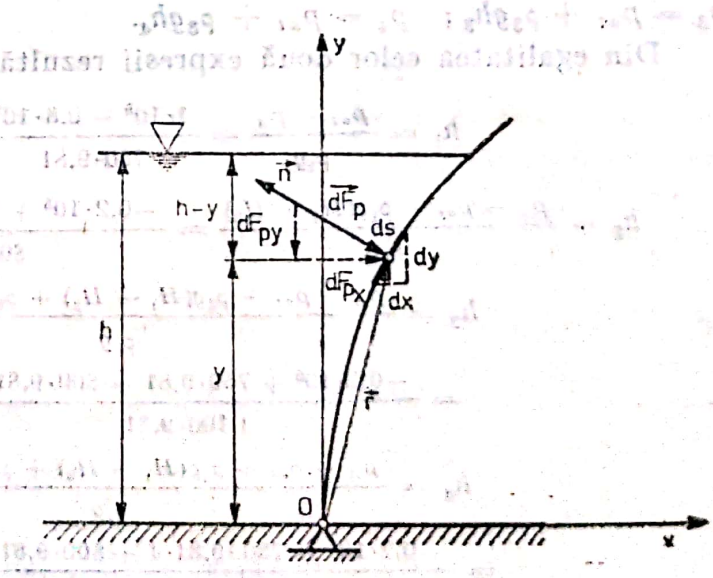


Fig. 2.3.

Rezolvare: Se consideră un element de clapetă, de lățime b și lungime ds. Pe acest element se exercită forța elementară de presiune:

$$\vec{dF}_p = -p\vec{n}dA = -p\vec{n}bds. \qquad (2.3.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Această forță are proiecțiile : $dF_{px} = pbdy = \rho g(h-y)bdy$; $dF_{py} = -\rho gbdx = -\rho g(h-y)bdx$.

Vectorul de poziție al centrului acestei secțiuni elementare este $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, iar forța de presiune are expresia $\vec{dF}_p = \rho gb\,[(h-y)dy\vec{i} - (h-y)dx\vec{j}]$.

Momentul elementar față de articulația *0* produs de această forță elementară de presiune este

$$\vec{dM}_0 = \vec{r} \times \vec{dF}_p. \qquad (2.3.2)$$

Ținînd seama de ecuația suprafeței $x = y^2/4$, respectiv $dx = \frac{y}{2}dy$, momentul elementar devine

$$\vec{dM}_0 = \left(\frac{y^2}{4}\vec{i} + y\vec{j}\right) \times \left\{\rho gb\left[(h-y)dy\vec{i} - (h-y)\frac{y}{2}dy\vec{j}\right]\right\};$$

rezultă $$\vec{dM}_0 = -\rho g(h-y)\left(\frac{y^3}{8} + y\right)dy\vec{k}.$$

În consecință, $$\vec{M}_0 = \int_0^h \vec{dM}_0 = -\rho gb(h^3/6 + h^5/160)\vec{k}.$$

Deci valoarea acestui moment este $M_0 = -\rho gb(h^3/6 + h^5/160) = -3\,393$ Nm. Semnul negativ al acestui moment arată tendința de deschidere a clapetei.

Problema 2.4. Fluidul de densitate $\rho_1 = 1\,100$ kg/m³ se evacuează într-un bazin cu apă la nivelul $H = 5$ m printr-o clapetă plană pătrată cu latura $a = 3$ m articulată în punctul *O*. O forță constantă $P = 100$ kN se exercită pe un piston situat la cota $h = 1{,}2$ m de axa conductei de evacuare (fig. 2.4, *a*). Să se determine presiunea p_c din cilindru hidraulic necesară menținerii închise a clapetei. Se cunosc : greutatea stavilei $G = 0{,}05$ MN, $\alpha = 45°$, $d = 0{,}75$ m, $d_1 = 0{,}05$ m, $D_1 = 0{,}3$ m.

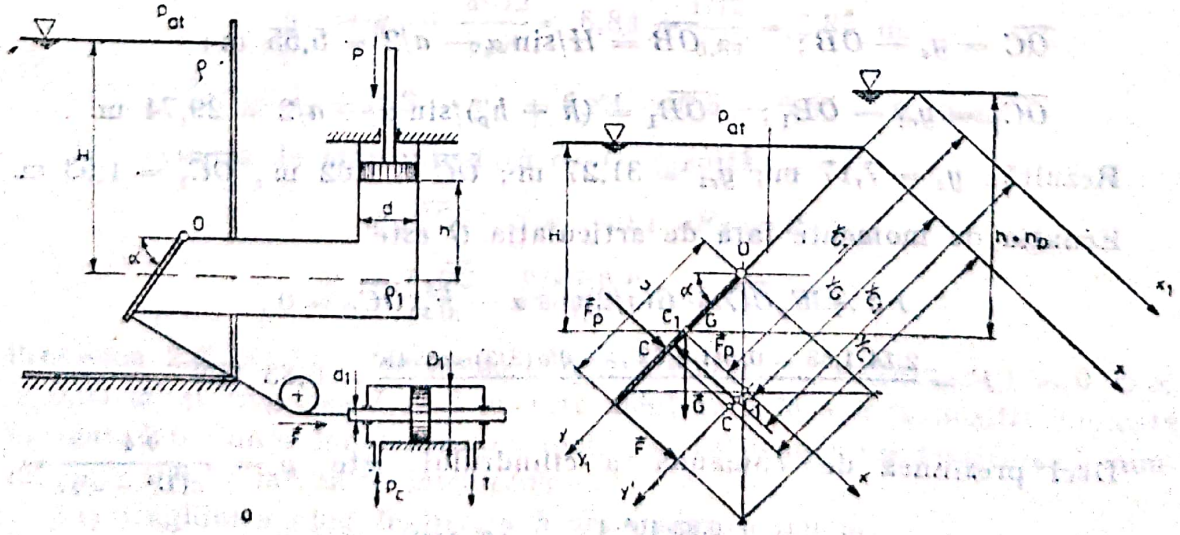


Fig. 2.4.

Rezolvare : Integrînd relaţia (2.3.1) pe suprafaţa plană a clapetei, se obţine

$$\vec{F}_p = -\vec{n}\int_S p\,dA = -\vec{n}\int_S \rho g y \sin\alpha\, dA = -\rho g h_G A\vec{n}, \qquad (2.4.1)$$

unde $\int_S y\,dA = h_G A$ reprezintă momentul static al suprafeţei faţă de axa Ox. Relaţia (2.3.2) devine

$$\vec{M}_0 = \vec{n}\int_S \vec{r}p\,dA = \vec{r}_c \times \vec{F}_p, \qquad (2.4.2)$$

cu $\vec{r}_c = \frac{\int_S \vec{r}p\,dA}{\int_S p\,dA}$ reprezentînd vectorul de poziţie al centrului de presiune C al rezultantei forţelor de presiune $\vec{F}_p$ perpendiculare pe suprafaţa S.

Pentru suprafaţa plană : $x_C = \frac{I_{xy}}{y_G A}$, $y_C = \frac{I_x}{y_G A}$, unde I_x este momentul de inerţie al suprafeţei faţă de axa Ox şi I_{xy} este momentul de inerţie centrifugal.

Pentru aplicarea relaţiilor (2.4.1.) şi (2.4.2), se înlocuieşte forţa P cu o înălţime echivalentă de lichid

$$\rho_1 g h_p = \frac{P\cdot 4}{\pi d^2};\quad h_p = \frac{100\cdot 10^3\cdot 4}{1\,100\cdot 9{,}81\cdot\pi\cdot 0{,}75^2} = 20{,}9 \text{ m}.$$

Forţele de presiune asupra clapetei au valorile

$$F_p = \rho g H a^2 = 1\,000\cdot 9{,}81\cdot 5\cdot 3^2 = 0{,}441 \text{ MN};$$

$$F_{p1} = \rho_1 g(h + h_p)a^2 = 1\,100\cdot 9{,}81(1{,}2 + 20{,}9)\cdot 3^2 = 2{,}14 \text{ MN}.$$

Coordonatele punctelor de aplicaţie ale acestor forţe se determină cu relaţiile (vezi fig. 2.4, *b*) :

$$y_c = y_G + \frac{a^4/12}{y_G a^2};\quad y_G = \frac{H}{\sin\alpha} = 7{,}07 \text{ m};$$

$$y_{c1} = y_{G1} + \frac{a^4/12}{y_{G1}a^2};\quad y_{G1} = \frac{h + h_p}{\sin\alpha} = 31{,}25 \text{ m};$$

$$\overline{OC} = y_c - OB;\qquad \overline{OB} = H/\sin\alpha - a/2 = 5{,}55 \text{ m};$$

$$\overline{OC_1} = y_{c1} - OB_1;\qquad \overline{OB_1} = (h + h_p)/\sin\alpha - a/2 = 29{,}74 \text{ m}.$$

Rezultă : $y_c = 7{,}17$ m ; $y_{c1} = 31{,}27$ m ; $\overline{OC} = 1{,}62$ m ; $\overline{OC_1} = 1{,}53$ m.

Ecuaţia de momente faţă de articulaţia O este

$$Fa + F_p\overline{OC} + G(a/2)\cos\alpha - F_{p1}\overline{OC_1} = 0;$$

$$F = \frac{2{,}14\cdot 1{,}53 - 0{,}441\cdot 1{,}62 - 0{,}05\cdot(3/2)\cdot\cos 45^\circ}{3} = 0{,}83 \text{ MN}$$

Deci presiunea de comandă a cilindrului este $p_c = \frac{F4}{\pi(D^2 - d^2)} =$

$$= \frac{0{,}83\cdot 10^6\cdot 4}{\pi(0{,}3^2 - 0{,}05^2)} = 12 \text{ MPa}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Problema 2.5. Care este forța minimă, F_a, din arcul A, astfel încît clapeta pătrată de latură $a = 1$ m și articulată în O să rămînă închisă (fig. 2.5) ?

Se cunosc : presiunea relativă indicată de manometrul M, $p_M = 0{,}5$ bar, $H = 2$ m, $h = 0{,}055$ m, densitatea mercurului $\rho_{Hg} = 13\,600$ kg/m³, momentul de frecare din articulație $M_f = 0{,}1\ aF_a$.

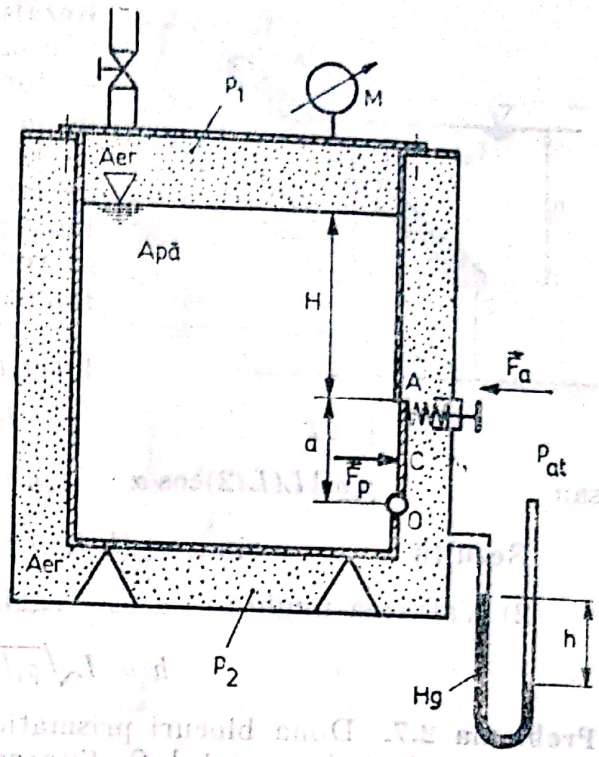


Fig. 2.5.

Rezolvare : Deoarece presiunea în dreapta clapetei este p_2, diferită de presiunea atmosferică, pentru lichidul din vas se determină planul izobar corespunzător presiunii p_2 (planul manometric). Acesta se găsește deasupra suprafeței libere cu înălțimea

$$h_m = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{p_{at} + p_M - (p_{at} - \rho_{Hg} g h)}{\rho g}$$

$$h_m = \frac{p_M + \rho_{Hg} g h}{g} = 4{,}34 \text{ m}.$$

Considerînd suprafața liberă a apei în acest plan, se calculează numai forța de suprapresiune dată de apă, deoarece presiunea p_2 acționează direct asupra feței din dreapta a clapetei și, prin intermediul apei asupra feței din stînga, efectul celor două acțiuni fiind nul. Forța de presiune este

$$F_p = \rho g h_C A = \rho g (h_m + H + a/2) a^2,$$

$$F_p = 1\,000 \cdot 9{,}81 (4{,}34 + 2 + 0{,}5) \cdot 1^2 = 0{,}067 \text{ MN}$$

și acționează în punctul C, de coordonate

$$y_C = y_G + \frac{a^4/12}{y_G a^2} = 6{,}84 + \frac{1/12}{6{,}84} = 6{,}85 \text{ m}.$$

$$\overline{OC} = y_G + a/2 - y_C = 6{,}84 + 0{,}5 - 6{,}85 = 0{,}49 \text{ m}.$$

Din ecuația de momente față de O, rezultă :

$$F_p \overline{OC} - F_a a - 0{,}1 \cdot a F_a = 0 ;$$

$$F_a = \frac{F_p \overline{OC}}{1{,}1a} = \frac{0{,}067 \cdot 0{,}49}{1{,}1} = 0{,}029 \text{ MN}.$$

Problema 2.6. O bară omogenă AB din lemn, cu secțiunea $A = 0{,}05 \times 0{,}05$ m² și lungimea $L = 3$ m, este menținută în apă în poziția indicată în figura 2.6. Cunoscînd densitatea apei $\rho_a = 1\,000$ kg/m³ și densitatea lemnului $\rho_l = 400$ kg/m³, să se calculeze :

1) Unghiul α cînd înălțimea h are valoarea 0,9 m ;

2) Valoarea lui h pentru ca bara să stea în poziție verticală.

Scanned with OKEN Scanner

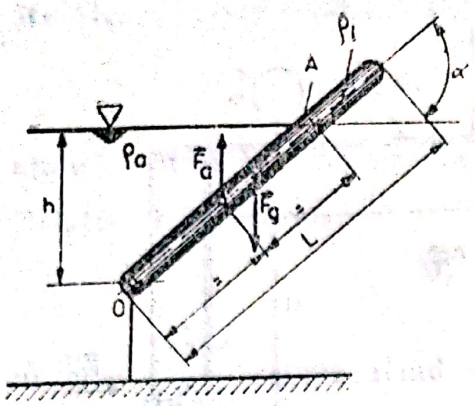


Fig. 2.6.

Rezolvare : Asupra barei acționează următoarele forțe :
— forța de greutate $F_g = \rho_l g \mathcal{V}$, în centrul de masă al barei ;
— forța arhimedică $F_a = \rho_a g \mathcal{V}_l$, în centrul de masă al volumului dezlocuit de corpul imersat.
$\mathcal{V}$ reprezintă volumul barei și $\mathcal{V}_l$ volumul imersat în apă.

1) Relația de echilibru față de articulația O este

$$F_g(L/2)\cos\alpha = F_a(h/2 \sin\alpha)\cos\alpha,$$

sau $$\rho_l g A L(L/2)\cos\alpha = \rho_a g A(h/\sin\alpha)(h/2 \sin\alpha)\cos\alpha.$$

Rezultă $$\sin\alpha = (h/L)\sqrt{\rho_a/\rho_l}, \quad \alpha = 28{,}3°.$$

2) Valoarea unghiului α este egală cu 90°. Se obține

$$h = L\sqrt{\rho_l/\rho_a} = 1{,}9 \text{ m}.$$

Problema 2.7. Două blocuri prismatice din lemn A și B sînt legate la o bară articulată în punctul O. Cunoscînd înălțimea blocurilor $H_A = 2{,}1$ m și $H_B = 1{,}2$ m, ariile secțiunilor acestora $A_A = 0{,}045$ m² și $A_B = 0{,}108$ m², densitatea apei $\rho_a = 1\,000$ kg/m³ și a lemnului $\rho_l = 600$ kg/m³, să se determine distanța cu care se ridică sau coboară blocul B față de poziția indicată în figura 2.7, pentru a se atinge echilibrul hidrostatic.

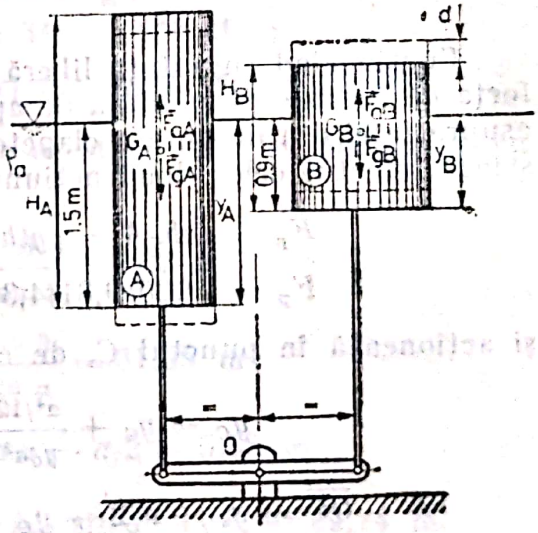


Fig. 2.7.

Rezolvare : Fie y_A și y_B adîncimile cu care sînt imersate corpurile A și B în apă. Forțele care acționează asupra corpurilor sînt forța de greutate $F_g = \rho_l g A H$ și forța arhimedică $F_a = \rho_a g A y$. Ecuația de echilibru este ecuația de momente față de articulație, care se reduce, datorită simetriei, la relația

$$g\rho_l A_A H_A - g\rho_a A_a y_A = g\rho_l A_B H_B - g\rho_a A_B y_B,$$

$$\frac{\rho_l}{\rho_a} = \frac{A_A y_A - A_B y_B}{A_A H_A - A_B H_B}.$$

O a doua relație între y_A și y_B rezultă din figură

$$y_A + y_B = 1{,}5 + 0{,}9 = 2{,}4 \text{ m}.$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații, se obține :

$$y_A = 1{,}556 \text{ m} ; \quad y_B = 0{,}844 \text{ m}.$$

Deci blocul B se va ridica cu distanța $d = 0{,}9 - 0{,}844 = 0{,}056$ m = = 56 mm.

Scanned with OKEN Scanner

Problema 2.8. Golirea unui bazin care conține un lichid cu densitatea $\rho = 880$ kg/m³ se face printr-un orificiu dreptunghiular de lungime $b = 1$ m și înălțime $h = 1{,}2$ m. Orificiul este închis cu o vană de secțiune triunghiulară articulată în punctul A, figura 2.8. Cunoscînd lățimea vanei $l = 0{,}9$ m și masa ei $m = 300$ kg (considerată repartizată uniform), să se determine reacțiunile din articulația A și reazemul B, dacă articulația A este situată la adîncimea $H = 1{,}2$ m față de suprafața liberă a lichidului.

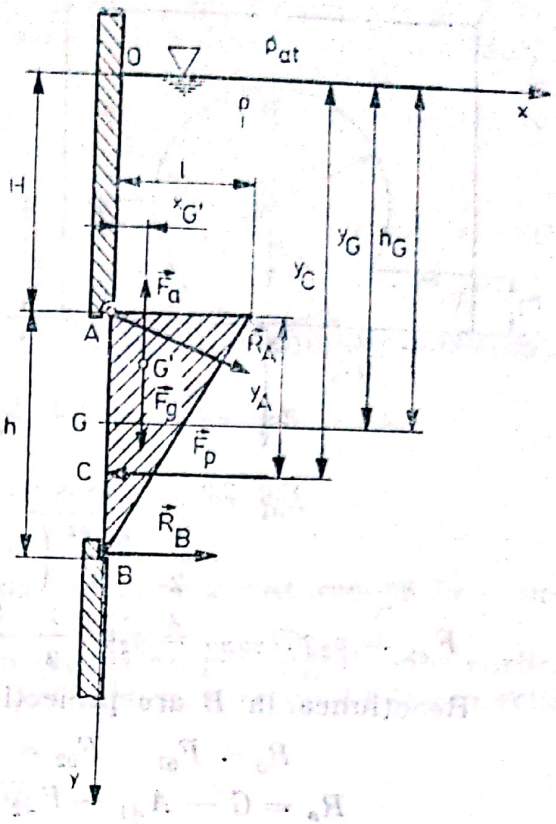


Fig. 2.8.

Rezolvare : Forțele care acționează asupra vanei sînt :

— forța de greutate $F_g = mg$;

— forța arhimedică $F_a = \rho ghl \cdot b/2$;

— forța de presiune pe suprafața AB, $F_p = \rho ghb(H + h/2)$.

Forța de greutate și forța arhimedică acționează în centrul de masă al vanei G', iar forța de presiune în centrul de presiune C al suprafeței AB.

Ecuațiile de echilibru sînt următoarele : $\vec{F}_a + \vec{F}_g + \vec{F}_p + \vec{R}_A + \vec{R}_B = 0$; $F_p y_A + x_{G'}(F_g - F_a) - R_B AB = 0$ (proiecția pe Oz a ecuației de momente față de A), unde $\vec{R}_A$ și $\vec{R}_B$ sînt reacțiunile din A și B.

Cunoscînd $y_A = y_C - H = y_G + \dfrac{bh^3}{12 y_G} - H = 1{,}2 + 0{,}6 + \dfrac{1 \cdot 1{,}2^3}{12 \cdot 1{,}8} - 1{,}2 =$

$$= 0{,}68 \text{ m}$$

și $x_{G'} = 1/3 = 0{,}3$ m,

rezultă

$$R_B = \frac{F_p y_A + x_{G'} \cdot (F_g - F_a)}{AB} = \frac{880 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}8 \cdot 0{,}68 + 0{,}3\left(9{,}81 \cdot 300 - 880 \cdot 9{,}81 \cdot \dfrac{1{,}2 \cdot 0{,}9}{2}\right)}{1{,}2} =$$

$$= 10{,}13 \text{ kN}.$$

Problema 2.9. Două rezervoare, unul cu apă celălalt cu ulei, sînt separate de un cilindru cu diametrul $D = 2{,}5$ m, lungimea $l = 1$ m și articulat în B (fig. 2.9). Să se determine reacțiunea în B și forțele de presiune orizontale și verticale care acționează asupra cilindrului. Se cunosc : densitatea apei $\rho_1 = 1\,000$ kg/m³ ; densitatea uleiului, $\rho_2 = 750$ kg/m², înălțimile lichidelor din rezervoare $h_1 = 0{,}6$m și $h_2 = 1{,}25$ m, greutatea cilindrului $G = 5\,000$ N. Dacă cilindrul este articulat în punctul O, în ce sens va avea tendință de rotație ?

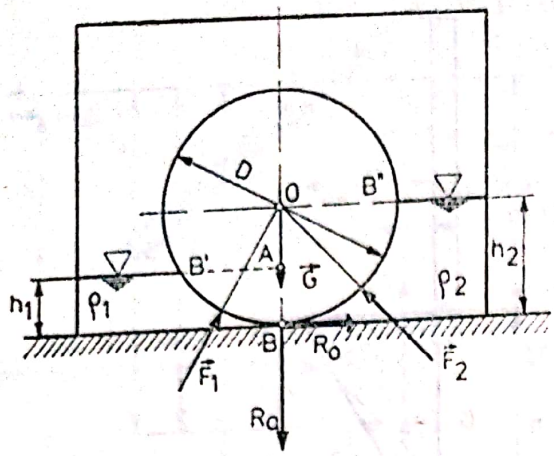


Fig. 2.9.

Rezolvare : Forţele orizontale sînt :

$$F_{01} = \rho_1 g l h_1 (2/3) h_1 =$$

$$= 1\,000 \cdot 9{,}81 \cdot 1 \cdot 0{,}6 (2/3)\, 0{,}6 = 2{,}35 \text{ kN};$$

$$F_{02} = \rho_2 g l h_2 (2/3) h_2 =$$

$$= 750 \cdot 9{,}81 \cdot 1 \cdot 1{,}25 (2/3) 1{,}25 = 7{,}66 \text{ kN}.$$

Forţele verticale (arhimedice) au următoarele valori :

$$F_{A1} = \rho_1 g \mathcal{V}_{BB'A} = \rho_1 g \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi h_1^2}{3} \left(3 \frac{D}{2} - h_1\right) = 1\,000 \cdot 9{,}81 \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2} \frac{\pi 0{,}6^2}{3} \left(3 \cdot \frac{2{,}5}{2} - 0{,}6\right) = 5{,}8 \text{ kN};$$

$$F_{A2} = \rho_2 g \mathcal{V}_{BOB''} = \rho_2 g \cdot \frac{1}{2} \frac{4\pi D^3}{8 \cdot 3} = 750 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{1}{2} \frac{4\pi 2{,}5^3}{8 \cdot 3} = 7{,}5 \text{ kN}.$$

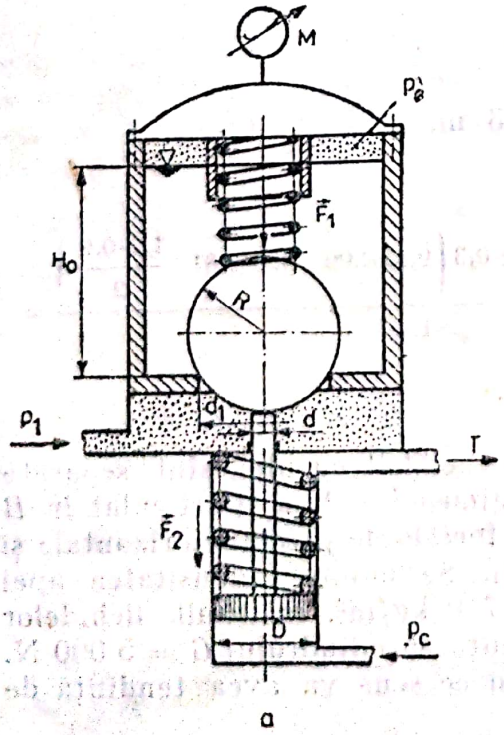
Reacţiunea în B are proiecţiile :

$$R_0 = F_{01} - F_{02} = 2{,}35 - 7{,}66 = -5{,}31 \text{ kN};$$

$$R_a = G - A_{A1} - F_{A2} = 5 - 5{,}8 - 7{,}5 = -8{,}3 \text{ kN}.$$

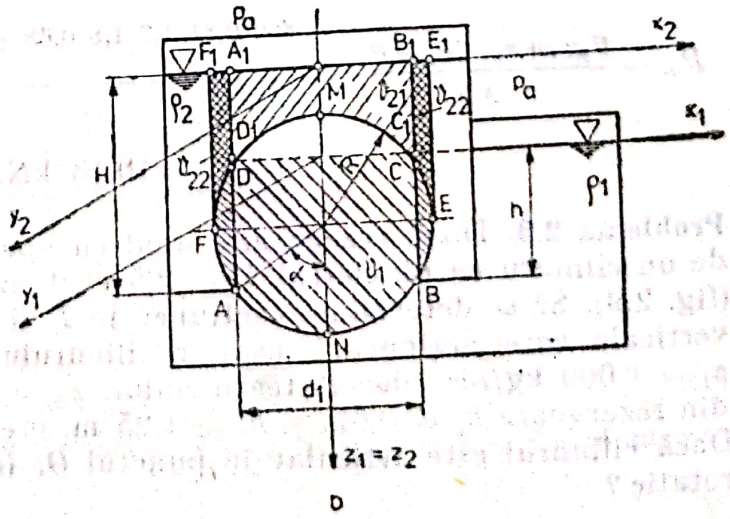
Forţele de presiune sînt normale pe suprafeţele solide cu care vin în contact. Deci rezultatele forţelor de presiune trec prin centrul O al cilindrului ; momentul fiind nul faţă de acest punct, cilindrul nu se va roti (cilindrul fiind un corp simetric şi omogen forţa de greutate trece prin axa de simetrie).

Problema 2.10. În figura 2.10, *a* se prezintă o supapă sferică comandată hidraulic. Să se determine presiunea de comandă p_c de deschidere a supapei,



a

Fig. 2.10



b

cunoscînd : raza sferei $R = 25$ mm ; $d_1 = 20$ mm ; $d = 5$ mm ; $D = 40$ m ; presiunile relative $p_1 = 100$ bar ; $p_r = 95$ bar ; forţele din arcuri $F_1 = 45$ daN ; $F_2 = 30$ daN ; fluidul de lucru este ulei cu $\rho_u = 800$ kg/m³ ; $H_0 = 0{,}2$ m.

Se efectuează calculul aproximativ şi exact. Cînd diferenţa dintre rezultate este semnificativă din punct de vedere tehnic ?

Rezolvare : Din echilibrul forţelor care acţionează asupra sferei rezultă

$$(\pi d_1^2/4)(\rho g H_0 + p_M) + F_1 = (\pi d_1^2/4)\cdot p_1 + (\pi D^2/4)p_C - F_2 - (\pi d^2/4)p_1$$

(s-a considerat contactul pactiform dintre bilă şi tija pistonului de comandă).

Rezultă $$p_C = \frac{\pi(d_1^2/4)\,(\rho g H + p_M - p_1) + F_1 + F_2 + \pi(d^2/4)\,p_1}{\pi D^2/4};$$

$$p_C = \frac{-156{,}58 + 450 + 300 + 196{,}34}{1{,}25\cdot 10^{-3}} = 6{,}31 \text{ bar}.$$

Acest rezultat este aproximativ, deoarece sfera a fost redusă la o suprafaţă plană orizontală. Se consideră figura 2.10, *b*.

Aplicînd teorema acţiunii fluidelor în repaus asupra suprafeţelor curbe, în cazul sferei, rezultă următoarele forţe verticale, pe direcţia *Oz* (pe direcţii *Ox* şi *Oy* forţele sînt nule) :

$$F_{z2} = \rho_2 g \mathcal{V}_{21};$$

$$F_{z2}^A = -\rho_2 g \mathcal{V}_{22};$$

$$F_{z1}^A = -\rho_1 g \mathcal{V}_1,$$

unde $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_{AD1C1BNA}$, $\mathcal{V}_1 = \frac{\pi\left(R - \frac{d_1}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)}{6}\left[3\frac{d_1^2}{4} + \left(R - \frac{d_1}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)^2\right] + \pi\frac{d_1^2}{4}\cdot h$,

$\mathcal{V}_{21} = \mathcal{V}_{FF1E1EMF}$; $\mathcal{V}_{21} = \pi R^2\left(H - \frac{d_1}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right) - \frac{4\pi R^3}{6}$;

$$\mathcal{V}_{22} = \frac{4\pi R^3}{6} + \pi R^2\left(H - \frac{d_1}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right) - \frac{\pi d_1^2}{4}H - \frac{\pi}{6}\left(R - \frac{d_1}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)\cdot \left[3\frac{d_1^2}{4} + \left(R - \frac{d_1}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)^2\right].$$

Se obţine : $H = H_0 + \frac{p_M}{\rho g} = 1210{,}6$ m ; $h = \frac{p_1}{\rho g} = 1274{,}2$ m ; $\sin\alpha = \frac{d_1}{2R}$; $\alpha = 23{,}5°$.

$\mathcal{V}_1 = 0{,}4$ m³ ; $\mathcal{V}_{21} = 2{,}37$ m³, $\mathcal{V}_{22} = 1{,}99$ m³, $\rho_1 = \rho_2 = 800$ kg/m³.

Rezultă $F_z = F_{z2} + F_{z2}^A + F_{z1}^A = \rho g(\mathcal{V}_{21} - \mathcal{V}_{22} - \mathcal{V}_1)$; $F_z = -156{,}96$ N.

Faţă de rezultatul aproximativ $F_z' = -156{,}58$ N, diferenţa este nesemnificativă şi nu justifică, în acest caz, calculul mai riguros.

Diferenţa devine importantă în momentul în care raza sferei R este de acelaşi ordin de mărime cu înălţimile H şi h.

Scanned with OKEN Scanner

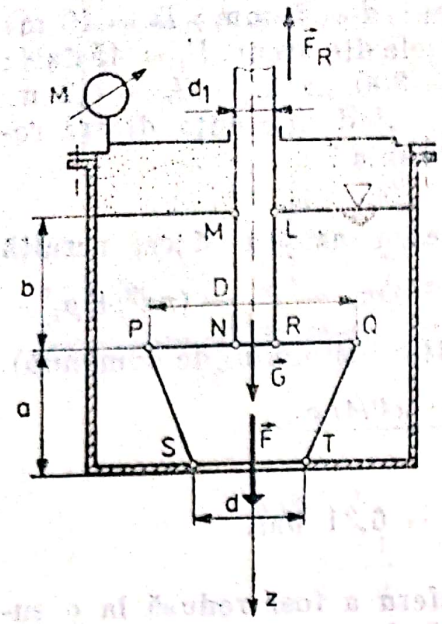


Fig. 2.11.

Problema 2.11. Să se determine forța $\vec{F}_R$ necesară pentru a permite golirea rezervorului din figura 2.11 prin orificiul de diametrul $d=0{,}2$ m. Se cunosc: presiunea relativă indicată de manometrul M, $p_M = 0{,}05$ bar, greutatea $G=1\,500$ N, $a=0{,}3$ m, $b=0{,}5$ m, $d_1=0{,}10$ m, $D = 0{,}45$ m, densitatea lichidului $\rho = 1\,000$ kg/m³.

Rezolvare: Forțele hidrostatice care acționează asupra volumului imersat $\mathcal{V}_{MNPSTQRLM}$ sînt următoarele:

$$F_z = \rho g(b + h_M)\pi(D^2 - d_1^2)/4;$$

$$F_z^A = -\rho g\left[\frac{\pi D^2}{4}(b + h_M) + \frac{\pi a}{12}(D^2 + dD + d^2) - \frac{\pi d^2}{4}(a + b + h_M)\right],$$

unde $h_M = \dfrac{p_M}{\rho g} = 0{,}50$ m.

Se obține $F = F_z = F_z^A = 1\,483{,}16 - 1\,415{,}74 = 67{,}5$ N.

La acest rezultat se ajunge folosind și așa-numita metodă a închiderii care constă în a considera întreaga suprafață laterală a corpului imersată în lichid, deci asupra corpului nu acționează decît forța arhimedică din care se scade forța introdusă prin închiderea suprafeței udate. (În acest caz se consideră udată și suprafața ST).

Rezultă: $$F_A = -\rho g\left(\frac{\pi a}{12}(D^2 + dD + d^2) + (b + h_M)\frac{\pi d_1^2}{4}\right) = -333{,}087 \text{ N};$$

$$F_{ST} = \rho g(a + b + h_M)\pi d^2/4 = 400{,}64 \text{ N};$$

deci $F = F_A + F_{ST} = 67{,}5$ N.

Forța necesară deschiderii rezervorului este $F_R = F + G = 67{,}5 + 150 = 217{,}5$ N.

Problema 2.12. O clapetă simetrică formată din două sferturi de cilindru cu raza $R = 1$ m și lățimea $b = 5$ m este articulată în punctul A situat la adîncimea $H = 2$ m de suprafața liberă ca în figura 2.12. Să se determine momentul de frecare din articulație, necesar menținerii clapetei închise (în rezervor se află apă cu densitatea $\rho = 1\,000$ kg/m³).

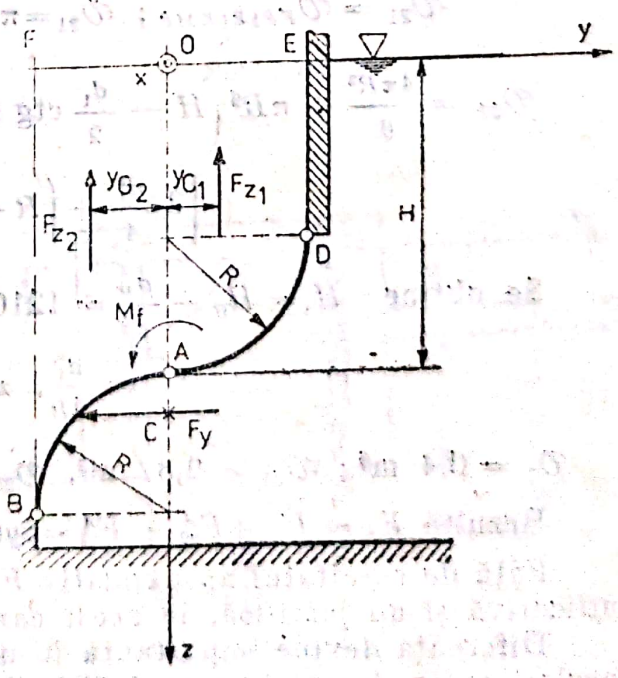


Fig. 2.12.

Rezolvare : Alegînd sistemul de axe ca în figură (cu planul xOy pe suprafaţa liberă a fluidului), rezultă că acţiunea asupra clapetei se reduce la două forţe : F_y şi F_z, forţa F_x fiind nulă, deoarece proiecţia suprafeţei curbe a clapetei pe planul yOz are aria nulă.

$$F_y = \rho g H 2Rb = 9\,810 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 = 0{,}19 \quad \text{MN}.$$

Forţa F_y va acţiona în centrul de presiune al proiecţiei suprafeţei pe planul xOy, care este un dreptunghi de înălţime $2R$ şi lăţime b.

$$z_C = z_G + \frac{b(2R)^3/12}{b2Rz_G} = 2 + \frac{(2 \cdot 1)^3/12}{2} = 2{,}16 \text{ m}.$$

Deci braţul forţei F_y faţă de articulaţia A este

$$OC = z_C - H = 0{,}16 \text{ m}.$$

Pe direcţia Oz vor acţiona două forţe corespunzătoare volumelor de lichid cuprinse între suprafeţele AD, AB şi suprafaţa liberă EF :

$$F_{z1} = \rho g \mathcal{V}_{ADEO} \; ; \; F_{z2} = \rho g \mathcal{V}_{AOFB},$$

Poziţiile centrelor de greutate ale volumelor respective se stabilesc folosind formula

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_i \mathcal{V}_i y_{Gi}}{\sum_{i=1}^{n} \rho_i \mathcal{V}_i}.$$

Rezultă : $y_{G1} = \dfrac{(H - R)R \cdot R/2 + (\pi R^2/4)(4R/3\pi)}{(H - R)R + \pi R^2/4} = \dfrac{0{,}83}{1{,}78} = 0{,}46 \text{ m}$;

$$y_{G2} = \frac{(H + R) \cdot R \cdot R/2 - (\pi R^2/4) \cdot (4R/3\pi)}{(H + R) \cdot R - \pi R^2/4} = \frac{1{,}16}{2{,}21} = 0{,}52 \text{ m}.$$

Forţele au valorile : $F_{z1} = 1\,000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}83 \cdot 5 = 0{,}04$ MN ; $F_{z2} =$ $= 1\,000 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}16 \cdot 5 = 0{,}056$ MN.

Momentul de frecare din articulaţie are valoarea

$M_f = F_y \cdot \overline{AC} + F_{z2} \cdot y_{G2} - F_{z1} \cdot y_{G1}$; $M_f = 0{,}19 \cdot 0{,}16 + 0{,}056 \cdot 0{,}52 - 0{,}04 \cdot$ $\cdot 0{,}46 = 0{,}041$ MNm.

Problema 2.13. Într-un rezervor sferic se găseşte un volum de fluid $\mathcal{V} = 10$ m³ la presiunea $p = 200$ bar. Să se dimensioneze grosimea peretelui rezervorului δ_S la presiunea indicată şi să se calculeze rapoartele dintre efortul maxim rezultat din peretele rezervorului sferic şi din pereţii rezervoarelor cilindric şi conic de volum echivalent. Calculul se face considerînd diametrul cilindrului şi diametrul de bază al conului egale cu valoarea diametrului sferei.

Rezolvare : Eforturile din peretele unui rezervor în care se află presiunea interioară p sînt date de ecuaţia lui Laplace

$$\sigma_1/r_1 + \sigma_2/r_2 = p/\delta \qquad (2.13.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

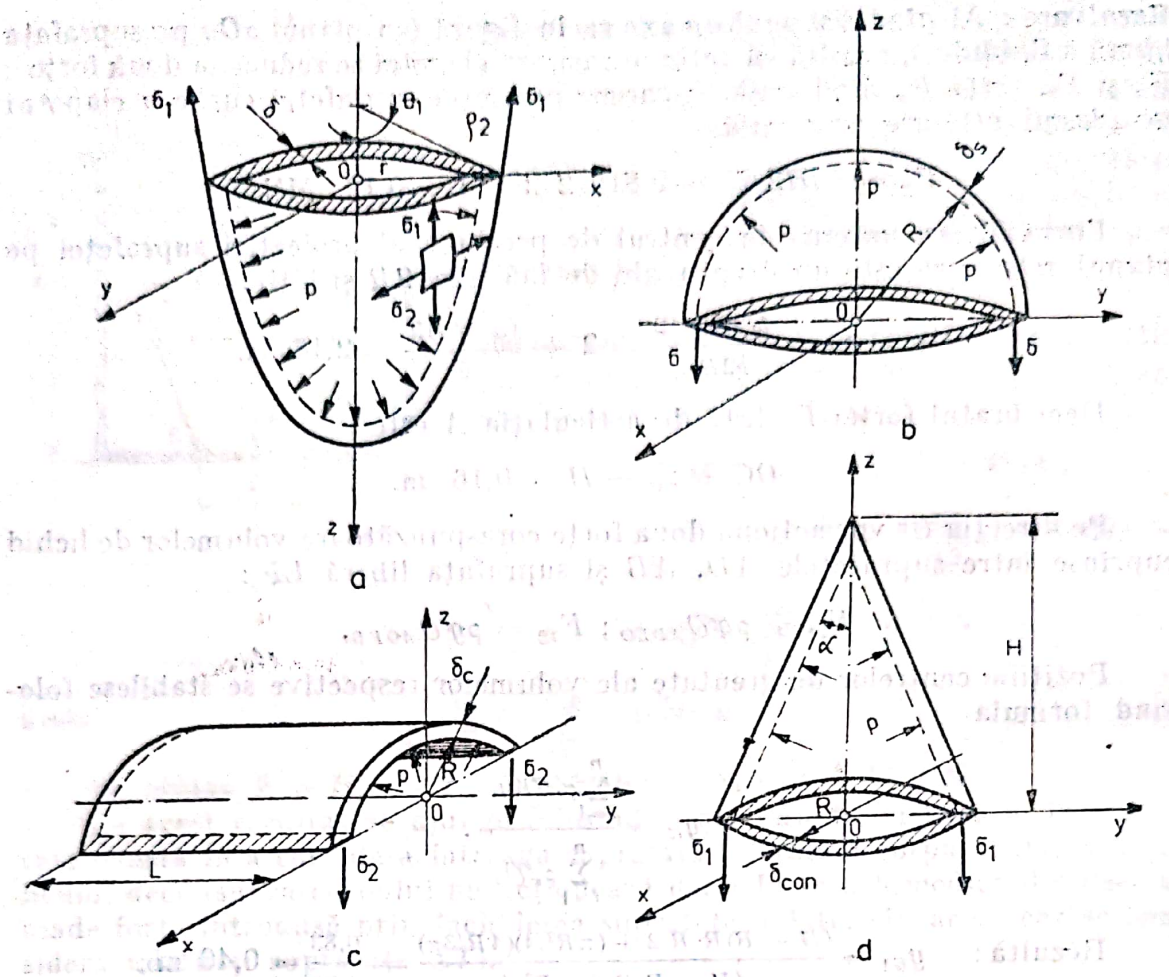


Fig. 2.13.

unde r_1 și r_2 sînt razele de curbură ale suprafeței (fig. 2.13, *a*). Proiecțiile algebrice ale suprafeței pe planele yOz și xOz fiind nule, rezultă $F_x = F_y = 0$. Pe planul yOx, proiecția suprafeței curbe are aria $A = \pi r^2$, forța de presiune $F_z = p\pi r^2$ fiind echilibrată de efortul σ_1 din material

$$2\pi r \delta \sigma_1 \sin \theta_1 = \pi r^2 p, \tag{2.13.2}$$

deci $$\sigma_1 = \frac{pr}{2\delta \sin \theta_1} = \frac{pr_2}{2\delta}.$$

În cazul celor trei recipiente supuse la presiunea interioară p, rezultă următoarele relații de calcul :

a) rezervor sferic (fig. 2.13, *b*) $r_1 = r_2 = \frac{D}{2}$, $\sigma = \frac{pD}{4\delta_s}$;

b) rezervor cilindric (fig. 2.13, *c*) $r_1 \to \infty$, $\rho_2 = \frac{D}{2}$, $\sigma_1 = \frac{pD}{4\delta_c}$, $\sigma_2 = \frac{pD}{2\delta_c}$;

c) rezervor conic (fig. 2.13, *d*) $r_1 \to \infty$, $\rho_2 = \frac{H \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$, $\sigma_1 = \frac{pH \operatorname{tg} \alpha}{2\delta_{con} \cos \alpha}$,

$$\sigma_2 = \frac{pH \operatorname{tg} \alpha}{\delta_{con} \cos \alpha}.$$

Din formule rezultă că eforturile σ_2 sînt cele cu care se face dimensionarea recipientelor.

Raza sferei are valoarea $R = \sqrt[3]{\frac{3\mathcal{V}}{4\pi}} = 1{,}33$ m.

Se obține $\delta_S = \frac{pD}{4\sigma_a} = \frac{13{,}3 \cdot 10^6}{\sigma}$ m ;

$$\delta_C = \frac{pD}{2\sigma} = \frac{26{,}6 \cdot 10^6}{\sigma} \text{ m} ;$$

$$\delta_{con} = \frac{pH \operatorname{tg} \alpha}{\sigma \cos \alpha} = \frac{200 \cdot 10^5 \cdot 5{,}39 \cdot \operatorname{tg} 14^\circ}{\sigma \cos 14^\circ} = \frac{26{,}6 \cdot 10^6}{\sigma} \text{ m}.$$

Deci $\sigma_S = 0{,}5\sigma_C = 0{,}5\sigma_{con}$, la aceeași grosime a peretelui.

Problema 2.14. În figura 2.14, *a* se prezintă un recipient deschis la presiunea atmosferică format dintr-un cilindru cu diametrul $d = 1{,}8$ m și înălțimea $H = 4$ m asamblat cu o calotă semisferică de rază r. Să se determine mărimea razei r, astfel încît să existe relația $F_3 = 2F_1$, în care F_1 și F_3 sînt forțele care solicită șuruburile *1* și *3*.

Recipientul închis din figura 2.14, *b* este prevăzut la partea inferioară cu o semisferă de rază $R = 2$ m, iar la partea superioară cu un con. Cunoscînd înălțimile $H_1 = 8$ m și $H_2 = 1{,}5$ m, presiunea $p_M = 1{,}5$ bar, să se calculeze forțele pentru dimensionarea șuruburilor *1* și *2*.

În ambele rezervoare lichidul are densitatea $\rho = 1\,200$ kg/m³ (se neglijează greutatea recipientelor).

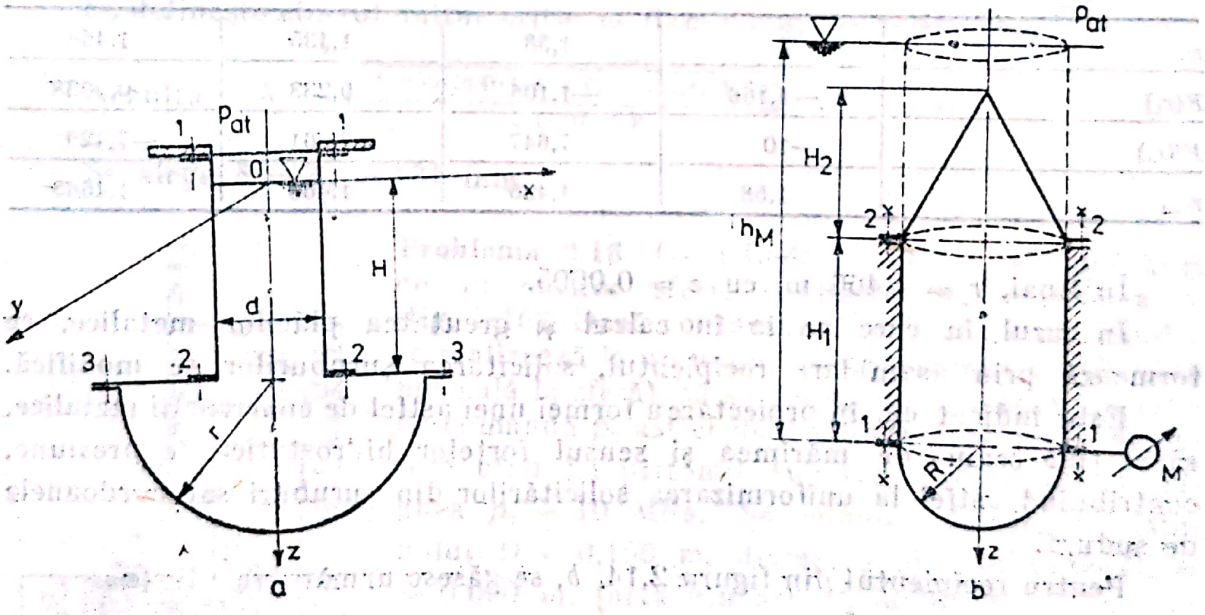


Fig. 2.14.

Rezolvare : În cazul primului recipient, forțele hidrostatice care acționează asupra șuruburilor au următoarele expresii :

$F_1 = \rho g(4\pi r^3/6 + \pi d^2 H/4)$, forța de greutate a întregului lichid ;

$F_3 = \rho g(\pi r^2 H + 4\pi r^3/6)$, forța de presiune care acționează pe suprafața semisferei egală cu greutatea volumului cuprins între semisferă și planul suprafeței libere xOy.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că şuruburile *3* sînt mai solicitate decît şuruburile *1*, diferenţa fiind forţa de presiune ascensională, care acţionează pe suprafaţa cuprinsă între razele r şi $d/2$.

De menţionat că şuruburile *2* sînt solicitate cu aceeaşi forţă ca şi şuruburile *1*.

Punînd condiţia $F_3 = 2F_1$, va rezulta valoarea corespunzătoare pentru raza r, Deci :

$$F(r) = \frac{2}{3} r^3 - Hr^2 + \frac{Hd^2}{2} = 0, \quad F'(r) = 2r^2 - 2Hr.$$

Înlocuind numeric $F(r) = \frac{2}{3} r^3 - 4r^2 + 6{,}5 = 0, \quad F'(r) = 2r^2 - 8r.$

Ecuaţia de gradul trei se rezolvă prin metoda Newton-Raphson. Condiţiile de convergenţă rapidă ale metodei sînt următoarele :

1) derivata să nu se anuleze în apropierea rădăcinii ;

2) valoarea iniţială de începere a iteraţiei să fie suficient de apropiată de rădăcina ecuaţiei ;

3) să nu existe două rădăcini apropiate ale ecuaţiei.

Deci $$r_{i+1} = r_i - \frac{F(r_i)}{F'(r_i)}, \text{ cu } | r_{i+1} - r_i | < \varepsilon.$$

Considerînd valoare iniţială $r_1 = 2$ m, printr-un calcul numeric simplu, se obţine :

r_i	2	1,58	1,435	1,466
$F(r_i)$	—4,166	—1,106	0,233	0,0038
$F'(r_i)$	—10	—7,647	—7,361	—7,429
r_{i+1}	1,58	1,435	1,466	1,4665

În final, $r = 1{,}466$ m, cu $\varepsilon = 0{,}0005$.

În cazul în care se ia în calcul şi greutatea plăcilor metalice, ce formează prin asamblare recipientul, solicitarea şuruburilor se modifică.

Este indicat ca, în proiectarea formei unei astfel de construcţii metalice, să se ţină seama de mărimea şi sensul forţelor hidrostatice de presiune, contribuind astfel la uniformizarea solicitărilor din şuruburi sau cordoanele de sudură.

Pentru recipientul din figura 2.14, *b*, se găsesc următoarele forţe :

$$F_1 = \rho g(4\pi R^3/6 + \pi R^2 h_M) = 1\,200 \cdot 9{,}81(4\pi 2^3/6 + \pi 2^2 \cdot 12{,}74) =$$

$$= 2\,081{,}8 \text{ kN}.$$

unde $$h_M = \frac{p_M}{\rho g} = \frac{1{,}5 \cdot 10^5}{1\,200 \cdot 9{,}81} = 12{,}74 \text{ m}.$$

$$F_2 = -\rho g \pi R^2 (h_M - H_1 - H_2/3) = -1\,200 \cdot 9{,}81(12{,}74 - 8 - 1{,}5/3) =$$

$$= -49{,}9 \text{ kN}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Semnul minus indică sensul opus de acțiune al forței F_2 față de sensul pozitiv al axei *Oz*. Expresia $\pi R^2(h_M - H_1 - H_2/3)$ reprezintă volumul cuprins între suprafața curbă udată și suprafața liberă ce s-ar găsi la înălțimea h_M față de zona *1*.

Problema 2.15. Să se dimensioneze recipientul cilindric din figura 2.15, admițind o diferență între presiunea interioară p_1 și presiunea exterioară p_2, $\Delta p = p_1 - p_2 = \pm 150$ bar. Se cunosc: diametrul $D = 3{,}5$ m, lungimea $L = 15$ m, efortul admisibil $\sigma_a = 200$ N/mm², coeficientul de flambaj $\varphi = \sigma_{af}/\sigma_a = 0{,}555$, modulul de elasticitate $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm², coeficientul lui Poisson $\nu = 0{,}3$.

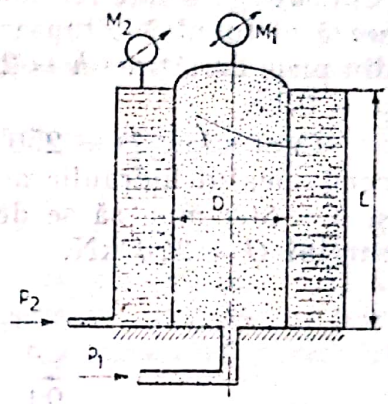


Fig. 2.15.

Rezolvare: Se deosebesc două cazuri în care se face dimensionarea recipientului cilindric:

a) $\Delta p = 150$ bar. În acest caz, pentru dimensionare, se folosește formula

$$\delta_c = \frac{\Delta p D}{2\sigma_a} = \frac{150 \cdot 10^5 \cdot 3{,}5}{2 \cdot 200 \cdot 10^6} = 131 \text{ mm}.$$

b) $\Delta p = -150$ bar. În acest caz, dimensionarea se face la flambaj. Presiunea de flambaj pentru un tub cilindric supus la presiunea exterioară este

$$p_f = \frac{E\delta^3}{4(1-\nu^2)R^3}. \quad *)$$

Se definește efortul unitar critic la flambaj $\sigma_{af} = \dfrac{E\delta^2}{4(1-\nu^2)R^2}$ *).

Rezultă $\delta_f = \sqrt{\dfrac{0{,}555 \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot (1 - 0{,}3^2) \cdot 1{,}75^2}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 10^6}} = 76$ mm.

Se alege $\delta = \delta_c = 131$ mm.

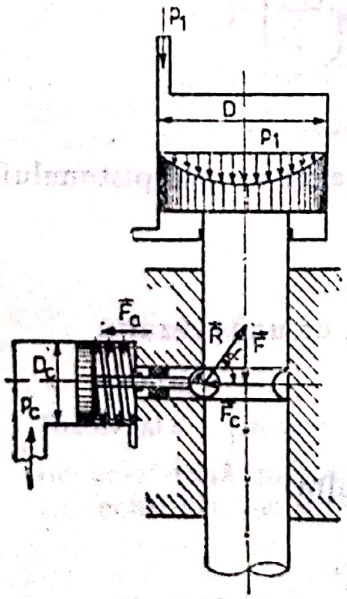


Fig. 2.16.

Problema 2.16. Un cilindru vertical este prevăzut cu un opritor sferic comandat de presiunea p_c (fig. 2.16). Dacă contactul dintre sferă și cilindru se realizează la un unghi $\alpha = 45°$ (reacțiunea R fiind normală la sferă), să se determine valoarea presiunii de comandă p_c astfel încît cilindrul să nu se deplaseze cînd pe pistonul superior acționează presiunea $p_1 = 10$ MPa. Se cunosc: diametrul pistonului $D = 0{,}150$ m, diametrul de comandă $D_c = 0{,}090$ m, forța din arc $F_a = 300$ N.

Rezolvare: Forța de comandă F_c se calculează cu relația

$$F_c = F \operatorname{ctg} \alpha = (p_1 \pi D^2/4) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Se obține $F_c = 10 \cdot 10^6 (\pi \cdot 0{,}15^2/4) \operatorname{ctg} 45° = 176{,}7$ kN.

---

* Gh. Buzdugan. Rezistența materialelor. București, Editura Tehnică, 1972.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţia de echilibru pe direcţia pistonului de comandă este

$$p_c \pi D_c^2/4 = F_c + F_a.$$

Rezultă $$p_c = \frac{(176{,}7 \cdot 10^3 + 300)4}{\pi 0{,}09^2} = 27{,}8 \text{ MPa}.$$

Problema 2.17. Un cric hidraulic este format dintr-o pompă *1* în care se deplasează un piston plonjor *2*, acţionat manual cu pîrghia *3*. Rezervorul de ulei se găseşte în jurul pompei, ca în figura 2.17. Uleiul aspirat din rezervor prin supapa *4* este refulat în cilindrul *5*, prin intermediul supapei *6*, şi deplasează pistonul *7*. Etanşarea acestuia este realizată cu ajutorul unei garnituri din piele de lăţime $h = 20$ mm, în care se realizează un coeficient de frecare $\mu = 0{,}15$.

Cunoscînd $D = 250$ mm, $d = 20$ mm, randamentul pompei $\eta_P = 0{,}7$, randamentul hidraulic al cricului $\eta_C = 0{,}89$ şi braţele pîrghiei $a = 100$ mm şi $b = 800$ mm, să se determine efortul T la pîrghie pentru ridicarea unei sarcini $Q = 200$ kN.

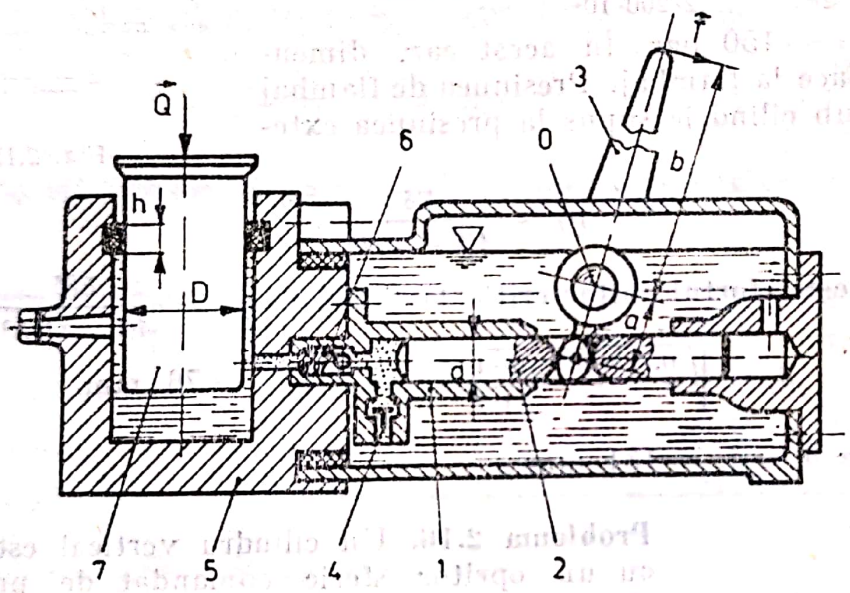


Fig. 2.17.

Rezolvare : Ecuaţia de echilibru a forţelor care acţionează asupra pistonului cricului este

$$p(\pi D^2/4)\eta_c = Q + F_f,$$

în care $F_f = \pi Dhp\mu$ este forţa de frecare în garnitură, de unde rezultă

$$p = \frac{Q}{\pi D^2 \eta_c/4 - \pi Dh\mu}.$$

Forţa cu care este acţionat pistonul pompei rezultă

$$F = \frac{1}{\eta_p} p \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^2 Q}{\eta_p(\pi D^2 \eta_c - 4\pi Dh\mu)},$$

adică $$F = \frac{d^2 Q}{\eta_p(D^2 \eta_c - 4Dh\mu)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din ecuația de momente în jurul articulației O, rezultă

$$T = F\frac{a}{b} = Q\frac{a}{b}\frac{d^2}{\eta_p(D^2\eta_c - 4Dh\mu)} = 0{,}00136\ Q,$$

$$T = 271{,}5\ \text{N}.$$

Se observă că a/b este coeficientul de reducere a forței dat de pîrghie (mecanic), iar $d^2/\eta_p(D^2\eta_c - 4Dh\mu)$ este coeficientul hidraulic de reducere a forței, fiind determinat în funcționarea cricului.

Se remarcă, de asemenea, că efectul frecării este mult mai important la pistonul mic decît la cel mare, forța de frecare fiind proporțională cu diametrul, iar cea de presiune cu pătratul acesteia. Din acest motiv, pistonul mic este fără garnituri de etanșare (plonjor), în timp ce pistonul mare are garnitură de etanșare din piele.

Obs. Atît cricul hidraulic prezentat, cît și presa hidrostatică, sînt aplicații practice la principiul lui Pascal*.

Problema 2.18. Supapa de siguranță a unui rezervor tampon este alcătuită dintr-un piston diferențial cu diametrele $D = 25$ mm, $d = 18$ mm, tija de legătură are diametrul $\delta = 3$ mm (fig. 2.18), iar constanta resortului de echilibru este $c = 15 \cdot 10^3$ N/m. Supapa trebuie să se deschidă cînd presiunea în rezervor atinge valoarea $p = 2$ MPa.

Să se determine săgeata inițială care trebuie dată resortului, astfel încît să se asigure protecția, dacă:

1) se neglijează grosimea tijei de legătură;

2) se ține seama de grosimea tijei.

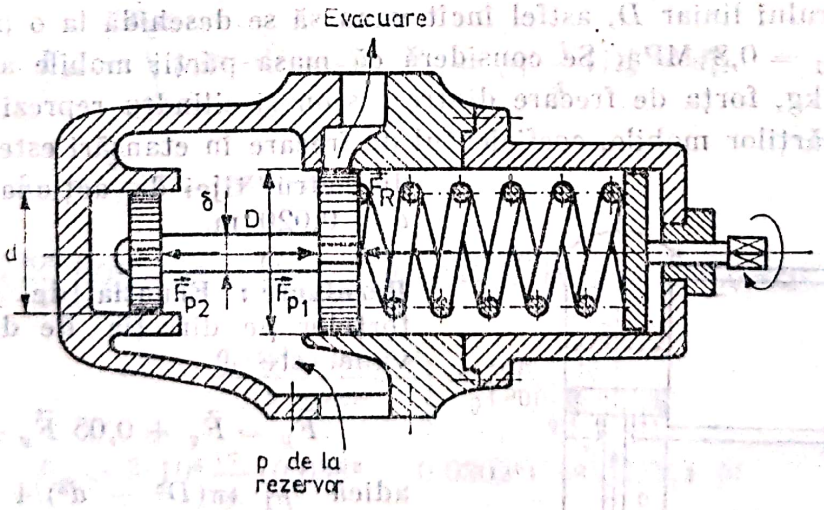


Fig. 2.18.

Rezolvare: Asupra pistonului diferențial acționează forțele de presiune pe cele două pistoane $\vec{F}_{p1}$ și $\vec{F}_{p2}$, respectiv forța elastică a resortului $\vec{F}_R$. La echilibru se scrie

$$\vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} + \vec{F}_R = 0.$$

* Dan Gh. Ionescu ș.a. Mecanica fluidelor și mașini hidraulice, București. Editura Didactică și Pedagogică, 1983.

Proiectînd această relaţie pe axa de simetrie a pistonului, rezultă

$$F_{p1} - F_{p2} - F_R = 0,$$

adică $$p\frac{\pi}{4}(D^2 - \delta^2) - p\frac{\pi}{4}(d^2 - \delta^2) - F_R = 0.$$

1) Dacă se neglijează grosimea tijei ($\delta = 0$), se obţine :

$$p\,\pi D^2/4 - p\pi d^2/4 = F_R$$

Deci $F_R = p\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 2\cdot 10^6 \frac{\pi}{4}(0{,}025^2 - 0{,}018^2) = 472{,}6$ N.

Acestei forţe îi corespunde o pretensionare

$$\Delta l = \frac{F_R}{c} = \frac{472{,}6}{15\cdot 10^3} = 0{,}0315 \text{ m}.$$

2) Ţinînd seama de grosimea tijei, se obţine

$$F_R = p\frac{\pi}{4}[(D^2 - \delta^2) - (d^2 - \delta^2)] = p\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2),$$

deci $F_R = 472{,}6$ N şi $\Delta l = 0{,}0315$ m.

Se observă că rezultatele coincid în cele două cazuri. Grosimea tijei nu influenţează forţa rezultantă în cazul pistoanelor diferenţiale.

Problema 2.19. O conductă cu diametrul $D = 1\,500$ mm este prevăzută cu o vană cu acţionare hidraulică (fig. 2.19). Să se determine diametrul pistonului motorului liniar D, astfel încît vana să se deschidă la o presiune din conductă $p_1 = 0{,}8$ MPa. Se consideră că masa părţii mobile a vanei este $m = 1\,600$ kg, forţa de frecare dintre piston şi cilindru reprezintă 5% din greutatea părţilor mobile, coeficientul de frecare în etanşări este $f = 0{,}15$ şi diametrul tijei de acţionare a vanei $d = 0{,}020$ m.

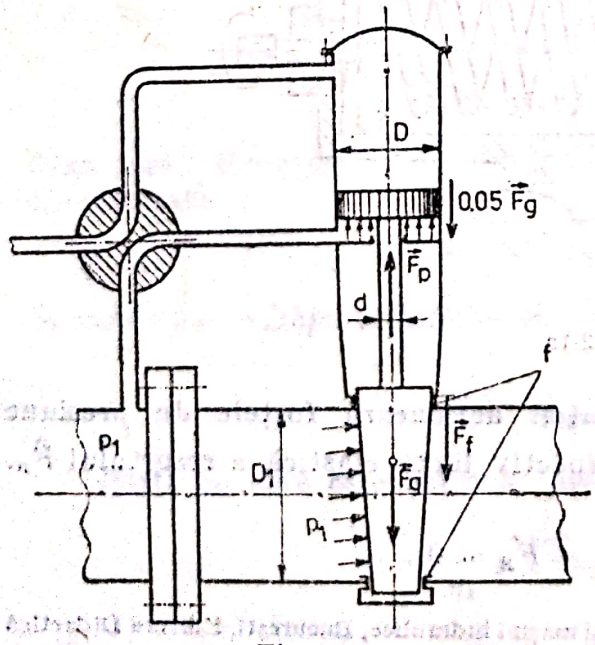


Fig. 2.19.

Rezolvare : Ecuaţia de echilibru a forţelor pe direcţia de deplasare a vanei este

$$\vec{F}_p = \vec{F}_g + 0{,}05\,\vec{F}_g + \vec{F}_f,$$

adică $p_1\ \pi(D^2 - d^2)/4 = mg(1 + 0{,}05) + fp_1\cdot\pi D_1^2/4.$

Rezultă :

$$D = \sqrt{\frac{1{,}05mg4}{\pi p_1} + d^2 + fD_1^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1{,}05\cdot 1600\cdot 9{,}81\cdot 4}{\pi 0{,}8\cdot 10^6} + 0{,}02^2 + 0{,}15\cdot 1{,}5^2} \cong$$

$$\cong 0{,}600 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Problema 2.20. Etanşarea frontală prezentată în figura 2.20, *a* este încercată la presiunea statică relativă $p_1 = 3$ MPa. Dacă se consideră o variaţie parabolică a presiunii în interstiţiul dintre inelul mobil *2* şi inelul fix *1* (fig. 2.20, *b*), să se determine forţa din arc F_a, astfel încît etanşarea să rămînă închisă. Se cunosc : diametrele interioare şi exterioare ale inelului mobil, $d_1 = 30{,}2$ mm; $D_1 = 45$ mm şi diametrul $D_0 = 38$ mm.

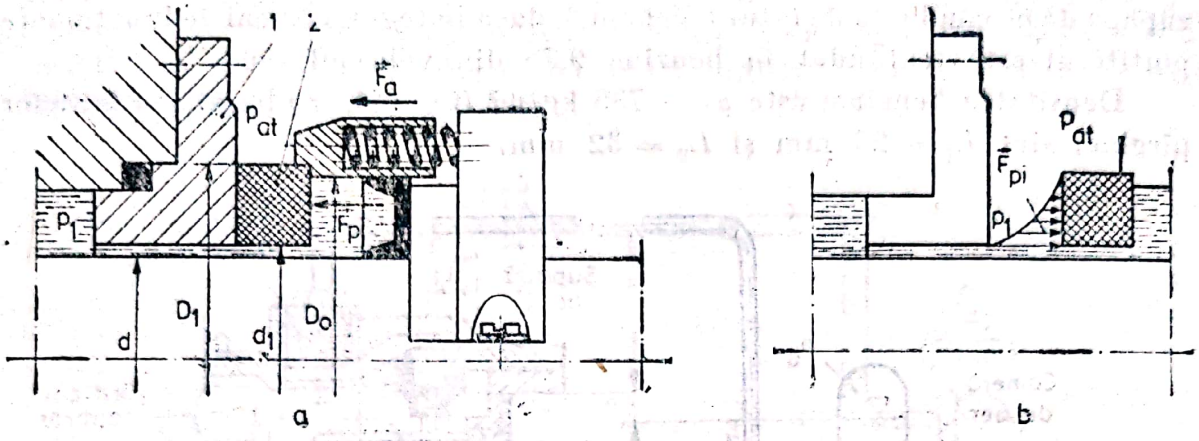


Fig. 2.20.

Rezolvare : Forţa axială F de închidere a etanşării (în cazul static) are expresia

$$\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_a - \vec{F}_{pi}.$$

La limită, $F = 0$ şi $\vec{F}_a = \vec{F}_{pi} - \vec{F}_p$, dar

$$F_{pi} = \int_{d_1/2}^{D_1/2} p_i 2\pi r dr \quad \text{şi} \quad F_p = p_1 \frac{\pi}{4}(D_0^2 - d_1^2).$$

Cu $p_i = p_1 - \frac{4p_1}{D_1^2} r^2$, rezultă

$$F_{pi} = \frac{\pi p_1}{4}\left(D_1^2 - d_1^2 - \frac{(D_1^4 - d_1^4)}{2D_1^2}\right) = \frac{\pi 3 \cdot 10^6}{4}\left(0{,}045^2 - 0{,}0302^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{0{,}045^4 - 0{,}0302^4}{2 \cdot 0{,}045^2}\right) = 720{,}6 \text{ N};$$

$$F_p = 3 \cdot 10^6 \frac{\pi}{4}(0{,}038^2 - 0{,}0302^2) = 1\,253{,}4 \text{ N}.$$

Rezultă $F_a = 720{,}6 - 1\,253{,}4 = -532{,}8$ N, deci etanşarea în regim static este închisă fără contribuţia forţei din arcuri.

Problema 2.21. Schema de alimentare a unui motor cu ardere internă este prezentată în figura 2.21 şi cuprinde o pompă de benzină, cu membrană acţionată de arborele motorului printr-o camă. Pompa refulează benzina printr-o conductă spre carburator. Reglarea nivelului în camera de nivel constant a carburatorului se realizează cu ajutorul plutitorului, al pîrghiei şi acului obturator.

Pentru ameliorarea pulsațiilor, pompa este prevăzută cu o cameră pneumatică. Cunoscînd diferența de nivel între nivelul benzinei în camera pneumatică și orificiul calibrat al carburatorului $h = 345$ mm, masa plutitorului $m_1 = 15$ g, masa acului obturator $m_2 = 0{,}85$ g, volumul plutitorului $\mathcal{V} = 35$ ml, iar suprafața orificiului calibrat închis de ac este $A = 2{,}54$ mm², se cere să se determine presiunea în camera pneumatică, la care se reglează supapa de pe conducta de retur a benzinei, dacă în regim normal de funcționare plutitorul este scufundat în benzină 0,75 din volumul său.

Densitatea benzinei este $\rho_b = 735$ kg/m³ (CO 90), iar lungimea brațelor pîrghiei sînt $L_1 = 23$ mm și $L_2 = 32$ mm.

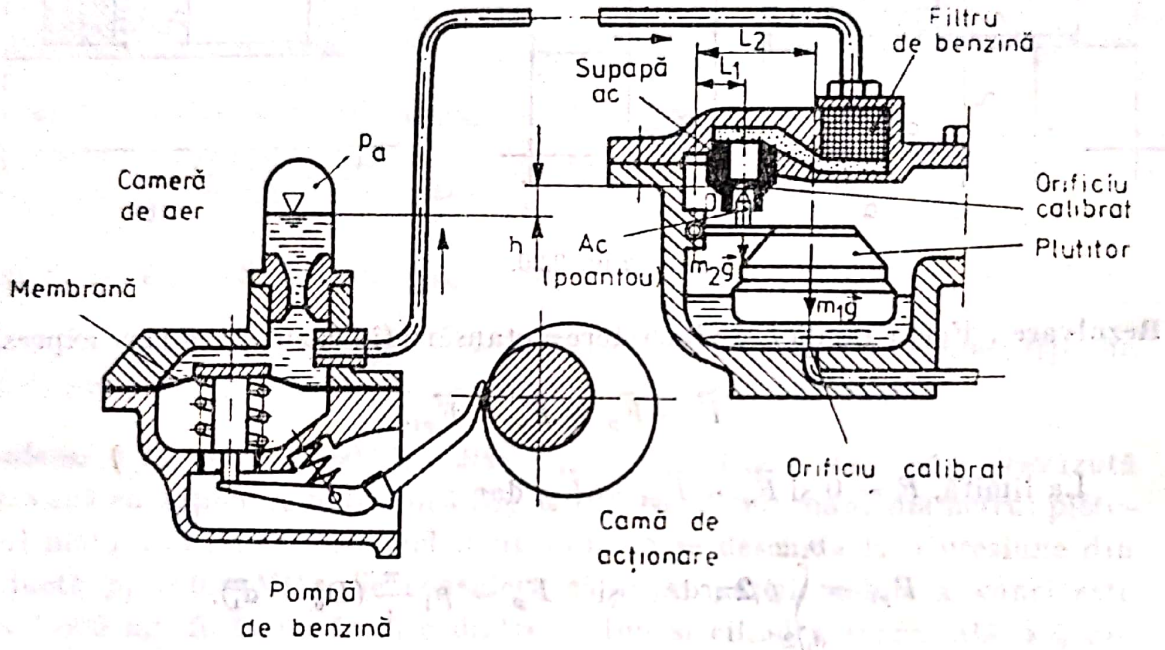


Fig. 2.21.

Rezolvarea : Portanța hidrostatică a plutitorului este $F_A = 0{,}75\rho_b g\mathcal{V}$, în care ρ_b este densitatea benzinei, iar $0{,}75\,\mathcal{V}$ este volumul scufundat al plutitorului. Ecuația de momente față de articulația O a pîrghiei se scrie:

$$m_1 g L_2 + m_2 g L_1 + p_1 A L_1 = F_A L_2,$$

în care p_1 este presiunea benzinei la nivelul orificiului calibrat închis de ac. De unde rezultă presiunea p_1

$$p_1 = \frac{0{,}75\rho_b g\mathcal{V} L_2 - m_1 g L_2 - m_2 g L_1}{A L_1}.$$

Presiunea p din camera pneumatică este

$$p = p_1 + \rho_b g h = \frac{(0{,}75 \cdot 735 \cdot 9{,}81 \cdot 35 \cdot 10^{-6} - 0{,}015 \cdot 9{,}81)0{,}032 - 0{,}85 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}023}{2{,}54 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}023} +$$

$$+ 735 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}345 = 22\,277 \text{ Pa}.$$

Deci suprapresiunea în camera pneumatică este maxim $p = 22{,}277$ kPa.

Scanned with OKEN Scanner

Problema 2.22. Pentru menținerea presiunii constante p_c, în incinta C, se folosește presostatul din figura 2.22. Principiul de funcționare este următorul : în incinta C presiunea acționează asupra membranei M care este legată de supapa S prin intermediul tijei t. Cînd presiunea p_c scade, forța F_{a1} din arcul A_1, deschide supapa S, permițînd fluidului de alimentare aflat la presiunea constantă p_a să treacă în incinta C, astfel încît, în momentul atingerii presiunii p_c, supapa S se închide automat. Să se calculeze mărimea forței F_{a1} cînd se cunosc următoarele date : $p_c = 0{,}2$ MPa, $p_a = 0{,}21$ MPa, $D = 0{,}150$ m, $d = 0{,}025$ m, $F_{a2} = 800$ N (se neglijează forța elastică datorită deformării membranei).

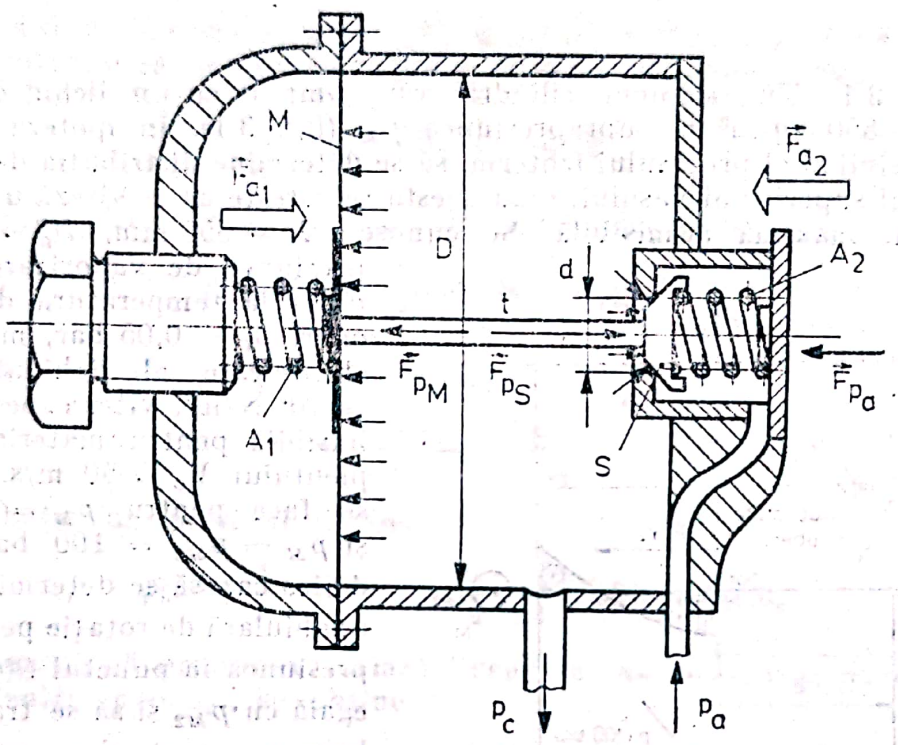


Fig. 2.22.

Rezolvare : Ecuația de echilibru a forțelor care acționează asupra supapei S este

$$\vec{F}_{a1} + \vec{F}_{a2} + \vec{F}_{pM} + \vec{F}_{pa} + \vec{F}_{pS} = 0.$$

Se proiectează ecuația vectorială pe direcția tijei t

$$F_{a1} = F_{a2} + p_c \pi D^2/4 + (p_a - p_c)\pi d^2/4.$$

Rezultă $F_{a1} = 800 + 0{,}2 \cdot 10^6 \pi \ 0{,}15^2/4 + (0{,}21 - 0{,}20) \cdot 10^6 \pi \ 0{,}025^2/4 =$

$$= 4\,339 \text{ N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3

REPAUSUL RELATIV AL FLUIDELOR CONȚINUTE ÎN RECIPIENTE

Problema 3.1. Un recipient cilindric este umplut cu un lichid de densitate $\rho_0 = 850$ kg/m³ la suprapresiunea p_M (fig. 3.1). În ipoteza fluidului incompresibil și al procesului izoterm, să se determine distribuția de presiuni pe capacul superior al vasului, cînd acesta se rotește cu o viteză unghiulară constantă, maximă admisibilă. Se cunosc : $R = 350$ mm, $H_0 = 200$ mm presiunea de vaporizare a lichidului la temperatura de funcționare $p_V = 0{,}05$ bar, modulul de elasticitate al lichidului $\varepsilon = 10^9$ N/m², viteza specifică admisibilă pentru materialul recipientului $V_p = 50$ m/s. Calculul se face pentru $p_M = p_{M1} = 0$ și $p_M = p_{M2} = 100$ bar. În al doilea caz să se determine viteza unghiulară de rotație pentru care presiunea în punctul $O(0, 0)$ este egală cu p_{M2} și să se traseze izobara $p_{M2} = ct$. Cum se modifică relațiile de calcul dacă se ține seama de compresibilitatea fluidului și de variația temperaturii acestuia ?

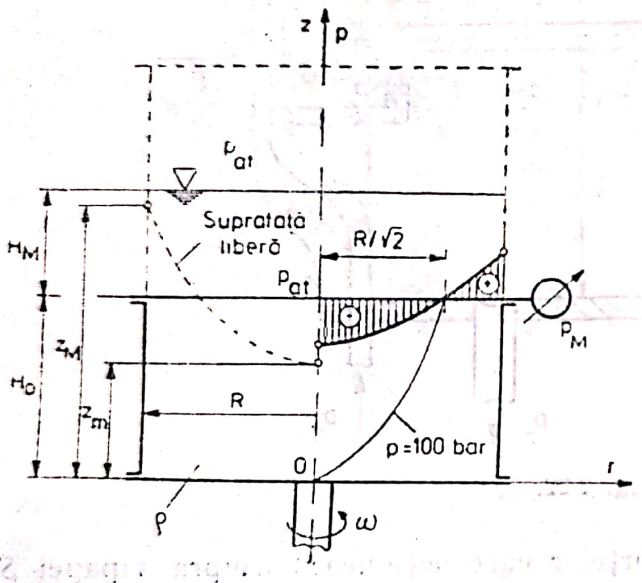


Fig. 3.1.

Rezolvare : 1) $p_M = p_{M1} = 0$. În aceste condiții, pentru $\omega = 0$, pe ambele fețe ale capacului superior acționează presiunea atmosferică. Se consideră lichidul cu suprafață liberă la presiunea atmosferică p_{at}. Ecuația lui Euler pentru fluide incompresibile în repaus relativ se reduce la

$$p + \rho \Pi_T = C = const. \tag{3.1.1}$$

(ecuația fundamentală a hidrostaticii)

$$\Pi_T = -\int (f_x - a_{tx})dx + (f_y - a_{ty})dy + (f_z - a_{tz})dz, \tag{3.1.2}$$

unde : f_x, f_y, f_z sînt componentele forțelor masice unitare ;

a_{tx}, a_{ty}, a_{tz} — componentele accelerației de transport ;
Π_T — potențialul total.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul unui vas în rotaţie cu $\vec{\omega} = \overrightarrow{const.}$, se găsesc următoarele componente :

$$f_z = -g\,;\ a_{tx} = x\omega^2\,;\ a_{ty} = y\omega^2\,;\ f_x = f_y = a_{tz} = 0. \tag{3.1.3}$$

Rezultă distribuţia de presiuni în lichidul aflat în vasul în rotaţie

$$\Pi_T = gz - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = gz - \omega^2 \frac{r^2}{2},$$

$$p + \rho g z - \frac{\rho}{2}\omega^2 r^2 = C. \tag{3.1.4}$$

Pentru determinarea constantei C, se pune condiţia ca volumul în stare de repaus absolut să fie egal cu volumul în stare de repaus relativ

$$\mathcal{V}_0 = \pi R^2 H_0 = \int_0^R z\pi r dr. \tag{3.1.5}$$

Înlocuind (3.1.4) în (3.1.5), după efectuarea integralei, se găseşte

$$C = p_{at} - \frac{1}{4}\rho\omega^2 R^2 + \rho g H_0. \tag{3.1.6}$$

Ecuaţia suprafeţei libere are expresia

$$z = \frac{C - p_{at}}{\rho g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g}, \tag{3.1.7}$$

iar distribuţia de presiuni devine

$$p + \rho g z - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = p_{at} - \frac{1}{4}\rho\omega^2 R^2 + \rho g H_0. \tag{3.1.8}$$

Se observă că presiunea variază linear cu înălţimea z şi parabolic cu raza r. Pentru $p = p_{at}$, se obţine

$$r = 0 \qquad z_{min} = h = H_0 - \frac{1}{4g}\omega^2 R^2, \tag{3.1.9}$$

$$r = R \qquad z_{max} = H = H_0 + \frac{1}{4g}\omega^2 R^2.$$

În cazul în care vasul este închis, relaţia (3.1.8) rămîne valabilă. Pentru înălţimea $z = H_0$ rezultă

$$p_r = p - p_{at} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\left(r^2 - \frac{R^2}{2}\right). \tag{3.1.10}$$

Viteza de rotaţie maximă se poate determina din două condiţii :

a) viteza specifică să nu depăşească viteza specifică admisibilă (condiţia de rezistenţă a materialului din care este confecţionat recipientul)

$$\omega_{max}^{(1)} = V_p/R = 50/0{,}350 = 142{,}85\ s^{-1}\,; \tag{3.1.11}$$

b) presiunea în fluid să nu scadă sub presiunea de vaporizare (condiţia ca să nu apară fenomenul de cavitaţie)

$$p_r \geqslant (-p_{at} + p_v) = p_{rv} = -0{,}95 \cdot 10^5\ Pa.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $r = 0$, din (3.1.10), se obține $\omega_{max}^{(2)} = \sqrt{\frac{-4p_{rv}}{\rho R^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}95 \cdot 10^5}{850 \cdot 0{,}350^2}} =$

$$= 60{,}42 \text{ s}^{-1}. \tag{3.1.12}$$

Deci, în calcul, se consideră $\omega = \omega_{max}^{(2)} = 60{,}41$ s^{-1}.

Cu această valoare, relația (3.1.10) este reprezentată grafic în figura 3.1 (de remarcat că presiunea atmosferică se regăsește la distanța $r = R/\sqrt{2}$ față de axa de rotație).

Forța de presiune rezultantă pe capac se obține prin integrarea distribuției de presiuni

$$dF = p_r dA = p_r 2\pi r dr, \tag{3.1.13}$$

$$F = \int_0^R (a_1 r^2 - b_1) 2\pi r dr = \pi R \left(\frac{a_1 R_2}{2} - b_1 \right),$$

unde $a_1 = (1/2)\rho\omega^2 = 1\,550\,981{,}4$ și $b_1 = \rho\omega^2 R^2/4 = 94\,997{,}61$.

Deci forța care acționează pe capacul recipientului în stare de repaus absolut este egală cu forța care acționează în stare de repaus relativ (în acest caz forța este zero).

2) $P_M = P_{M2} = 100$ bar. Distribuția de presiuni în fluid este dată de relația (3.1.8) sub forma

$$p + \rho g z - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = p_{at} - \frac{1}{4}\rho\omega^2 R^2 + \rho g(H_0 + H_M), \tag{3.1.14}$$

unde $H_M = \frac{p_M}{\rho g} = 1\,199{,}25$ m reprezintă înălțimea de fluid corespunzătoare suprapresiunii p_M.

Pentru $z = H_0$, se obține $p_r = p - p_{at} = \rho g H_M + \frac{1}{2}\rho\omega^2 \left(r^2 - \frac{R^2}{2} \right)$. (3.1.15)

În acest caz, cavitația apare pentru $\omega = \sqrt{(-4p^{rv} + 4\rho g H_M)/gR^2}$ deci în calcul se folosește $\omega = \omega_{max}^{(1)} = 142{,}85$ s^{-1}.

Rezultă o distribuție de presiuni pe capacul superior dată de relația

$$p_r = a_2 r^2 + b_2, \tag{3.1.16}$$

cu $a_2 = 8\,672\,601{,}5$, $b_2 = 9\,468\,748{,}9$. Se obțin următoarele valori:

r	0	$R/\sqrt{2}$	R
p_r [MPa]	9,46	10,0	10,54

Forța care acționează asupra capacului este

$$F = p\pi R^2 = \int_0^R p_r 2\pi r dr = 100 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 0{,}35^2 = 3{,}84 \text{ MN}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Viteza de rotaţie necesară pentru ca în punctul $O\,(0,\,0)$ presiunea să aibă valoarea $p_M = 100 \cdot 10^5$ Pa se determină din următoarea condiţie introdusă în relaţia (3.1.14)

$$z = 0 \quad r = 0\,;\; p_M = p - p_{at} = \rho g(H_0 + H_M) - (1/4)\rho\omega^2 R^2. \tag{3.1.17}$$

$$\text{Deci } \omega = \sqrt{\frac{4\rho g H_0}{\rho R^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}2}{0{,}35^2}} = 8\ \text{s}^{-1}. \tag{3.1.18}$$

Cu această valoare, relaţia (3.1.14) devine

$$\rho g H_0 - (1/4)\rho\omega^2 R^2 + (1/2)\rho\omega^2 r^2 = \rho g z,$$

dependenţa razei faţă de înălţimea z, pentru $p = p_M = \text{ct.}$, având expresia

$$r = \sqrt{R^2/2 + (2g/\omega^2)(z - H_0)}\,. \tag{3.1.19}$$

Se obţin următoarele valori :

z	0	$H_0/4$	$H_0/2$	$2H_0/3$	H_0
r	0	0,123	0,175	0,201	0,247

3) În cazul în care fluidul este compresibil izoterm, legea fundamentală a hidrostaticii devine

$$\int \frac{dp}{\rho} + \Pi_T = C, \tag{3.1.20}$$

cu ecuaţia constitutivă în forma $dp = \dfrac{\varepsilon}{\rho}\,d\rho$, (3.1.21)

unde ε este modulul de elasticitate al fluidului .

Introducînd (3.1.21) în (3.1.20), se obţine, după integrare,

$$-\varepsilon/\rho + \Pi_T = C, \quad \text{sau, folosind relaţia (3.1.4),}$$

$$-\varepsilon/\rho + gz - \omega^2 r^2/2 = C.$$

Din condiţia ca în punctul $z = H_0$ şi $r = R/\sqrt{2}$ densitatea să rămînă $\rho = \rho_0$ (admiţînd că presiunea în acel punct rămîne constantă), se obţine valoarea constantei C

$$C = -\varepsilon/\rho_0 + gH_0 - \omega^2 R^2/4.$$

Deci distribuţia densităţii are expresia

$$\rho = \frac{\varepsilon\rho_0}{\varepsilon + \rho_0 g(z - H_0) + (\rho_0\omega^2/2)\,(R^2/2 - r^2)}\,. \tag{3.1.22}$$

Pe suprafaţa capacului $z = H_0$, se obţine

$$\rho = \frac{\varepsilon\rho_0}{\varepsilon + (\rho_0\omega^2/2)(R^2/2 - r^2)}\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\omega = 142{,}85\ s^{-1}$, $\rho_0 = 850\ kg/m^3$ și $e = 10^9\ N/m^2$, se obține următoarea variație a densității:

r	0	$R/3$	$R/2$	$R/\sqrt{2}$	R
ρ	849,54	849,64	849,77	850	850,45

Avînd în vedere variațiile mici ale densității, se poate considera neglijabilă influența compresibilității fluidului.

Dacă procesul nu este izoterm, datorită frecării recipientului cu exteriorul, fluidul se încălzește, ceea ce duce la creșterea presiunii de vaporizare, și în consecință, la scăderea vitezei de rotație admisibilă.

Problema 3.2. Pe capacul superior al unui recipient se montează două tuburi piezometrice identice la razele $r_1 = 0{,}2$ mm și $r_2 = 0{,}45$ m, nivelul fluidului din vas fiind $h_0 = 300$ mm (fig. 3.2).

Să se determine viteza de rotație a recipientului, dacă denivelarea dintre cele două tuburi este $\xi = 0{,}15$ m.

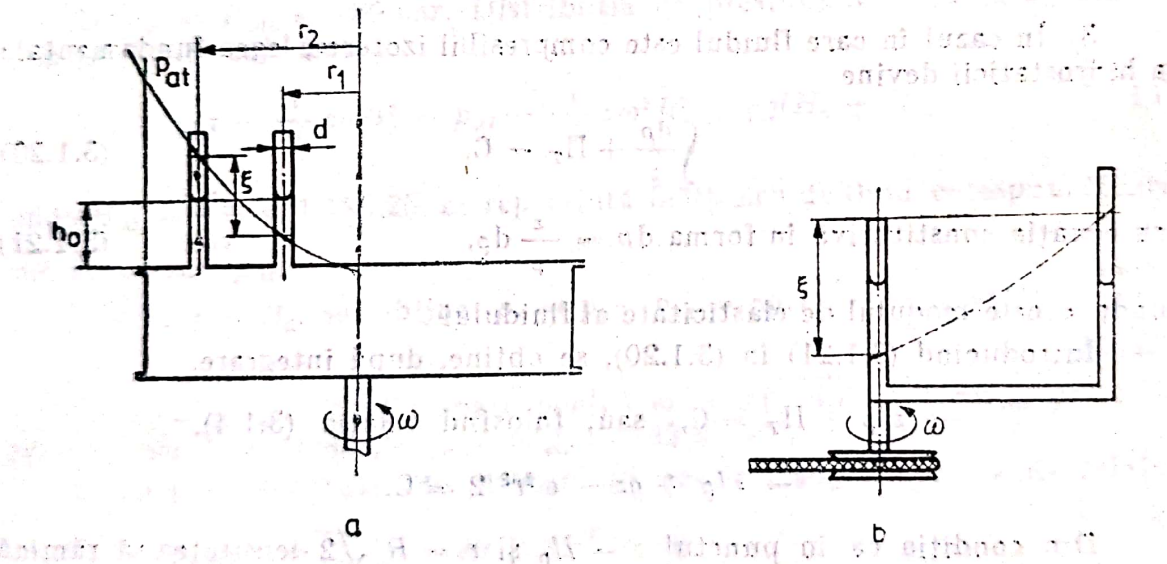


Fig. 3.2.

Care este viteza de rotație maximă care poate fi determinată și cum influențează precizia măsurătorii diametrul d al tubului piezometric ?

Rezolvare : În relația (3.1.6), $p + \rho gz - (1/2)\rho\omega^2 r^2 = C$, se pun următoarele condiții : $r = r_1$, $z = h_1$, $p = p_{at}$ și $r = r_2$, $z = h_2$, $p = p_{at}$.

Se obține $p_{at} + \rho g h_1 - (1/2)\rho\omega^2 r_1^2 = p_{at} = \rho g h_2 - (1/2)\rho\omega^2 h_2^2$,

$$\omega = \sqrt{2\xi/(r_2^2 - r_1^2)}, \text{ cu } \xi = h_2 - h_1.$$

$$\text{Deci } \omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}15}{0{,}45^2 - 0{,}2^2}} = 1{,}35 s^{-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea turației maxime care se poate determina corespunde pentru $h_1 = 0$ și $\xi = 2h_0 = 0{,}6$ m:

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}6}{0{,}45^2 - 0{,}2^2}} = 2{,}71 \ s^{-1}.$$

Pentru $\omega > \omega_{max}$, nivelul lichidului coboară sub cota h_0, deci diferența $\xi = h_2 - h_1$ nu mai poate fi măsurată.

Diametrul d al tubului piezometric influențează citirea cotei ξ dacă se ține seama de forma suprafeței libere a lichidului din tuburi. Deci precizia citirii este cu atît mai bună, cu cît diametrul d este mai mic. Ținînd seama că tendințele de mișcare în cele două tuburi sînt contrarii, rezultă că tensiunea superficială nu influențează direct mărimea ξ măsurată.

În figura 3.2, *b*, se prezintă o variantă a aparatului cu $r_1 = 0$, care poartă numele de *tahometru* și se folosește în practică pentru măsurarea turației.

Problema 3.3. Într-o incintă vidată, $p = p_{vac} = 10^{-4}$ bar (presiunea absolută), se realizează turnarea prin centrifugare a unui metal cu densitatea $\rho = 7\,500$ kg/m³ în formele *a* și *b* (fig. 3.3). Să se determine, în cazul formei *a*, turația maximă la care se realizează turnarea și, în cazul formei *b*, presiunea absolută a metalului lichid în punctul *B* pentru această turație. Se cunosc: $H = 0{,}8$ m, $H_0 = 0{,}6$ m; $D_a = 200$ mm; $d_a = 150$ mm; $d_b = 100$ mm.

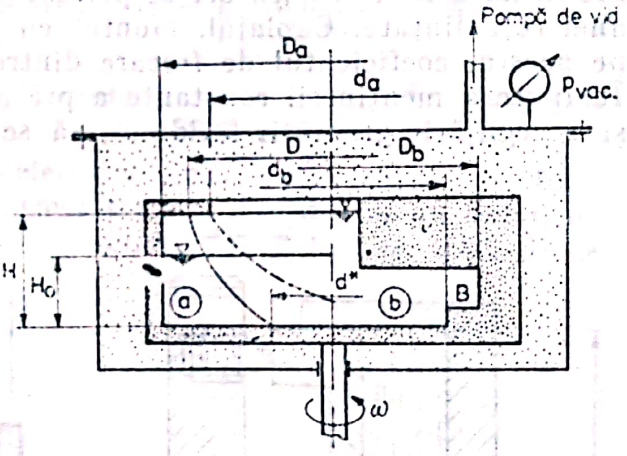


Fig. 3.3.

Rezolvare: Pentru forma *a*, condiția (3.1.5) devine

$$\frac{\pi D_a^2}{4} H_0 = \frac{\pi (D_a^2 - D^2)}{4} H + \int_{d^*/2}^{D/2} z \cdot 2\pi r dr,$$

unde expresia lui z este dată de relația (3.1.4), iar notațiile au semnificația din figura 3.3. Prin integrare, se obține distribuția de presiuni

$$p + \rho g z - \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 = p_0 + \frac{D_a^2}{D^2 - d^{*2}} \rho g H_0 - \frac{1}{4} \rho \omega^2 \frac{2(D^2 + d^{*2})}{4} - \rho g H \frac{D_a^2 - D^2}{D^2 - d^{*2}}.$$

Turația maximă se obține din condiția ca metalul topit să nu iasă din formă. Pentru $z = H$, $p = p_0 = p_{vac}$, $D = d_a$, turația are expresia

$$\omega = \frac{4}{D^2 - d^{*2}} \sqrt{g[D_a^2 (H - H_0) - H d^{*2}]}.$$

Dacă se pune condiția ca suprafața liberă să nu atingă fundul formei, rezultă

$$\omega = \frac{4D_a}{d_a^2}\sqrt{g(H - H_0)},$$

$$\omega_{max} = \frac{4 \cdot 0{,}2}{0{,}15^2}\sqrt{9{,}81(0{,}8 - 0{,}6)} = 49{,}8 \text{ s}^{-1}.$$

Distribuția de presiuni în metalul topit din forma b este dată de relația (3.1.4). Determinarea constantei C se face punînd condițiile : $r = 0$, $z = H$, $p = p_{vac}$.

Rezultă $C = p_{vac} + \rho gH$

Presiunea în B are valoarea

$$p + \rho gz - (1/2)\rho\omega^2 r^2 = p_{vac} + \rho gH.$$

Pentru $z = 0$ și $r = d_b/2$, se obține

$$p = p_{vac} + \rho gH + \frac{1}{2}\rho\omega^2\frac{d_b^2}{4} = 10^{-4} \cdot 10^5 + 7\,500 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}8 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 7\,500 \cdot 49{,}8^2 \cdot \frac{0{,}1}{4} = 0{,}082 \text{ MPa}.$$

Problema 3.4. În figura 3.4 se prezintă un dispozitiv de cuplare automată a unei roți dințate. Cuplajul, montat cu prestrîngere pe arbore, poate culisa pe acesta, coeficientul de frecare dintre cele două suprafețe fiind $\mu = 0$. În ipoteza menținerii constante a presiunii de alimentare, $p_{alim} = 150$ bar și a neglijării greutății fluidului, să se determine forțe de prestrîngere și turația n a arborelui la care se realizează cuplarea. Se cunosc: densitatea fluidului $\rho = 800$ kg/m³, diametrul arborelui $d = 20$ mm, diametrul cuplajului $D = 50$ mm, jocul $\delta_0 = 0{,}5$ mm (pentru $n = 0$). Forța rezultantă care acționează asupra cuplajului se consideră repartizată uniform pe opt arcuri identice cu constanta $k = 20$ N/mm.

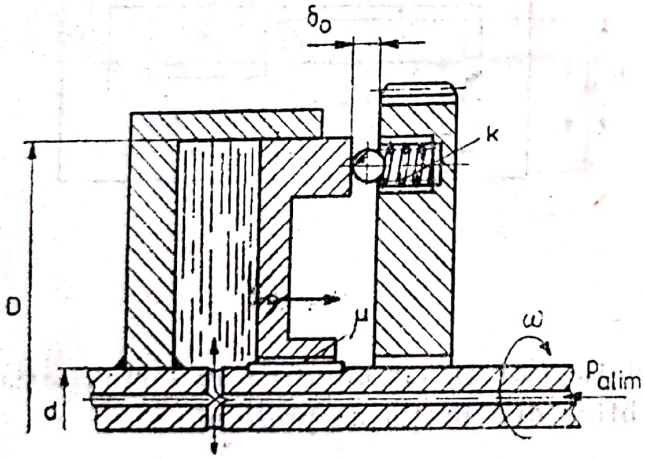


Fig. 3.4.

Rezolvare : În ipoteza neglijării greutății fluidului, distribuția de presiune în cuplaj este dată de relația (3.1.4)

$$p - (1/2)\rho\omega^2 r^2 = C.$$

Ținînd seama de condițiile de funcționare rezultă

$$p - (1/2)\rho\omega^2 r^2 = p_0 - (1/2)\lambda\omega^2 r_0^2, \qquad (3.4.1)$$

cu $p_0 = p_{alim} = 150 \cdot 10^5$Pa și $r_0 = d/3$

Deci $p = p_0 + (1/2)\rho\omega^2(r^2 - r_0^2)$.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul în care cuplajul este alimentat, iar turația arborelui este nulă, discul mobil trebuie să rămînă fix. Deci forța de frecare $F_f = \mu F_p$ trebuie să fie egală cu forța de presiune care acționează asupra cuplajului. Din această condiție, rezultă mărimea forței de prestrîngere F_p :

$$F_f = \mu F_p = p_{atm} \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2).$$

Se obține $F_p = \frac{150 \cdot 10^5 \pi (0{,}05^2 - 0{,}02^2)}{4 \cdot 0{,}1} \cong 0{,}25 \text{ MN}.$ (3.4.2)

Deci forța de presiune suplimentară datorită turației arborelui trebuie să fie echilibrată de forțele din arcuri la săgeata $\delta_0 = 0{,}5$ mm

$$F_p = \int_{d/2}^{D/2} \frac{1}{2} \rho \omega^2 \left(r^2 - \frac{d^2}{4} \right) 2\pi r dr. \quad (3.4.3)$$

Prin integrare se obține $F_p = \frac{2\pi}{2} \rho \omega^2 \left[\frac{1}{64} (D^4 - d^4) - \frac{d^2}{32} (D^2 - d^2) \right],$ (3.4.4)

$$F_p = 1{,}73 \cdot 10^{-4} \omega^2.$$

Condiția de echilibru este $F_p = 8F_a = 8k\delta_0.$ (3.4.5)

Deci turația de cuplare are valoarea $\omega = \sqrt{\frac{8k\delta_0}{1{,}73 \cdot 10^{-4}}} = 680 \text{ s}^{-1},$

$$n = \frac{30\omega}{\pi} \cong 6\,500 \text{ rot/min}. \quad (3.4.6)$$

Problema 3.5. Pentru măsurarea accelerației unui autovehicul, se folosește un tub U deschis la presiunea atmosferică și umplut cu un lichid de densitate ρ. Între ramurile tubului este lungimea $l = 1$ m (fig. 3.5). Să se determine denivelarea dintre ramurile accelerometrului, dacă autovehiculul, plecînd, din repaus, atinge viteza $V = 60$ km/h în 10 s.

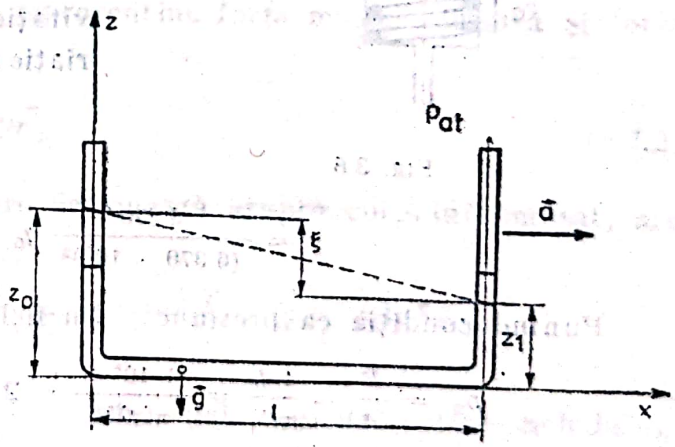


Fig. 3.5.

Rezolvare : Potențialul total are expresia $\Pi_T = ax + gz + C.$

Distribuția de presiuni din lichid este dată de relația

$$p + \rho g z + \rho a x = C \quad (3.1.1)$$

Se pun următoarele condiții :

$$x = 0, \quad p = p_{at}, \quad z = z_0, \quad p_{at} + \rho g z_0 = C;$$

$$x = l, \quad p = p_{at}, \quad z = z_1, \quad p_{at} + \rho g z_1 + \rho a l = C.$$

Rezultă $a = \frac{g\xi}{l}$, deci $\xi = z_0 - z_1$ are valoarea

$$\xi = l \frac{a}{g} = l \frac{V}{gt} = 1 \cdot \frac{60 \cdot 1\,000}{3\,600 \cdot 9{,}81 \cdot 10} \cong 0{,}17 \text{ m},$$

Scanned with OKEN Scanner

Problema 3.6. Un cilindru hidraulic se află în componența unui vehicul spațial care este lansat de pe Pământ. La altitudinea $h = 100$ km, este accelerat cu accelerația $a = 15\, g_0$, unde $g_0 = 9{,}81$ m/s^2.

În ipotezele că accelerația a are direcția verticală, iar cilindrul este acționat de forța $F = 100$ kN = constantă, să se determine mărimea presiunii de comandă p_c care deschide supapa la altitudinea h (fig. 3.6).

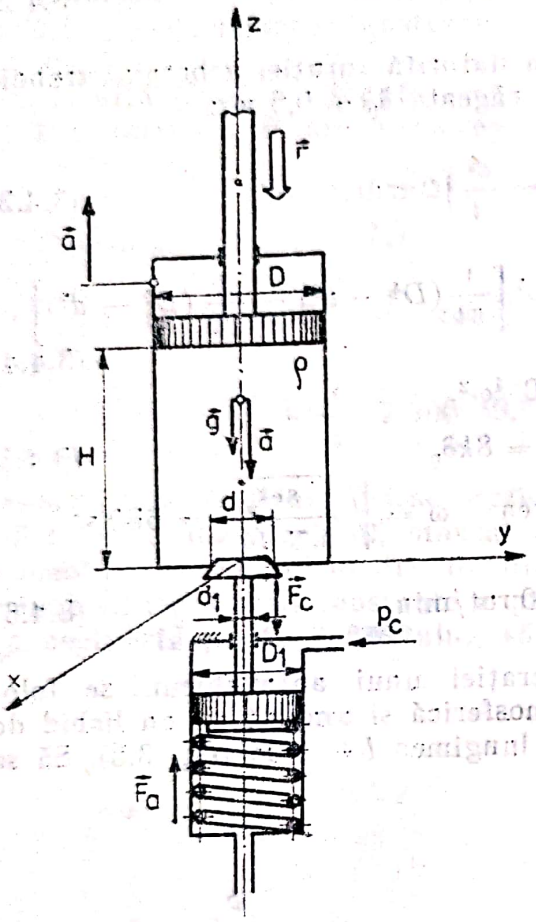


Fig. 3.6.

Se cunosc: densitatea lichidului din cilindru $\rho = 800$ kg/m^3, înălțimea $H = 1$ m, diametrul pistonului $D = 0{,}250$ m, diametrul supapei $d = 0{,}02$ m, diametrul tijei $d_1 = 0{,}01$ m, diametrul pistonului de comandă $D_1 = 0{,}03$ m, forța de prestrîngere din arc $F_a = 1{,}09$ kN. Lichidul din cilindru se consideră incompresibil.

Rezolvare: Forțele care acționează asupra lichidului din cilindru sînt:

— forța de presiune $\vec{f}_p = -1/\rho \operatorname{grad} p$;

— forța de greutate $\vec{f}_m = -g\vec{k}$;

— forța de inerție $\vec{f}_i = -a\vec{k}$.

În acest caz, potențialul total este $\Pi_T = gz + az + C$, iar relația de echilibru relativ din fluid devine

$$p + \rho z(a + g) = C.$$

Cu altitudinea h, accelerația gravitațională are următoarea lege de variație:

$$g = \frac{R^2}{(R+h)^2}\, g_0, \text{ deci}$$

$$g = \frac{6\,370}{(6\,370 + 100)^2}\, g_0 = 9{,}51 \text{ m/s}^2$$

Punînd condiția ca presiunea din lichid la suprafața pistonului să fie

$$p_* = \frac{F}{A} = \frac{4 \cdot F}{\pi D^2} = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 4}{\pi 0{,}25^2} = 2 \text{ MPa, relația (3.1.1)}$$

are forma $p_* + \rho H(a + g) = p + \rho z(a + g)$.

La nivelul supapei, $z = 0$, se obține

$$p = p_* + \rho H(a + g) = 2 + 800 \cdot 1(15 \cdot 9{,}81 + 9{,}51) \cdot 10^{-6} \cong 2{,}13 \text{ MPa}.$$

Forța care acționează asupra tijei cilindrului de comandă este

$$F_c = p\, \pi d^2/4 = 2{,}13 \cdot 10^6\, \pi 0{,}02^2/4 \cong 670 \text{ N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci presiunea de comandă are valoarea

$$p_c = \frac{(F_a - F_c)4}{\pi(D_1^2 - d_1^2)} = \frac{420 \cdot 4}{\pi(0{,}03^2 - 0{,}02^2)} \cong 0{,}67 \text{ MPa}.$$

Problema 3.7. Un corp solid, omogen, de volum $\mathcal{V}$ și densitate ρ_1, este introdus într-un vas care se rotește cu viteza unghiulară ω și în care se găsește un lichid cu densitatea ρ (fig. 3.7). Să se studieze tendințele de deplasare ale corpului în lichid.

Rezolvare : Asupra corpului solid imersat în lichid acționează următoarele forțe :

— forța de greutate $\vec{F}_g = -\rho_1 g \mathcal{V} \vec{k}$;

— forța de transport $\vec{F}_t = \int_{\mathcal{D}} \rho_1(\omega^2 x\vec{i} + \omega^2 y\vec{j})d\mathcal{V} = \rho_1\omega^2(\int_{\mathcal{D}} x\vec{i}d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{D}} y\vec{j}d\mathcal{V}) = \rho_1\omega^2(x_G\mathcal{V}\vec{i} + y_G\mathcal{V}\vec{j}) = \rho_1\omega^2\mathcal{V}\vec{r}_G$,

unde $\vec{r}_G$ reprezintă vectorul de poziție al centrului de greutate al corpului ;

— forța de presiune $\vec{F}_p = -\int_S p\vec{n}dA = -\int_{\mathcal{D}} \text{grad } p d\mathcal{V}$.

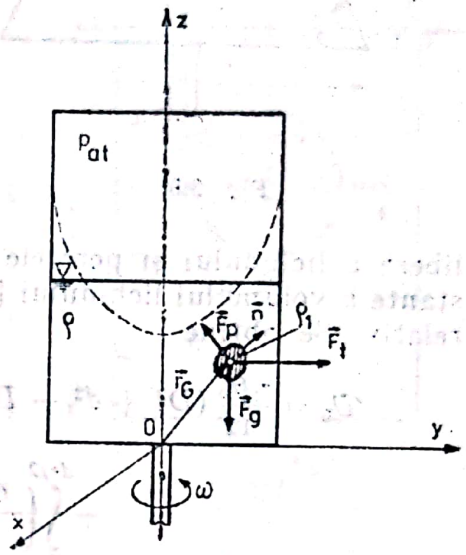


Fig. 3.7.

Presiunea în lichid este dată de ecuația generală a repausului relativ

$$(1/\rho)\text{grad } p = \rho\vec{f} + \rho\vec{f}_t, \qquad (3.7.1)$$

cu $\vec{f} = -g\vec{k}$ și $\vec{f}_t = \omega^2 x\vec{i} + \omega^2 y\vec{j}$ reprezentînd forța masică unitară și forța unitară de transport.

Rezultă $\vec{F}_p = \rho g \mathcal{V}\vec{k} - \omega^2\rho\mathcal{V}\vec{r}_G$. (3.7.2)

Rezultanta $\vec{R}$, a forțelor care acționează asupra corpului imersat, are expresia :

$$\vec{R} = \vec{F}_g + \vec{F}_t + \vec{F}_p = (\rho - \rho_1)g\mathcal{V}\vec{k} - (\rho - \rho_1)\omega^2\mathcal{V}\vec{r}_G.$$

Se pot distinge trei cazuri :

1) $\rho = \rho_1$. Densitatea solidului este egală cu densitatea lichidului, $\vec{R} = 0$, deci corpul va rămîne în repaus relativ ;

2) $\rho < \rho_1$. În acest caz, solidul coboară spre fundul vasului și are tendința de a se îndepărta de axa de rotație.

3) $\rho > \rho_1$. Corpul solid urcă în lichid și se apropie de axa de rotație.

Problema 3.8. Într-un vas tronconic umplut cu apă la înălțimea $H_0 = 0{,}1$ m, se montează un plutitor indicator (fig. 3.8). În ipoteza menținerii plutitorului pe axa de rotație, să se determine indicația h, dacă vasul se rotește cu

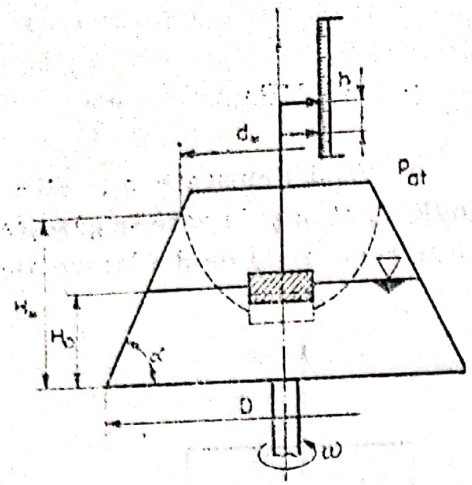


Fig. 3.8.

$\omega = 20$ rot/s. Se cunosc : diametrul $D = 0{,}250$ m și unghiul $\alpha = 60°$. Cum influențează densitatea plutitorului indicația acestuia ?

Rezolvare : Ecuația suprafeței libere este (3.1.7)

$$z = \frac{C - p_{at}}{\rho g} + \frac{\omega^2}{2g} r^2.$$

Din considerente geometrice rezultă

$$H_* = H_0(D - d_*)/(D - d_0),$$

$$d_0 = (\operatorname{tg}\alpha\, D - 2H_0)/\operatorname{tg}\alpha = 0{,}1345 \text{ m},$$

unde d_* și H_* reprezintă coordonatele punctului de intersecție dintre suprafața liberă a lichidului și peretele vasului. Se pune condiția menținerii constante a volumului lichidului în starea de echilibru absolut și în echilibru relativ. Se obține

$$\mathcal{V}_0 = \frac{\pi H_0}{12}(D^2 + d^2 + Dd_0) = \frac{\pi H_*}{12}(D^2 + d_*^2 + Dd_*) - H_* \frac{\pi d_*^2}{4} +$$

$$+ \int_0^{d_*/2} \left(\frac{C - p_{at}}{g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right) 2\pi r dr,$$

(s-a considerat mărimea plutitorului mult mai mică decît diametrul vasului), unde constanta C are expresia

$$C = p_{at} + \rho g H_* - \frac{\rho\omega^2}{8} d_*^2.$$

După integrare și reducerea termenilor, rezultă

$$\frac{3}{16}\frac{\omega^2}{g} d_*^4 + \frac{H_0}{D - d_0} d_*^3 - \frac{H_0 D^3}{D - d_0} + 12\mathcal{V}_0 = 0. \qquad (3.8.1)$$

Pentru rezolvarea ecuației (3.1.16), se folosește metoda Newton-Raphson (vezi problema 2.14)

$$F(d_*) = 7{,}645 d_*^4 + 0{,}865 d_*^3 - 0{,}0021 ;$$

$$F'(d_*) = 30{,}58 d_*^3 + 2{,}595 d_*^2.$$

Se obține, cu $d_*^{i+1} = d_*^i - \frac{F(d_*^i)}{F'(d_*^i)}$, din trei iterații, plecînd de la valoarea inițială $d_*^1 = 0{,}100$ m, mărimea

$d_* = 0{,}109$ m și, corespunzător, $H_* = 0{,}1 \cdot \frac{0{,}250 - 0{,}109}{0{,}250 - 0{,}1345} = 0{,}122$ m.

Deci, pentru $r = 0$, corespunde înălțimea

$$z = H_* - \frac{\omega^2}{8g} d_*^2 = 0{,}122 - \frac{20^2}{8 \cdot 9{,}81} = 0{,}109^2 \cong 0{,}06 \text{ m},$$

iar indicația h este $h = H_0 - z = 0{,}100 - 0{,}06 = 0{,}04$ m.

Scanned with OKEN Scanner

Densitatea plutitorului nu influențează indicația h, deoarece plutitorul este cufundat în aceeași poziție în lichid, indiferent de nivelul acestuia.

Problema 3.9. Într-un vas cilindric cu raza $R = 0{,}4$ m, se află imersată, pînă la jumătate, o sferă de rază $R_s = 0{,}2$ m (fig. 3.9), (sfera este montată rigid pe axa vasului). Să se determine turația minimă ω_0, pentru care sfera nu mai este în contact cu lichidul din vas.

Care este forța ce acționează asupra sferei, dacă ansamblul se rotește cu $\omega = \sqrt{10}$ s^{-1} ?. Se cunosc : $H_0 = 0{,}5$ m și $\rho = 1\,000$ kg/m^3.

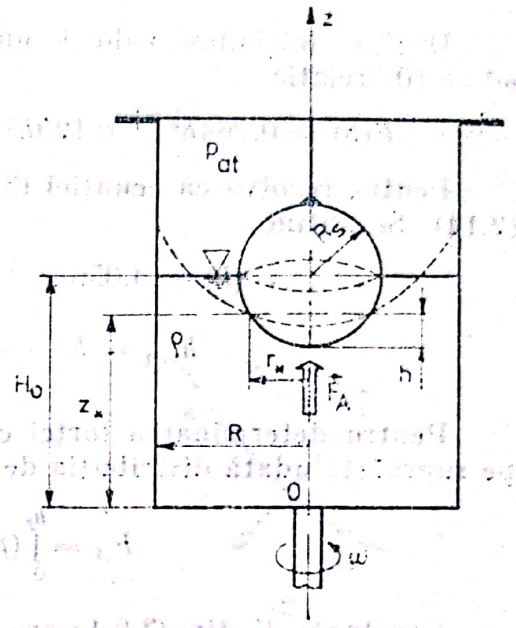


Fig. 3.9.

Rezolvare : Într-un vas în rotație, ecuația suprafeței libere și distribuția de presiuni sînt date de relațiile (3.1.7) și (3.1.4).

$$p + \rho g z - (\rho/2)\omega^2 r^2 = C, \qquad (3.9.1)$$

$$z = \frac{C - p_{at}}{\rho g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g}. \qquad (3.9.2)$$

Se presupune că, la o viteză de rotație, ω, suprafața liberă intersectează sfera în punctul (r_*, z_*) (fig. 3.9). Din considerente geometrice, există relațiile :

$$z_* = H_0 - R_s + h;$$

$$r_*^2 = 2R_s h - h^2;$$

unde h este înălțimea calotei sferice.

Se pune condiția ca volumele de lichid în stare de repaus absolut și repaus relativ să fie egale

$$\mathcal{V}_0 = \pi R^2 H_0 - \frac{4\pi R_s}{6} = \pi r_*^2 (H_0 - R_s + h) - \frac{\pi h}{6}(3r_*^2 + h^2) + \int_{r_*}^{R} z \cdot 2\pi r dr \qquad (3.9.3)$$

Constanta C din relația (3.9.2) se determină punînd condiția ca punctul (r_*, z_*) să se situeze pe suprafața liberă

$$z_* = \frac{C - p_{at}}{g} + \frac{\omega^2}{2g} r_*^2,$$

$$C = p_{at} + \rho g(H_0 - R_s + h) - \frac{\rho}{2}\omega^2(2R_s h - h^2). \qquad (3.9.4)$$

Din relațiile (3.9.2), (3.9.3) și (3.9.4), după efectuarea integralei, rezultă o ecuație $h = h(\omega)$

$$\frac{3\omega^2}{4g}h^4 + \left(\frac{1}{3} - \frac{\omega^2 R_s}{g}\right)h^3 + \left(-R_s + \frac{\omega^2 R_s^2}{g} + \frac{\omega^2 R^2}{2g}\right)h^2 + \left(R^2 - \frac{\omega^2 R_s R^2}{g}\right)h + \frac{2R_s^3}{3} - R^2 R_s + \frac{\omega^2 R^4}{4g} = 0. \qquad (3.9.5)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea turației ω_0, se pune condiția ca $h = 0$ să fie rădăcină a ecuației (3.9.5)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4g\left(R^2R_s - \frac{2}{3}R_s^3\right)}{R^4}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 9{,}81(0{,}4^2 \cdot 0{,}2 - 2 \cdot 0{,}2^3/3)}}{0{,}4^2} = 6{,}4 \text{ s}^{-1}.$$

Dacă se înlocuiesc valorile numerice în ecuația (3.9.5), se obține, pentru $\omega^2 = 10$, relația

$$F(h) = 0{,}764h^4 + 0{,}129h^3 - 0{,}077h^2 + 0{,}127h - 0{,}02 = 0. \quad (3.9.6)$$

Pentru rezolvarea ecuației (3.9.6), se folosește metoda Newton-Raphson (2.14). Se obține

$$F'(h) = 3{,}056h^3 + 0{,}387h^2 - 0{,}154h + 0{,}127$$

$$h_{i+1} = h_i - \frac{F(h_i)}{F'(h_i)}; \quad h_* = 0{,}165 \text{ m}.$$

Pentru determinarea forței care acționează asupra sferei, se integrează pe suprafața udată distribuția de presiuni dată de relația (3.9.1)

$$F_A = \int_0^{h_s} (p - p_{at}) 2\pi R_s dh. \quad (3.9.7$$

Constanta C din (3.9.1) are valoarea

$$C = p_{at} + 1\,000 \cdot 9{,}81(0{,}5 - 0{,}2 + 0{,}165) - \frac{1\,000}{2} \cdot 10(2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}165 - 0{,}165^2) =$$

$$= 4\,367{,}7 + p_{at}. \quad (3.9.8)$$

Din (3.9.6), (3.9.8) și (3.9.7), rezultă

$$F_A = 2\pi R_s \int_0^{0{,}167} \left[4\,367{,}7 + \frac{\rho\omega^2}{2}(2R_s h - h^2) - \rho g(H_0 - R_s + h)\right] dh. \quad (3.9.9)$$

Se obține forța ascensională $F_A = 152{,}4$ N.

(Pentru verificare se face următorul calcul: în (3.9.9) se pune condiția de repaus absolut $\omega = 0$. Se obține forța $F_A = 127{,}6$ N.

Aceeași valoare ar trebui să se obțină aplicînd principiul lui Arhimede considerînd sfera imersată pînă la valoarea $h = h_*$,

$$F_A^0 = \rho g \mathcal{V}_* = \rho g \cdot \frac{\pi h_*}{6}(3r_*^2 + h^2) = 1\,000 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}165}{6}(3 \cdot 0{,}0387 +$$

$$+ 0{,}165^2) = 121{,}5 \text{ N}.$$

Eroarea de calcul este $\varepsilon = \frac{F_A^0 - F_A}{F_A^0} \cdot 100 = 5\%$).

Problema 3.10. Într-un recipient cilindric de diametru $D = 2R = 0{,}2$ m se găsesc două lichide nemiscibile de densități $\rho_1 = 750$ kg/m³ și $\rho_2 = 1\,000$ kg/m³, înălțimile lor fiind $h_1 = h_2 = 0{,}15$ m (fig. 3.10, *a*).

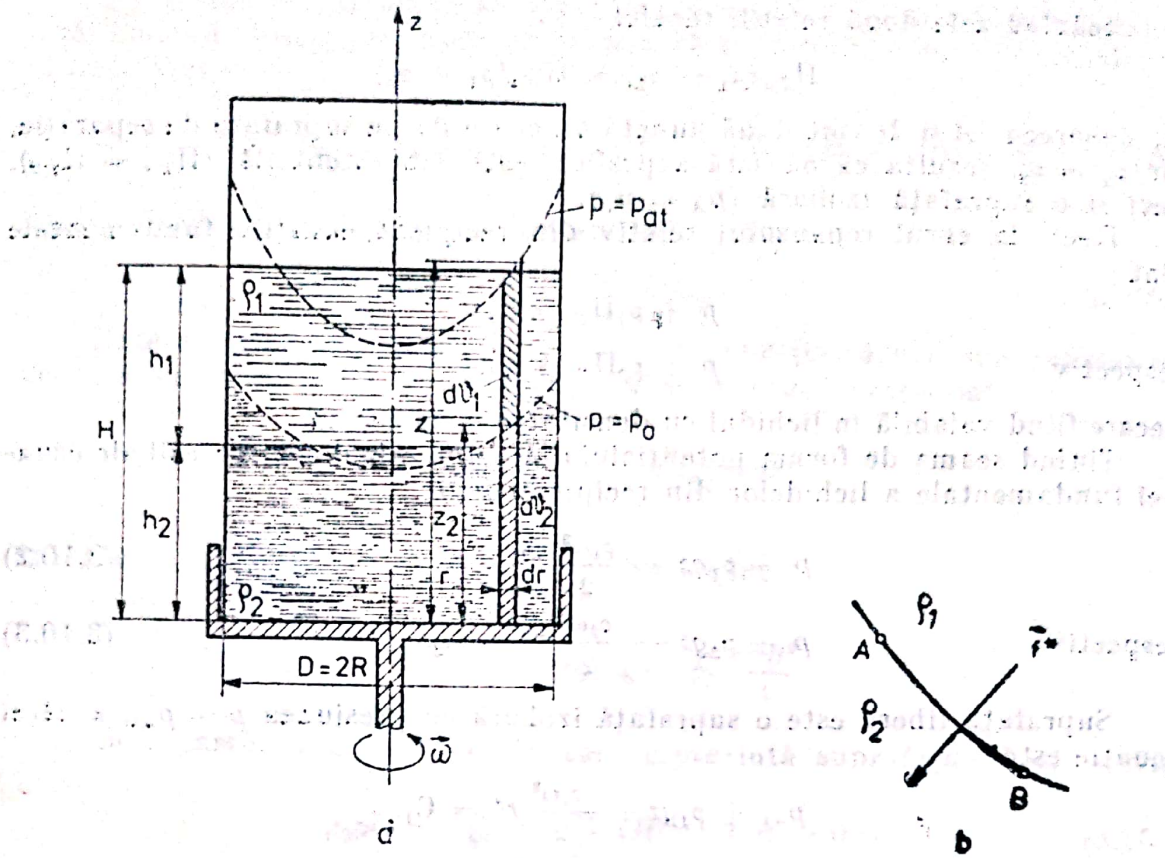


Fig. 3.10.

Recipientul se roteşte în jurul axei sale verticale cu turaţia constantă $n = 200$ rot/min. Să se determine forma suprafeţei libere, precum şi forma suprafeţei de separaţie dintre cele două lichide.

Rezolvare : În cazul recipientului cilindric în mişcare de rotaţie în jurul axei sale verticale, forţa masică este

$$\vec{f}_T = \vec{f} - \vec{a}_t = \vec{f} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),$$

şi este alcătuită din forţa masică unitară exterioară $\vec{f} = \vec{g}$ şi forţa complementară de inerţie datorită acceleraţiei de transport $\vec{a}_t = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$. Corespunzător acesteia, potenţialul total este

$$\Pi_T = gz - \omega^2 r^2/2 + C_0 \qquad (3.10.1)$$

şi este acelaşi în cazul ambelor lichide din vas.

Pentru determinarea suprafeţei de separaţie dintre cele două lichide, se consideră ecuaţia fundamentală în cazul repausului relativ (3.1.1),

$$p + \rho \Pi_T = \text{const.},$$

şi se aplică ecuaţia între două puncte A şi B (fig. 3.10, *b*), situate pe interfaţa dintre lichide şi considerate întîi în lichidul cu densitate ρ_1 şi apoi în cel cu densitatea ρ_2,

$$p_A + \rho_1 \Pi_{TA} = p_B + \rho_1 \Pi_{TB},$$

respectiv $p_A + \rho_2 \Pi_{TA} = p_B + \rho_2 \Pi_{TB}$.

Scăzînd cele două relaţii, rezultă

$$\Pi_{TA}(\rho_1 - \rho_2) = \Pi_{TB}(\rho_1 - \rho_2)$$

şi, deoarece A şi B sînt două puncte oarecare de pe suprafaţa de separaţie, iar $\rho_1 = \rho_2$, rezultă că această suprafaţă este echipotenţială ($\Pi_{TA} = \Pi_{TB}$), deci şi o suprafaţă izobară ($p_A = p_B$).

Deci, în cazul repausului relativ din recipient, ecuaţiile fundamentale sînt :

$$p + \rho_1 \Pi_T = C_1';$$

respectiv

$$p + \rho_2 \Pi_T = C_2',$$

fiecare fiind valabilă în lichidul cu densitatea considerată.

Ţinînd seama de forma potenţialului Π_T (r), cele două expresii ale ecuaţiei fundamentale a lichidelor din recipient devin

$$p + \rho_1 gz - \frac{\rho_1 \omega^2}{2} r^2 = C_1; \tag{3.10.2}$$

respectiv

$$p + \rho_2 gz - \frac{\rho_2 \omega^2}{2} r^2 = C_2. \tag{3.10.3}$$

Suprafaţa liberă este o suprafaţă izobară cu presiunea $p = p_{at}$, a cărei ecuaţie este

$$p_{at} + \rho_1 gz - \frac{\rho_1 \omega^2}{2} r^2 = C_1.$$

Pentru determinrrea constantei C_1, se scrie că volumul de sub suprafaţa liberă este egal cu volumul celor două lichide în repaus absolut $\mathcal{V} = \pi R^2(h_1 + h_2)$.

Volumul de sub suprafaţa liberă se scrie

$$\mathcal{V} = \int d\mathcal{V} = \int_0^R z 2\pi r dr,$$

în care $z = \frac{1}{\rho_1 g}\left(C_1 - p_{at} + \rho_1 \frac{\omega^2 r^2}{2}\right)$ se obţine din ecuaţia suprafeţei libere. Rezultă

$$\mathcal{V} = \frac{2\pi}{\rho_1 g} \int_0^R \left(C_1 - p_{at} + \rho_1 \frac{\omega^2 r^2}{2}\right) r dr,$$

deci $\mathcal{V} = \frac{2\pi}{\rho_1 g}\left[(C_1 - p_{at})\frac{R^2}{2} + \frac{\rho_1 \omega^2}{8} R^4\right]$,

de unde rezultă $C_1 = p_{at} + \rho_1 g(h_1 + h_2) - \rho_1 \frac{\omega^2 R^2}{4}$.

Cu aceasta, ecuaţia fundamentală pentru lichidul cu densitatea ρ_1 este

$$p - p_{at} - \rho_1 g(h_1 + h_2 - z) + \rho_1 \frac{\omega^2}{4}(R^2 - 2r^2) = 0,$$

iar ecuaţia suprafeţei libere ($p = p_{at}$) devine

$$z = h_1 + h_2 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2). \tag{3.10.4}$$

Scanned with OKEN Scanner

S-a arătat că suprafaţa de separaţie dintre cele două lichide este o suprafaţă izobară. Fie p_0 presiunea de pe această suprafaţă. Ecuaţiile acestei suprafeţe sînt :

$$p_0 - p_{at} - \rho_1 g(h_1 + h_2 - z) - \rho_1 \frac{\omega^2}{4}(R^2 - 2r^2) = 0, \qquad (3.10.5)$$

pentru fluidul cu densitatea ρ_1, respectiv

$$p_0 + \rho_2 g z - \rho_2 \omega^2 r^2/2 = C_2. \qquad (3.10.6)$$

Determinarea constantei C_2 se face din condiţia că volumul cuprins sub această suprafaţă este $\mathcal{V}_2 = \pi R^2 h_2$. Ca şi în cazul precedent,

$$\mathcal{V}_2 = \int d\mathcal{V}_2 = \int_0^R z_2 2\pi r dr,$$

în care $z_2 = \frac{1}{\rho_2 g}\left(C_2 - p_0 + \rho_2 \frac{\omega^2 r^2}{2}\right)$. Se obţine

$$C_2 = p_0 + \rho_2 g h_2 - \rho_2 \frac{\omega^2 R^2}{4}.$$

Cu aceasta, relaţia (3.10.6), care reprezintă suprafaţa liberă, devine

$$\rho_2 g(z - h_2) + \frac{\rho_2 \omega^2}{4}(R^2 - 2r^2) = 0. \qquad (3.10.7)$$

Relaţiile (3.10.5) şi (3.10.7) pot fi explicitate şi se scrie :

$$-\rho_1 g z + \rho_1 \frac{\omega^2}{2} r^2 = p_0 - p_{at} - \rho_1 g(h_1 + h_2) + \frac{\rho_1 \omega^2}{4} R^2; \qquad (3.10.8)$$

$$-\rho_2 g z + \rho_2 \frac{\omega^2}{2} r^2 = -\rho_2 g h_2 + \frac{\rho_1 \omega^2}{4} R^2. \qquad (3.10.9)$$

Relaţiile (3.10.8) şi (3.10.9) reprezintă aceeaşi suprafaţă şi condiţia aceasta se scrie considerînd coeficienţii celor două ecuaţii proporţionali, de unde rezultă presiunea p_0

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_0 - p_{at} - \rho_1 g(h_1 + h_2) + \frac{\rho_1 \omega^2}{4} R^2}{-\rho_2 g h_2 + \frac{\rho_2 \omega^2}{4} R^2}.$$

Rezultă $p_0 = p_{at} + \rho_1 g h_1$, deci aceeaşi repartiţie a presiunii ca în repaus absolut.

Ţinînd seama de valoarea constantei C_2 şi presiunii p_0, relaţia (3.10.2) devine

$$p - p_{at} + \rho_2 g\left(z - h_2 - \frac{\rho_1}{\rho_2} h_1\right) + \frac{\rho_1}{4}\omega^2(R^2 - 2r^2) = 0. \qquad (3.10.10)$$

Deci ecuaţia suprafeţei libere (3.10.4) devine

$$z = 0{,}3 - 11{,}17\,(0{,}01 - 2r^2), \text{ pentru } r \leqslant 0{,}1 \text{ m}, \qquad (3.10.11)$$

Scanned with OKEN Scanner

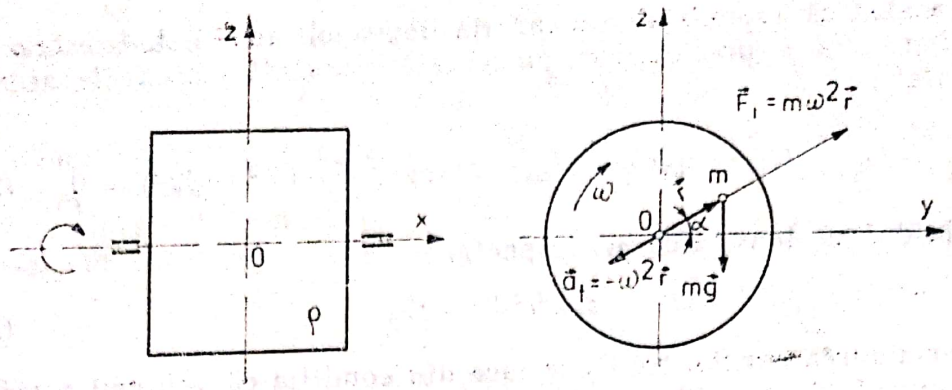


Fig. 3.11.

iar ecuația suprafeței de separație (3.10.6) este

$$z = h_2 - \frac{\omega^2}{4g}(R^2 - 2r^2),$$

adică $z = 0{,}15 - 11{,}17(0{,}01 - 2r^2)$, pentru $\leqslant 0{,}1$ m. (3.10.12)

Se observă că ambele suprafețe izobare sînt paraboloizi de rotație.

Problema 3.11. Un vas cilindric închis, plin cu un lichid cu densitatea $\rho = 1\,000$ kg/m³ și avînd diametrul $D = 300$ mm, se rotește în jurul axei sale orizontale cu turația constantă $n = 200$ rot/min. Se cere :

1) să se determine forma suprafețelor izobare ;
2) să se determine repartiția presiunii în interiorul cilindrului ;
3) să se determine punctul în care presiunea este minimă.

Rezolvare : 1) Deoarece vasul este închis și plin cu lichid, deci nu are suprafață liberă, lichidul din vas se găsește în repaus față de pereții vasului (repaus relativ), iar ecuația fundamentală este în acest caz (3.1.1)

$$p + \rho\Pi_T = \text{const.}$$

În acest caz, proiecțiile forței masice unitare $\vec{f}$ și ale accelerației de transport $\vec{a}_t$ sînt :

$$f_x = 0\,; \quad f_y = 0\,; \quad f_z = -g, \tag{3.11.1}$$

respectiv $a_{tx} = 0\,; \quad a_{ty} = -r\omega^2\cos\alpha = -y\omega^2\,; \quad a_{tz} = -r\omega^2\sin\alpha =$

$$= -z\omega^2 \tag{3.11.2}$$

Cu aceste expresii, potențialul total $\Pi_T(\vec{r})$ este

$$\Pi_T(\vec{r}) = -\frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2) + gz = \text{const.} \tag{3.11.3}$$

Suprafețele izobare sînt și suprafețe echipotențiale, deci ecuația lor este $\Pi_T(\vec{r}) = C_1$, adică

$$y^2 + z^2 - \frac{2g}{\omega^2}z = C, \tag{3.11.4}$$

care, în planul yOz, sînt cercuri cu centrul pe axa Oz în punctul de cotă $z_c = g/\omega^2 = 9{,}81/(\pi\,200/30)^2 = 0{,}022$ m.

Scanned with OKEN Scanner

Deci suprafețele izobare sînt cilindri, iar axa lor, paralelă cu Ox, trece prin punctul C, ale cărui coordonate în planul yOz sînt $y_c = 0$, $z_c = 0{,}022$ m.

2) Pentru determinarea repartiției presiunii în interiorul lichidului, se înlocuiește expresia potențialului total (3.11.3) în ecuația fundamentală și rezultă

$$p + \rho g z - \frac{\rho\omega^2}{2}(y^2 + z^2) = C_2,$$

respectiv $p = C_2 - \rho g z + \frac{\rho\omega^2}{2}(y^2 + z^2)$.

Pentru determinarea constantei C_2, se pune condiția că forța exercitată asupra unui capac lateral al cilindrului este aceeași în repaus absolut și relativ, deoarece accelerația de transport nu are o componentă normală la planul capacului. Mărimea forței de presiune pe un capac este

$$F_p = \int_S p\,dA = \int_S \left[C_2 - \rho g z + \frac{\rho\omega^2}{2}(y^2 + z^2)\right] dA$$

Pentru rezolvarea integralei se folosesc coordonatele polare, astfel rezultă $y = r\cos\alpha$ și $z = r\sin\alpha$ și se obține

$$F_p = \int_0^{2\pi}\int_0^R \left(C_2 - \rho g r\sin\alpha + \frac{\rho\omega^2}{2}r^2\right) r\,dr\,d\alpha,$$

unde $R = D/2$. Efectuînd integrala se obține

$$F_p = \pi C_2 R^2 + \pi\rho\omega^2\frac{R^4}{4}.$$

În repaus relativ, forța de presiune este

$$F_p = \rho g h_G A = \rho g \pi R^2 R = \rho g \pi R^3.$$

Egalînd cele două expresii ale forței de presiune, se obține

$$C_2 = \rho g R - \frac{\rho\omega^2 R^2}{2},$$

și, știind că $y^2 + z^2 = r^2$, se obține expresia presiunii

$$p = \rho g(R - z) + \frac{\rho\omega^2}{2}(r^2 - R^2). \qquad (3.11.5)$$

Expresia (3.11.5) reprezintă presiunea relativă. Primul termen reprezintă variația hidrostatică a presiunii peste care se suprapune efectul rotației — al doilea termen.

3) Pentru determinarea punctului în care presiunea este minimă, se scrie expresia presiunii (3.11.5) sub forma

$$p = \rho g(R - z) + \frac{\rho\omega^2}{2}(y^2 + z^2 - R^2).$$

Pentru determinarea minimului funcției $p(y, z)$, se caută soluții ale sistemului

$$\partial p/\partial y = 0\,;\ \partial p/\partial z = 0, \qquad (3.11.6)$$

cu condițiile $(\partial^2 p/\partial y^2)\cdot(\partial^2 p/\partial z^2) - \partial^2 p/\partial y\partial z > 0$ (3.11.7)

și $\partial^2 p/\partial y^2 > 0$.

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz, sistemul (3.11.6) devine

$$\begin{cases} \rho\omega^2 y = 0 \\ -\rho g + \rho\omega^2 z = 0, \end{cases}$$

adică $y = 0$; $z = g/\omega^2$, iar valoarea presiunii minime este

$$p_{min} = p(0,\ g/\omega^2) = \rho g R - \frac{\rho g^2}{2\omega^2} - \frac{\rho\omega^2}{2} R^2.$$

Pentru a fi într-adevăr un minim trebuie îndeplinite condițiile (3.11.7), adică.

$$(\rho\omega^2)^2 > 0 \text{ și } \rho\omega^2 > 0.$$

Deci este un minim al funcției $p(y, z)$.

Punctul de minim putea fi determinat și intuitiv, deoarece este centrul cercurilor care reprezintă suprafețele izobare, deci este un extrem al funcției.

Problema 3.12. Cisterna din figura 3.12 are diametrul $D = 1{,}2$ m și lungimea $L = 2{,}5$ m și conține țiței cu densitatea $\rho = 1\,000$ kg/m³ până la înălțimea $b = 1$ m. Cisterna se deplasează orizontal cu accelerația constantă $a = 2$ m/s².

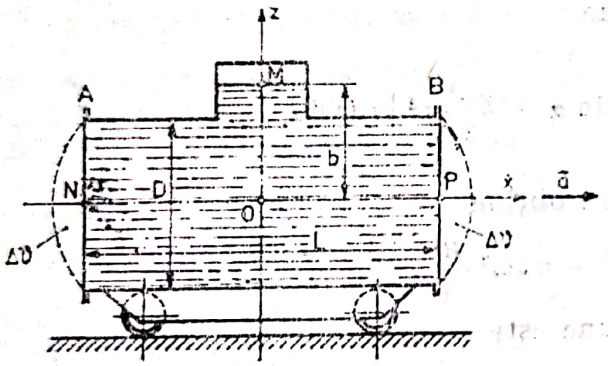


Fig. 3.12.

1) Să se determine forțele de presiune pe capacele laterale A și B ale cisternei.

2) Să se determine cum se modifică aceste forțe dacă se înlocuiesc capacele plane cu unele sferice. Mărirea volumului cisternei la această înlocuire este $2\Delta\mathcal{V}$, unde $\Delta\mathcal{V} = 0{,}2$ m³.

Rezolvare : 1) Potențialul complex al mișcării este

$$\Pi_T = ax + gz + \text{const.} \qquad (3.12.1)$$

Cu aceasta, repartiția presiunii devine

$$p + \rho ax + \rho gz = C_1. \qquad (3.12.2)$$

Suprafața liberă a lichidului este suprafața izobară pe care presiunea este p_{at}, adică

$$p_{at} + \rho ax + \rho gz = C_1.$$

Pentru determinarea constantei C_1, se scrie conservarea volumului de lichid din cisternă, atît în repaus absolut, cît și în repaus relativ. Suprafețele izobare sînt plane paralele cu axa Oy. Condiția de conservare a volumului este echivalentă cu a scrie că suprafața liberă trece prin punctul M ($x_M = 0$, $z_M = b$), deci

$$p_{at} + \rho gb = C_1.$$

Înlocuind această valoare a constantei în relația (3.12.2), rezultă repartiția presiunii

$$p = p_{at} + \rho g(b - z) - \rho ax. \qquad (3.12.3)$$

S-au considerat pereţii cisternei suficient de înalţi, astfel încît lichidul din cisternă să nu se verse.

Pentru determinarea forţelor pe capacele plane A şi B, se scrie

$$F_p = p_G A,$$

în care p_G este presiunea în centrul de greutate al suprafeţei, iar A este aria suprafeţei.

Presiunile în centrele de greutate $N(z_N = 0,\ x_N = -L/2)$, respectiv $P(z_p = 0,\ x_p = L/2)$, au expresiile:

$$p_N = \rho g b + \rho a L/2;$$

$$p_P = \rho g b - \rho a L/2,$$

unde s-au scris presiunile relative. Cu aceasta, forţele de suprapresiune pe capace sînt

$$F_{pA} = p_N A = \frac{\pi D^2}{4}(\rho g b + \rho a L/2) = \frac{1{,}2^2}{4}(9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 1 + 2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}25),$$

$$F_{pA} = 13{,}92 \text{ kN},$$

$$F_{pB} = p_P A = \frac{\pi D^2}{4}(\rho g b - \rho a L/2) = \frac{1\,2^2}{4}(9{,}81 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}25),$$

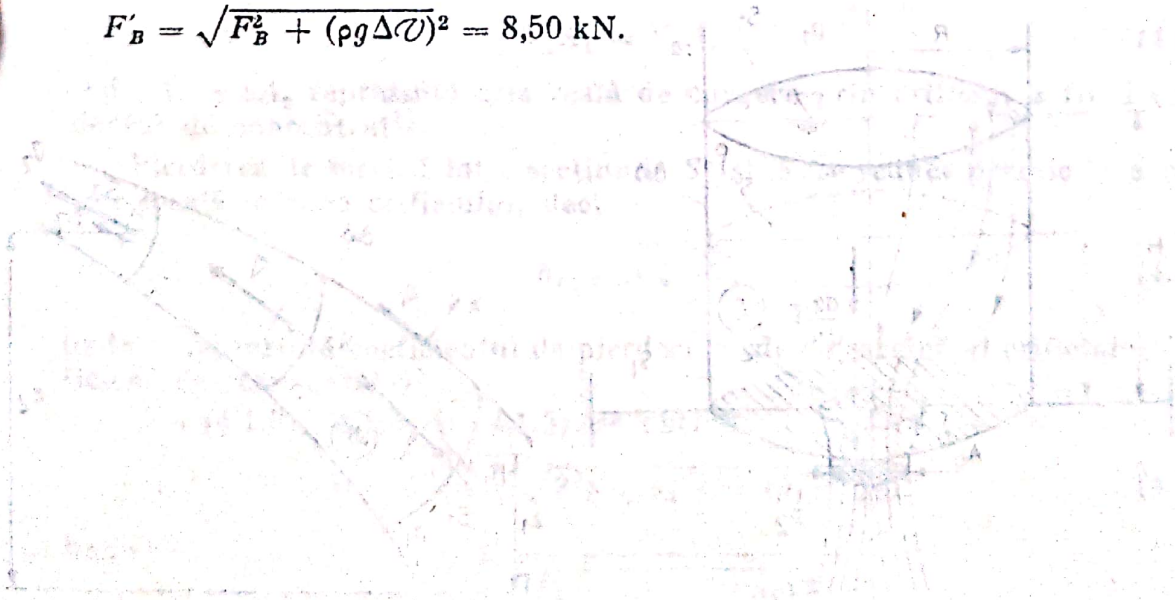
$$F_{pB} = 8{,}27 \text{ kN}.$$

2) Pentru cazul în care capacele plane se înlocuiesc cu capace sferice, determinarea forţei pe capace se face închizînd calota sferică cu un plan şi scriind că forţa pe capacul sferic este alcătuită din forţa pe planul care închide capacul adunată vectorial cu greutatea lichidului aflat între capac şi plan

$$F_G = \rho g \Delta \mathcal{V}.$$

Astfel $F'_A = \sqrt{F_A^2 + (\rho g \Delta \mathcal{V})^2} = 14{,}06$ kN,

$F'_B = \sqrt{F_B^2 + (\rho g \Delta \mathcal{V})^2} = 8{,}50$ kN.



4

CURGERI EFLUENTE DIN REZERVOARE PRIN ORIFICII ȘI AJUTAJE

Problema 4.1. Să se determine debitul printr-un orificiu mic de rază r practicat în fundul unui rezervor circular de rază R, figura 4.1, *a*, în care se găsește un fluid de densitate ρ la înălțimea H constantă. Care este timpul de golire al rezervorului dacă pe suprafețele S_1 și S_2 acționează aceeași presiune. Aplicație numerică : $R = 0{,}75$ m, $r = 0{,}02$ m $H = 1$ m, $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Pa, $p_2 = 1{,}8 \cdot 10^5$ Pa, $\rho = 1\,200$ kg/m^3, coeficientul de debit al orificiului $\mu = 0{,}6$.

Rezolvare : Se aplică relația lui Bernoulli pentru domeniul de fluid (fig. 4.1, *b*), în cazul micșorării nepermanente :

$$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{1}{g}\int_{S_1}^{S_2} \beta \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\, d\vec{s} + h_{r1,2} \qquad (4.1.1)$$

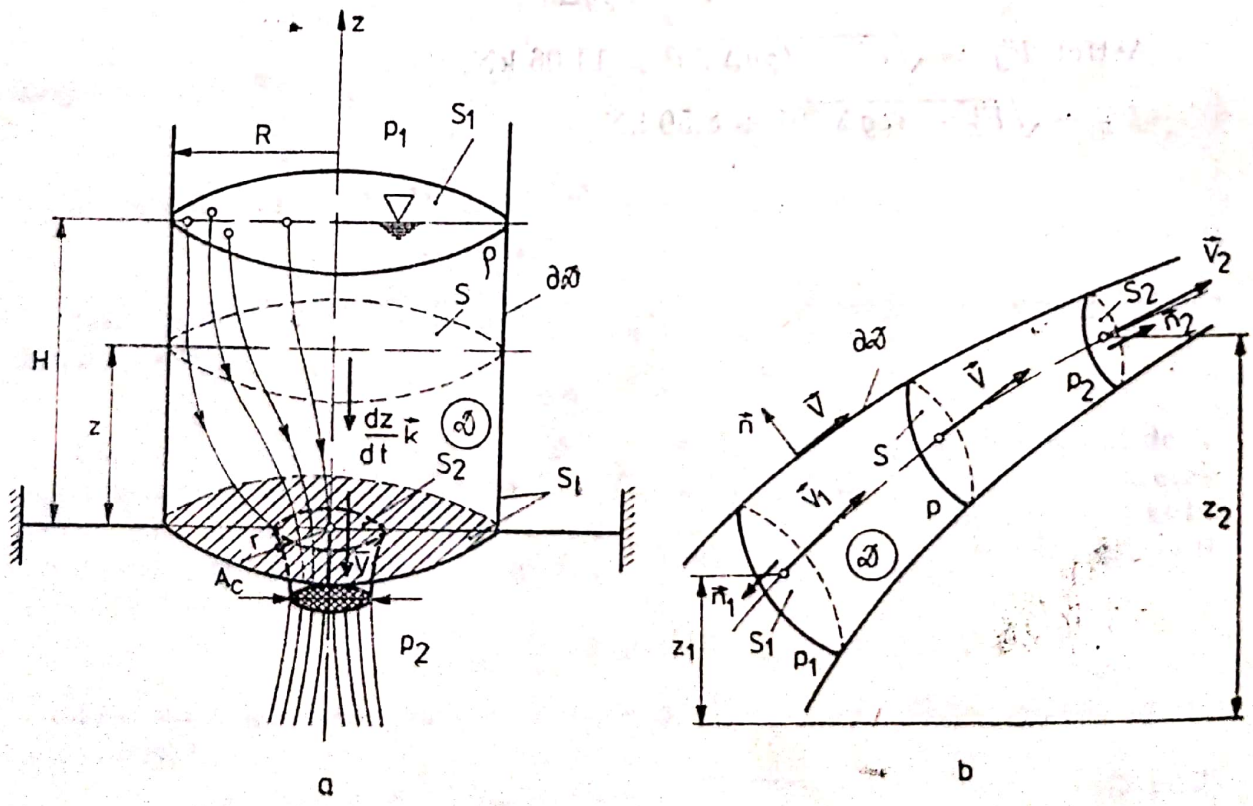


Fig. 4.1.

unde : V este viteza medie de curgere în secțiunea S, $V = \frac{Q}{A}$

α — coeficientul lui Corolis care ține seama de neuniformitatea vitezei în secțiunea de curgere ;

β — coeficientul lui Boussinesq $\beta = \frac{2+\alpha}{3}$;

h_r — pierderea de sarcină între secțiunile S_1 și S_2.

Valoarea coeficientului α depinde de felul curgerii și de secțiunea de curgere. La conducte circulare, pentru mișcarea laminară $\alpha = 2$ și pentru mișcarea turbulentă $\alpha \cong 1$. (Dacă nu se fac precizări suplimentare în aplicațiile tehnice se consideră $\alpha = 1$).

În (4.1.1) termenul care ține seama de nepermanența mișcării mai poate avea următoarele forme :

$$\frac{1}{g}\int_{S_1}^{S_2}\beta\frac{\partial v}{\partial t}\,ds = \frac{1}{g}\frac{\partial Q}{\partial t}\int_{S_1}^{S_2}\frac{\beta}{A(s)}\,ds = \frac{1}{g}\frac{dV_1}{dt}\int_{S_1}^{S_2}\beta\frac{A_1}{A(s)}\,ds = \frac{1}{g}\frac{dV_2}{dt}\int_{S_1}^{S_2}\beta\frac{A_2}{A(s)}\,ds. \tag{4.1.2}$$

Principiul conservării masei aplicat domeniului $\mathcal{D}$ (ecuația de continuitate), pentru un fluid incompresibil și omogen, este

$$Q_1 = Q_2,$$

unde $Q = \int_S \vec{v}\,\vec{n}\,dA$ reprezintă debitul volumic prin tubul de curent considerat.

Pentru calculul debitului care curge prin orificiul rezervorului în cazul menținerii constante a nivelului (mișcarea permanentă), se aplică relația (4.1.1) între punctele *1* și *2* situate pe suprafețele S_1 și S_2,

$$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + H = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + h_{r1-2}. \tag{4.1.3}$$

Din ecuația de continuitate rezultă

$$V_1 A_1 = V_2 A_c, \tag{4.1.4}$$

unde $A_c = \varepsilon A_2$ reprezintă aria reală de curgere prin orificiu, ε fiind coeficientul de concentrație.

Pierderea de sarcină între secțiunile S_1 și S_2 se reduce practic la o pierdere locală în zona orificiului, deci

$$h_{r\,1,2} = \zeta\frac{V_2^2}{2g}, \tag{4.1.5}$$

unde ζ reprezintă coeficientul de pierderi locale de sarcină al orificiului (coeficient de rezistență).

Din (4.1.3), (4.1.4) și (4.1.5), se obține

$$V = V_2 = \varphi\sqrt{2/\rho}\,\sqrt{\rho g H + (p_1 - p_2)}, \tag{4.1.6}$$

unde

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\zeta + \alpha_2 - \alpha_1\varepsilon^2\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \tag{4.1.7}$$

poartă denumirea de coeficient de viteză.

Scanned with OKEN Scanner

Deci debitul prin orificiu are expresia

$$Q = V_e A_2 = \mu \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gH + \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} \tag{4.1.8}$$

$\mu = \varphi\varepsilon$ reprezentînd coeficientul de debit al orificiului.

Pentru fluidul ideal, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\zeta = 0$ cu $p_1 = p_2 = p_{at}$, se obţine din (4.1.6) expresia vitezei în orificiu (cu $V_1 \ll V$)

$$V = \sqrt{2gH}, \quad Q = \varepsilon \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gH}, \tag{4.1.9}$$

cunoscută sub denumirea de formula lui Torricelli.

Pentru determinarea timpului de golire al rezervorului se aplică domeniului $\mathcal{D}(t)$ relaţia de conservare a energiei sub forma

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\mathcal{D}(t)} \frac{1}{2}\rho V^2 d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{D}(t)} \mathcal{P} d\mathcal{V}\right] - P_u - P_d = 0, \tag{4.1.10}$$

cu $E_c = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2}\rho V^2 d\mathcal{V}$ energia cinetică a fluidului,

$E_p = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{P} d\mathcal{V}$ energia potenţială a fluidului,

$$\mathcal{P} = p + \rho\Pi, \ \Pi = gz + \text{const.}$$

P_u : puterea utilă furnizată de fluid mediului exterior ;
P_d : puterea disipată de fluid.

Ţinînd seama de Anexa A.0, se obţine

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\mathcal{D}(t)} \frac{1}{2}\rho V^2 d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{D}(t)} p d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{D}(t)} \rho g z d\mathcal{V}\right) =$$

$$= -\int_S \left(\frac{1}{2}V^2 + \frac{p}{\rho} + gz\right)\rho \vec{v}\vec{n} dA - P_u - P_d. \tag{4.1.11}$$

Se fac următoarele ipoteze:

1. Puterea disipată prin frecare este zero, $P_d = 0$.
2. Energia cinetică din rezervor este zero, $E_c = 0$.

Ţinînd seama de condiţiile la limită :

$$v = 0 \text{ pe } S_l ;$$

$$V_2 = V, \ V_1 = -\frac{dz}{dt}$$

(semnul minus apare datorită variaţiei inverse a axei Oz cu timpul) şi de faptul că presiunea este constantă pe o suprafaţă normală la liniile de curent, din (4.1.11), se obţine

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{D}(t)} \rho g z d\mathcal{V} = \int_{S_1} \frac{1}{2} V^2 \rho V dA - \int_{S_1} p \frac{dz}{dt} dA_1 - \int_{S_1} \rho g z \frac{dz}{dt} dA_1 +$$

$$+ \int_{S_2} \rho g z V dA_2 - P_u. \tag{4.1.12}$$

Puterea utilă are expresia $P_u = p\pi R^2\left(-\frac{dz}{dt}\right)$ (4.1.13)

(forța de presiune înmulțită cu viteza de coborîre a suprafeței libere).

Cu $\int_{\mathcal{D}} \rho g z d\mathcal{V} = \int_0^z \rho g z \pi R^2 dz = \rho g \pi R^2 \frac{z^2}{2}$, pentru o înălțime

z, relația (4.1.12) devine

$$\rho g \pi R^2 z \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2}(\sqrt{2gz})^2 \rho \sqrt{2gz}\,\pi r^2 + \rho g z \frac{dz}{dt}\pi R^2 + \rho g z \sqrt{2gz}\pi r^2$$

$$\rho g \pi R^2 z \frac{dz}{dt} = \rho g z \sqrt{2gz}\pi r^2,$$

$$dt = \int_0^H \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}}\, dz.$$

Deci timpul de golire are expresia :

$$t_{g0} = 2(R/r)^2\sqrt{H/2g}. \quad (4.1.14)$$

În realitate, dacă se ține seama de aproximațiile făcute, rezultă

$$t_g = 2\varkappa^2\varphi(\varkappa)\sqrt{\frac{H}{2g}}, \quad (4.1.15)$$

unde $\varkappa = \frac{R}{r}$ și $\varphi(\varkappa) = 1/2\sqrt{\frac{\varkappa^4 - 2}{\varkappa^4}}\int_0^1 \frac{dx}{x - x\varkappa^4}$, (4.1.16)

reprezentînd o funcție de corecție care ține seama de nepermanența mișcării (nu și de pierderi).

Observație. Determinarea timpului de golire se poate face plecînd și de la ecuația de continuitate sub forma :

$$-\frac{dz}{dt}A_1 = \mu A_2\sqrt{2gz}, \quad (4.1.17)$$

$$t'_g = 2\left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{H}{2g}}.$$

Rezolvarea este mult mai rapidă, însă relația (4.1.8), care s-a folosit în (4.1.17), este valabilă numai pentru mișcarea permanentă (relația lui Bernoulli (4.1.1) este valabilă numai în cazul în care potențialul II este constant în timp, deci cînd se aplică unui cîmp în care domeniul $\mathcal{V}$ este fixat).

Dacă suprafața S_1 este constantă în timp sau are o variație uniformă, $\varphi(\varkappa) = 1$, cele două rezultate sînt identice. Dacă $S_1 = S_1(z)$, cu o variație neuniformă, folosirea relației (4.1.17) introduce erori de pînă la 30%*.

* Dan Gh. Ionescu ș.a. Mecanica fluidelor și mașini hidraulice. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1983.

Aplicație numerică :

$$Q = 0{,}6\pi 0{,}02^2\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 1+\frac{2(2\cdot 10^5-1{,}8\cdot 10^5)}{1\,200}} = 4{,}54\cdot 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s} = 16{,}35\ \text{m}^3/\text{h},$$

$$t_{90} = 2\left(\frac{0{,}75}{0{,}02}\right)^2\sqrt{\frac{1}{2\cdot 9{,}81}} \cong 899\ \text{s} \cong 15\ \text{minute},$$

$$t'_{90} = t_{90}/\mu = 25\ \text{minute}$$

$$x = 37{,}5,\quad \varphi(3{,}75) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{37{,}5^4-2}{37{,}5^4}}\int_0^1 \frac{dx}{x-x^{37{,}5^4}} \cong \frac{1}{2}2\sqrt{x}\Big|_0^1 \cong 1.$$

Problema 4.2. Două rezervoare prismatice R_1 și R_2 sînt unite printr-un orificiu înecat cu aria secțiunii $A_0 = 5\ \text{cm}^2$ și care are un coeficient de debit $\mu = 0{,}62$, ca în figura 4.2. Aria secțiunii orizontale a rezervorului R_1 este $A_1 = 1\ \text{m}^2$, iar a rezervorului R_2 este $A_2 = 0{,}5\ \text{m}^2$.

La un moment dat, diferența de nivel între suprafețele libere ale apei din cele două rezervoare este $H = 1{,}2$ m. Să se determine intervalul de timp în care lichidul ajunge la același nivel în ambele rezervoare.

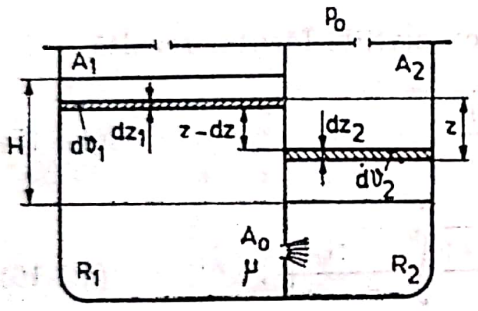


Fig. 4.2.

Rezolvare : Fie un nivel oarecare, la un timp intermediar, la care denivelarea suprafețelor libere este z, iar după un interval elementar de timp dt, această denivelare este $z-dz$, ca în figură. Variația denivelării dz este alcătuită din scăderea nivelului în rezervorul R_1, dz_1 și, respectiv, creșterea nivelului în rezervorul R_2, dz_2, astfel încît să se poată scrie

$$dz = dz_1 + dz_2, \tag{4.2.1}$$

iar din ecuația continuității rezultă că volumul golit din primul rezervor $d\mathcal{V}_1 = A_1 dz_1$ este egal cu volumul umplut în cel de-al doilea $d\mathcal{V}_2 = A_2 dz_2$, adică

$$A_1\,dz_1 = A_2\,dz_2. \tag{4.2.2}$$

Deci această variație a volumului $d\mathcal{V}_1$ (sau $d\mathcal{V}_2$) este produsă de curgerea apei prin orificiul dat. Dacă se consideră acest orificiu ca un orificiu mic și se neglijează viteza de coborîre a suprafeței libere, debitul evacuat de orificiu la momentul t este

$$Q_z = \mu A_0\sqrt{2gz},$$

iar volumul evacuat în intervalul elementar de timp dt este

$$d\mathcal{V} = \mu A_0\sqrt{2gz}\,dt,$$

volum egal cu cel golit din rezervorul R_1 sau umplut în rezervorul R_2, deci rezultă

$$-A_1\,dz_1 = \mu A_0\sqrt{2gz}\,dt, \tag{4.2.3}$$

(semnul minus se referă la scăderea nivelului în rezervorul R_1).

Scanned with OKEN Scanner

Din relația (4.2.2), rezultă că $dz_2 = (A_1/A_2)\,dz_1$, iar din relația (4.2.1), se obține $dz = dz_1(1 + A_1/A_2)$, deci

$$dz_1 = \frac{A_2}{A_1 + A_2}\,dz,$$

de unde rezultă

$$-\frac{A_1A_2}{A_1 + A_2}\,dz = \mu A_0\sqrt{2gz}\,dt.$$

Se separă variabilele

$$dt = \frac{-1}{\mu A_0\sqrt{2g}}\,\frac{A_1A_2}{A_1 + A_2}\,z^{-1/2}\,dz$$

și integrînd rezultă

$$t = \frac{1}{\mu A_0\sqrt{2g}}\,\frac{A_1A_2}{A_1 + A_2}\int_0^H z^{-1/2}\,dz,$$

adică

$$t = \frac{2\sqrt{H}}{\mu A_0\sqrt{2g}}\,\frac{A_1A_2}{A_1 + A_2} = \frac{2\cdot\sqrt{1{,}2}\cdot 1\cdot 0{,}5}{0{,}62\cdot 5\cdot 10^{-4}\sqrt{2\cdot 9{,}81}\,(1 + 0{,}5)} = 532\ \text{s},$$

deci

$$t = 8\ \text{min}\ 52\ \text{s}.$$

Problema 4.3. Pe o conductă cu diametrul $D = 125$ mm, se montează o diafragmă cu diametrul $d = 50$ mm. La momentul $-\varepsilon t_0$, vana V este închisă, după care, la momentul $+\varepsilon t_0$, este deschisă total ($\varepsilon \to 0$). Dacă prin conductă circulă apă și în manometrul diferențial U se află mercur, să se studieze mișcarea mercurului pînă se stabilizează denivelarea la valoarea $h = 28$ mm (fig. 4.3).

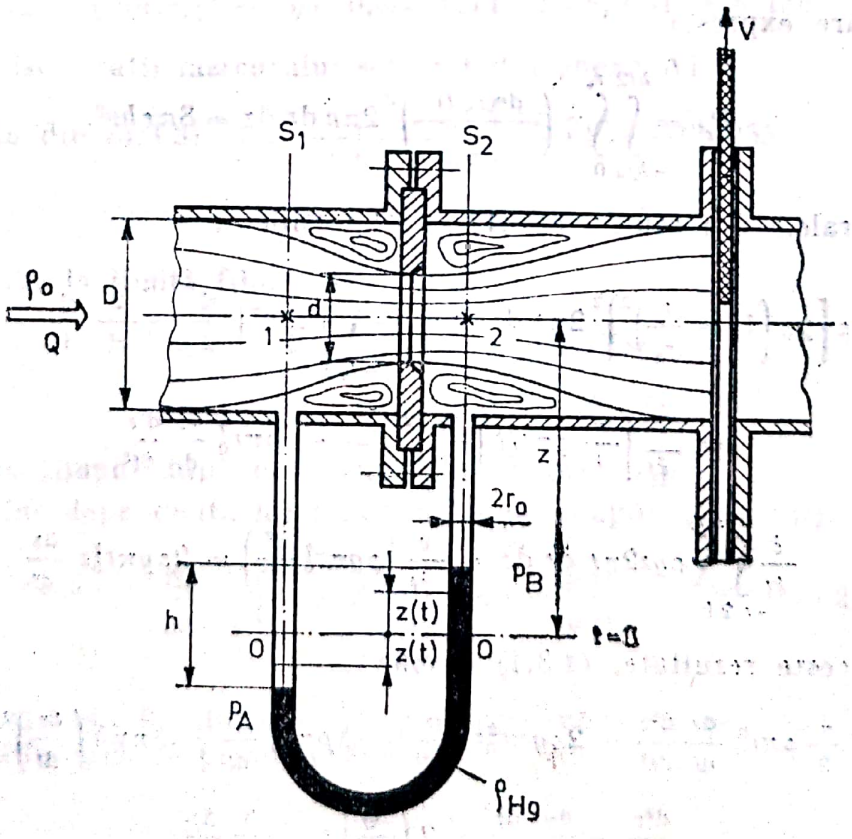


Fig. 4.3.

Să se determine mărimea razei r_0 a tubului manometric, pentru care se atinge pragul critic, adică fluidul se mișcă spre poziția finală în maniera cea mai rapid monotonă. Să se calculeze debitul care trece prin conductă considerîndu-se lichidul incompresibil ; coeficientul de debit al diafragmei $\mu = 0{,}628$.

Rezolvare : Se consideră că, la deschiderea instantanee a vanei, se aplică brusc, pe suprafața aflată în repaus a mercurului din tub, o diferență de presiune $\Delta p' = p_A - p_B$, care rămîne constantă în timp (mișcarea apei în conductă fiind permanentă). Mișcarea mercurului în tub fiind nepermanentă, se aplică relația de conservare a energiei (4.1.10). Ținînd cont că $\Delta p = \text{const.}$ iar vitezele mercurului în cele două ramuri ale tubului sînt egale în modul, dar cu orientare contrară (din ecuația de continuitate (4.1.3)), relația (4.1.11) are forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-h/2}^{h/2}\int_{0}^{r_0}\frac{1}{2}\rho v^2 2\pi r\ dr\ dz + \int_{-z/2}^{z/2}\int_{0}^{r_0}\rho g z 2\pi r\ dr\ dz\right) = -P_u - P_d, \qquad (4.3.1)$$

unde v reprezintă viteza medie de oscilație a mercurului.

Presupunînd mișcarea mercurului în tub laminară, se admite o distribuție de viteze de forma

$$v(r, t) = 2v[1 - (r/r_0)^2],\ v = dz/dt. \qquad (4.3.2)$$

Expresia puterii transmise mediului exterior este

$$P_u = -\Delta p' \pi r_0^2 v. \qquad (4.3.3)$$

Funcția de disipație (Φ) se reduce la $\Phi = \eta\left(\frac{dv(r, t)}{dr}\right)^2$ deci puterea disipată are expresia

$$P_d = \int_{-h/2}^{h/2}\int_{0}^{r_0}\eta\left(\frac{dv(r, t)}{dr}\right)^2 2\pi r\ dr\ dz = 8\pi\eta h v^2. \qquad (4.3.4)$$

Integralele din relația (4.3.1) au expresiile :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{0}^{r_0}\frac{1}{2}\rho\left[2v\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^2\right]^2 2\pi r\ dr\ dz = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-h/2}^{h/2} 4\pi\rho v^2\left(\frac{r_0^2}{2} - \frac{2}{r_0^2}\frac{r_0^4}{4} + \frac{1}{r_0^4}\frac{r_0^6}{6}\right)dz =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{4}{6}\rho\pi r_0^2 h\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{4}{3}\rho\pi r_0^2\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-z/2}^{z/2}\int_{0}^{r_0}\rho g z 2\pi r\ dr\ dz = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho g\pi r_0^2\frac{z^2}{2}\right) = 2\rho g\pi r_0^2 z\frac{dz}{dt}.$$

Cu aceste rezultate, (4.3.1) devine

$$\frac{4}{3}\rho\pi r_0^2\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} + 2\rho g\pi r_0^2 z\frac{dz}{dt} = \Delta p\pi r_0^2\frac{dz}{dt} - 8\pi\eta h\left(\frac{dz}{dt}\right)^2; \qquad (4.3.5)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{6\nu}{r_0^2}\frac{dz}{dt} + 2\left(\frac{3g}{4h}\right)z = \frac{3}{4}\frac{\Delta p}{\rho h}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se face schimbarea de variabilă $y = 2z - \Delta p/(\rho g)$.

Rezultă ecuația diferențială omogenă de ordinul doi cu coeficienți constanți

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{6\nu}{r_0^2}\frac{dy}{dt} + \frac{3g}{2h}y = 0. \tag{4.3.6}$$

Soluția generală a ecuației (4.3.6) este

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

sau $y = C_1' e^{\lambda t} + C_2' t e^{\lambda t}$ cînd $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$; λ_1, λ_2 fiind rădăcinile ecuației caracteristice:

$$\lambda^2 + \frac{6\nu}{r_0^2}\lambda + \frac{3g}{2h} = 0, \tag{4.3.7}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\frac{-6\nu}{r_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{6\nu}{r_0^2}\right)^2 - \frac{6g}{h}}\right]. \tag{4.3.8}$$

Deci în mișcare pot apărea trei cazuri:

1) $\Delta = (6\nu/r_0^2)^2 - 6g/h > 0$, sistemul este „supraamortizat"; fluidul se mișcă lent către poziția finală;

2) $(6\nu/r_0^2)^2 < 6g/h$, sistemul este „neamortizat"; fluidul oscilează amortizat în tub;

3) $(6\nu/r_0^2)^2 = 6g/h$, sistemul atinge „pragul critic", fluidul se deplasează fără oscilații la cota finală h.

Din această condiție, rezultă valoarea razei tubului

$$r_0 = \sqrt[4]{6h\nu^2/g} = \sqrt[4]{6 \cdot 0{,}058 \cdot 0{,}114 \cdot 10^{-6}/9{,}81} \cong 8 \text{ mm}.$$

(valoarea viscozității mercurului s-a luat din anexa A1).

Rezultă din (4.3.8) $\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{-6 \cdot 0{,}114 \cdot 10^{-6}}{0{,}008^2}\right) = -0{,}0053.$

Deci $y = C_1' e^{-0{,}0053\, t} + C_2' t\, e^{-0{,}0053\, t}$.

Condițiile la limită fiind:

$$t = 0, \quad z = 0, \quad y = -\Delta p/(\rho g);$$
$$t = t_0 \quad z = h/2, \quad y = h - \Delta p/(\rho g);$$

unde t_0 este timpul după care oscilațiile în tub dispar.

Se obține dependența lui z în funcție de timpul t, $z = z(t)$

$$-\frac{\Delta p}{\rho g} e^{-0{,}0053\, t} + \frac{\Delta p}{\rho g}\frac{1}{t_f}\left[1 + e^{0{,}0053\, t_f}\left(h - \frac{\Delta p}{\rho g}\right)\right] \cdot t e^{-0{,}0053\, t} = 2z - \frac{\Delta p}{\rho g} \tag{4.3.9}$$

În relația (4.3.9), după un timp t suficient de mare (teoretic $t \to \infty$), se obține diferența de presiune aplicată

$$\Delta p' = \rho g h. \tag{4.3.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru calculul debitului prin conductă, se aplică relaţia (4.1.3) cu $H = 0$

$$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho_a g} = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho_a g} + h_{r1,2}. \qquad (4.3.11)$$

Dacă se admite faptul că într-un fluid aflat în mişcare, într-un plan perpendicular pe liniile de curent, presiunea are o repartiţie hidrostatică, rezultă

$$p_A = p_1(z + h/2)\rho_a g\,;\; p_B = p_2 + (z - h/2)\rho_a g\,;$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho_a g} = h\left(\frac{\rho}{\rho_a} - 1\right). \qquad (4.3.12)$$

Se aplică ecuaţia de continuitate între secţiunile S_1 şi S_2

$$V_1 = V_2(d/D)^2 \qquad (4.3.13)$$

Din (4.3.13), (4.3.12) şi (4.3.11), se obţine

$$V_2 = \frac{1}{\sqrt{\zeta_2 + \alpha_2 - \alpha_1(d/D)^4}} \cdot \sqrt{2gh\left(\frac{\rho}{\rho_a} - 1\right)} = \varphi\sqrt{2gh\left(\frac{\rho}{\rho_a} - 1\right)}, \qquad (4.3.14)$$

unde s-a considerat pierderea de sarcină prin diafragmă

$$h_{r1,2} = \zeta_1 \frac{V_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{V_2^2}{2g}$$ şi φ coeficientul de viteză.

Debitul prin diafragmă are expresia

$$Q = \mu \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh\left(\frac{\rho}{\rho_a} - 1\right)} = \mu \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}, \qquad (4.3.15)$$

μ fiind coeficientul de debit al diafragmei care se determină, în funcţie de $\beta = d/D$ şi de numărul $\mathbf{Re}_D = \frac{V_1 D}{\nu_a}$, din STAS 7347-83, în funcţie de tipul diafragmei.

(În practică, pentru o valoare a lui $m = \beta^2$, se admite un număr **Re** iniţial, după care calculul se face iterativ).

Se obţine valoarea

$$Q = 0{,}628 \cdot \frac{\pi 0{,}05^2}{4}\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}028(13{,}6 - 1)} \cong 3{,}24 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s},$$

cu $$\beta = 0{,}4 \text{ şi } \mathbf{Re} = \frac{V_2 \cdot d}{\nu_a} = \frac{1{,}65 \cdot 0{,}05}{1 \cdot 10^{-6}} = 0{,}8 \cdot 10^5.$$

Observaţie : Valorile coeficientului de pierderi de sarcină ζ_1 se pot determina pentru $\mathbf{Re} > 10^5$ din diagrama din anexa A.4.1 (pentru $\mathbf{Re} > 10^5$*).

Problema 4.4. Vasul cilindric din figura 4.4 are diametrul interior $D_0 = 60$ mm şi conţine un lichid cu densitatea $\rho = 900$ kg/m³ şi viscozitatea dinamică η necunoscută. Lichidul curge prin tubul orizontal AB, având diametrul interior $D = 4$ mm şi lungimea $l = 400$ mm.

* I. E. Idelcik. Îndrumar pentru calculul rezistenţelor hidraulice. Bucureşti, Editura Tehnică, 1984.

Scanned with OKEN Scanner

Nivelul suprafeței libere coboară în timpul $T = 810$ s de la cota $h_1 = 360$ mm la cota $h_2 = 160$ mm. Neglijînd energia cinetică a fluidului la ieșirea din conductă și pierderile locale de sarcină, să se determine :

1) viscozitatea dinamică a lichidului ;

2) cota suprafeței libere la timpul $t = T/2$;

3) numărul Reynolds al mișcării în conductă la $t = 0$ și la $t = T/2$.

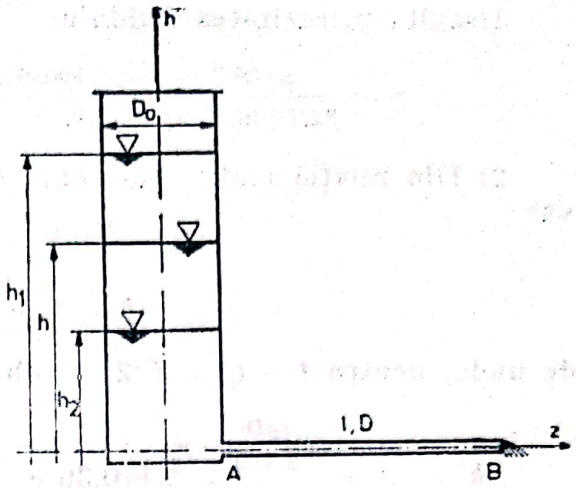


Fig. 4.4.

Rezolvare : 1) Bilanțul volumelor de fluid în vas exprimă egalitatea volumului datorit scăderii nivelului în vas și a volumului de fluid curs prin conductă în intervalul de timp dt :

$$-\frac{\pi D_0^2}{4}\,dh = Q\,dt,$$

în care s-a notat cu Q debitul prin conductă. Acesta poate fi exprimat, în cazul mișcării laminare, cu relația (7.1.12)

$$Q = -\frac{\pi D^4}{128\eta}\cdot\frac{dp}{dz},$$

unde s-a ales axa Oz în lungul conductei.

Dacă se neglijează viteza și pierderile de sarcină din vas, se poate scrie

$$dp/dz = -\rho g h/l,$$

h fiind înălțimea curentă a lichidului în vas. Deci

$$-\frac{\pi D_0^2}{4}\,dh = \frac{\pi D^4}{128\eta}\cdot\frac{\rho g h}{l}\,dt,$$

de unde

$$dt = -\frac{32\eta l D_0^2}{\rho g D^4}\cdot\frac{dh}{h}.$$

Cu aceasta, intervalul de timp, în care vasul se golește de la nivelul h_1 la nivelul curent h, este

$$t - t_0 = -\int_{h_1}^{h}\frac{32\eta l D_0^2}{\rho g D^4}\cdot\frac{dh}{h} = \frac{32\eta l D_0^2}{\rho g D^4}\ln\frac{h_1}{h},$$

deci timpul de golire al rezervorului este

$$t - t_0 = \frac{32\eta l D_0^2}{\rho g D^4}\ln\frac{h_1}{h}. \qquad (4.4.1)$$

Intervalul de timp, în care nivelul în vas scade de la înălțimea h_1 la înălțimea h_2, este

$$T = \frac{32\eta l D_0^2}{\rho g D^4}\ln\frac{h_1}{h_2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă viscozitatea fluidului

$$\eta = \frac{\rho g D^4 T}{32 l D_0^2 \ln h_1/h_2} = \frac{900 \cdot 9{,}81 \cdot (0{,}040)^4 \cdot 810}{32 \cdot 0{,}4 \cdot (0{,}06)^2 \ln 36/16} = 0{,}049 \text{ Pa s.}$$

2) Din relaţia (4.4.1), se poate scrie modul de variaţie al nivelului în vas

$$h = h_1 e^{-\frac{\rho g D^4}{32 \eta l D_0^2}(t - t_0)},$$

de unde, pentru $t - t_0 = T/2$, se obţine nivelul h', din vas

$$h' = h_1 e^{-\frac{\rho g D^4}{32 \eta l D_0^2} \cdot \frac{T}{2}} = 0{,}36\, e^{-\frac{900 \cdot 9{,}81 (0{,}004)^4}{32 \cdot 0{,}049 \cdot 0{,}4 (0{,}06)^2} \cdot 405} = 0{,}24 \text{ mm.}$$

3) Numărul Reynolds al mişcării în conductă se poate scrie

$$\text{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{4Q\rho}{\pi D \eta} = \frac{4\rho}{\pi D \eta} \cdot \frac{\pi D^4}{128 \eta} \cdot \frac{\rho g h}{l},$$

deci

$$\text{Re} = \frac{\rho^2 g D^3}{32 \eta^2 l} \cdot h.$$

La începutul mişcării ($t = 0$), înălţimea lichidului în vas este h_1 şi rezultă

$$\text{Re}_1 = \frac{\rho^2 g D^3}{32 \eta^2 l} h_1 = \frac{900^2 \cdot 9{,}81 (0{,}004)^3}{32 (0{,}049)^2 0{,}4} \cdot 0{,}36 = 5{,}96,$$

respectiv, la timpul $t - t_0 = T/2$, înălţimea lichidului din vas este h' de unde

$$\text{Re}' = \frac{\rho^2 g D^3}{32 \eta^2 l} h' = \frac{900^2 \cdot 9{,}81 (0{,}004)^3}{32 (0{,}049)^2 0{,}4} \cdot 0{,}24 = 3{,}97$$

Problema 4.5. Într-un rezervor închis se află ulei pînă la înălţimea $H = 2$ m (fig. 4.5). Dacă robinetul R se deschide instantaneu la un unghi $\alpha = 20°$, să se determine cota z_0, pînă la care se goleşte rezervorul. Care este timpul de golire şi debitul mediu scurs. Cum se poate obţine un debit constant în tot timpul curgerii ? Evoluţia aerului de la suprafaţa liberă a uleiului se consideră adiabatică cu parametrii iniţiali $\mathcal{V}_0 = 2$ m³ şi $p = p_{at} = 0{,}1$ MPa (exponentul adiabatic al aerului $\varkappa = 1{,}4$). Se cunosc : diametrul rezervorului $D = 0{,}75$ m, diametrul conductei de evacuare $d = 0{,}1$ m, densitatea uleiului $\rho = 880$ kg/m³. (Se neglijează pierderile liniare din rezervor şi din conductă, precum şi efectele tensiunii superficiale).

Rezolvare : Variaţia secţiunii de curgere a rezervorului este constantă în timp, deci se poate aplica relaţia (4.1.1), între punctul *0* şi *1* (fig. 4.5)

$$\frac{p_0}{\rho g} + \frac{V_0^2}{2g} + z = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{A_0}{g} \frac{dV_R}{dt} \int_{S_0}^{S_1} \frac{ds}{A(s)} + \frac{p_{at}}{\rho g} + (\zeta_0 + \zeta_R + \zeta_1) \frac{V_1^2}{2g}, \qquad (4.5.1)$$

unde ζ_0, ζ_R şi ζ_1 reprezintă coeficienţii de pierdere locală de sarcină la intrare în conductă, în robinet şi la ieşire din conductă la presiunea atmosferică.

Scanned with OKEN Scanner

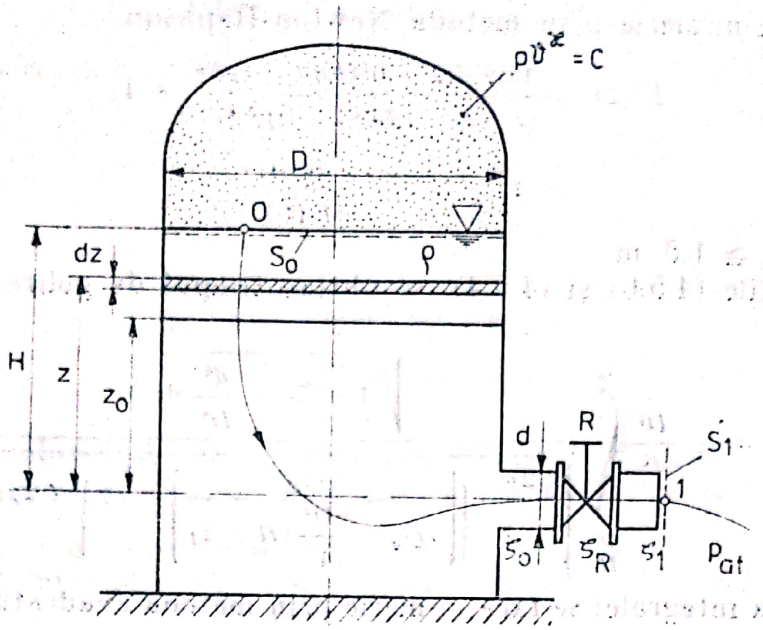


Fig. 4.5.

Evoluția aerului din rezervor este descrisă de ecuația

$$pV^x = p_{at}V_0^x = C. \tag{4.5.2}$$

Deci presiunea p_0 are expresia

$$p_0 = p_{at}\left[\frac{V_0}{V_0 + \frac{\pi D^2}{4}(H-z)}\right]^x. \tag{4.5.3}$$

Din ecuația de continuitate se obține

$$V_0 = -\frac{dz}{dt} = V_1 \cdot \frac{d^2}{D^2} \tag{4.5.4}$$

Rezultă

$$\frac{p_{at}}{\rho g}\left[\frac{V_0}{V_0 + \frac{\pi D^2}{4}(H-z)}\right]^x - \frac{p_{at}}{\rho g} + z = \frac{V_1^2}{2g}\left(1 + \zeta_0 + \zeta_R + \zeta_1 + \frac{d^2}{D^2}\right) \tag{4.5.5}$$

$$V_1 = \frac{\sqrt{\frac{2p_{at}}{\rho}\left[\left(\frac{V_0}{V_0 + \frac{\pi D^3}{4}(H-z)}\right)^x - 1\right] + 2gz}}{\sqrt{1 + \zeta_t - d^2/D^2}} \tag{4.5.6}$$

cu $$\zeta_t = \zeta_0 + \zeta_R + \zeta_1 = 0{,}5 + 1{,}84 + 0{,}62 = 2{,}96.$$

Cota z_0 se determină punînd condiția ca viteza în conductă să fie zero, $V_1 = 0$. Se obține ecuația

$$F(z) = \frac{30{,}57}{[2 + 0{,}442(2-z)]^{1{,}4}} - 11{,}58 + z = 0, \tag{4.5.7}$$

Scanned with OKEN Scanner

care se rezolvă numeric prin metoda Newton-Raphson

$$F'(z) = \frac{18{,}907(2 + 0{,}442(2 - z))^{0.4}}{(2 + 0{,}442(2 - z))^{1.4}} + 1,$$

$$z_{i+1} = z_i - \frac{F(z_i)}{F'(z_i)}$$

Rezultă $z_0 \cong 1{,}5$ m.

Din ecuațiile (4.5.6) și (4.5.4), se obține timpul de golire de la $z = H$ la $z = z_0$.

$$\mathrm{d}t = -\frac{D^2}{d^2} \int_H^{z_0} \frac{\sqrt{1 + \zeta_t - \frac{d^4}{D^4}}\, \mathrm{d}z}{\sqrt{\frac{2p_{a1}}{\rho}\left\{\left[\frac{\mathcal{V}_0}{\mathcal{V}_0 + \frac{\pi D^2}{4}(H - z)}\right]^{\varkappa} - 1\right\} + 2gz}}.$$

Rezolvarea integralei se face numeric prin metoda cvadratură gaussiană, în cinci puncte.

$$I = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b - a}{2} \sum_{k=1}^{n} D_k f(\mathrm{d}_k) \qquad (4.5.8)$$

unde $x = \frac{b + a}{2} + \frac{b - a}{2} d$; D_k coeficienții lui Gauss

$f(d_k) = F(x(d_k))$. Se obține

$$a = H,\ b = z_0,\ z = 1{,}75 - 0{,}25\, d$$

d	—0,90618	—0,53847	0	0,53847	0,90618
$z(d)$	1,9765	1,8846	1,7500	1,6154	1,5235
$f(d)$	18,33	20,70	26,43	41,73	277,4
D	0,23693	0,47863	0,56888	0,47863	0,23693

$$t_g \cong 28{,}74 \text{ s.} \qquad (4.5.9)$$

(Precizia rezultatului poate fi îmbunătățită dacă se aleg mai multe puncte pentru aplicarea cvadraturii gaussiene).

Debitul mediu scurs din rezervor este

$$Q_m = \frac{\mathcal{V}}{t_g} = \frac{(H - z_0)\pi D^2}{4t_g} = 0{,}0077 \text{ m}^3/\text{s}. \qquad (4.5.10)$$

Pentru a obține un debit constant în timpul curgerii, singurul element care se poate modifica în relația (4.5.6) este ζ_R. În organigrama de mai jos se indică următoarea procedură

Date : $Q = Q_0$, n, $k = 1$, $\zeta_R = \zeta_R(\alpha°)$

↓

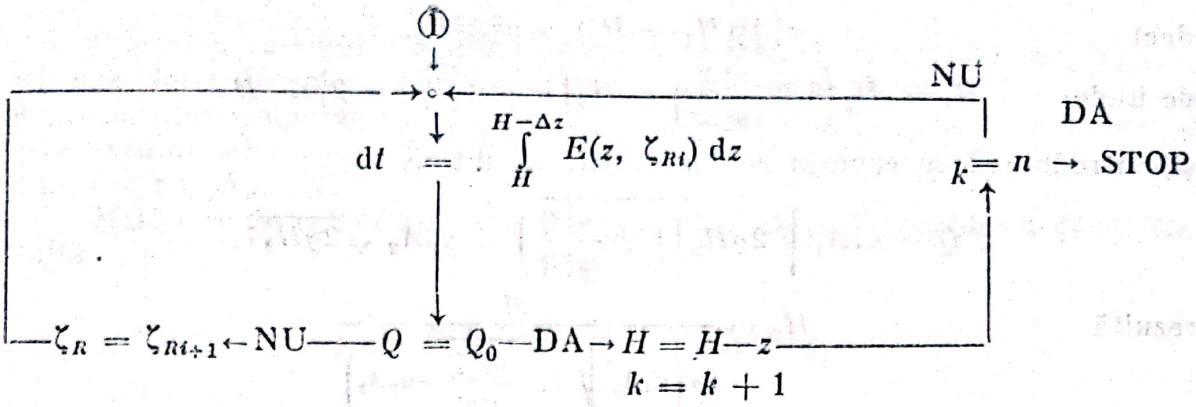
$\Delta z = \frac{H - z_0}{n}$

↓

$\zeta_R = \zeta_{Rt}$

↓

①



Reglarea robinetului R se face printr-un sistem automat, fie programat în timp, în funcţie de rezultatele obţinute, fie comandat de un debitmetru.

Problema 4.6. Un rezervor de apă este împărţit în două compartimente care comunică între ele printr-un orificiu circular cu diametrul $d_1 = 20$ mm (fig. 4.6).

Rezervorul este alimentat de la reţea cu un debit $Q = 4{,}5$ l/s şi evacuează apa prin două ajutaje cu lungimea $l = 60$ mm, unul cilindric cu diametrul d_1 şi altul conic cu diametrul mic d_1 şi cu unghiul $\varphi = 60°$.

Să se determine debitul pentru orificiu şi ajutaje dacă coeficientul de debit al ajutajului cilindric este $\mu_1 = 0{,}82$, al celui conic este $\mu_2 = 0{,}45$ şi al orificiului este $\mu_0 = 0{,}62$, iar nivelurile în cele două rezervoare nu variază în timp.

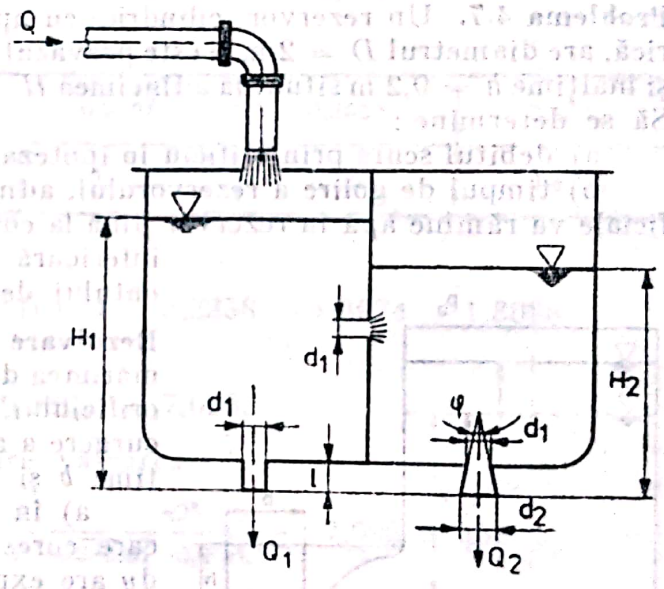


Fig. 4.6.

Rezolvare : Pentru cazul rezervorului, se poate scrie ecuaţia continuităţi

$$Q = Q_1 + Q_2,$$

şi relaţiile care exprimă debitele prin orificiu şi prin cele două ajutaje

$$Q_0 = \mu_0 A_0 \sqrt{2g(H_1 - H_2)}\ ;\ Q_1 = \mu_1 A_1 \sqrt{2gH_1}\ ;\ Q_2 = \mu_2 A_2 \sqrt{2gH_2},$$

în care μ_0, μ_1 şi μ_2 sînt coeficienţii de debit ai orificiului şi a celor două ajutaje, iar A_0, A_1 şi A_2 — ariile secţiunilor acestora. Ariile se pot scrie :

$$A_0 = A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = 0{,}314 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2$$

$$A_2 = \pi d_2^2/4 = (d_1 + 2l\ \text{tg}\ \varphi/2)^2\ /4 = \pi 0{,}0263^2/4 = 0{,}543 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^2.$$

Deoarece, după stabilirea regimului permanent, debitul evacuat de orificiu este egal cu debitul ajutajului conic $Q_0 = Q_2$, adică

$$\mu_0 A_0 \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = \mu_2 A_2 \sqrt{2gH_2},$$

Scanned with OKEN Scanner

deci $$\mu_0^2 A_0^2 (H_1 - H_2) = \mu_2^2 A_2^2 H_2,$$

de unde $$H_1 = H_2\left(1 + \frac{\mu_2^2 A_2^2}{\mu_0^2 A_0^2}\right) = H_2\left(1 + \frac{\mu_2^2 d_2^4}{\mu_0^2 d_1^4}\right) = 2{,}57\ H_2$$

şi, introducînd în ecuaţia continuităţii, se obţine

$$Q = \mu_1 A_1 \sqrt{2gH_2\left(1 + \frac{\mu_2^2 d_2^4}{\mu_0^2 d_1^4}\right)} + \mu_2 A_2 \sqrt{2gH_2};$$

rezultă $$H_2 = \frac{Q^2}{2g\left(\mu_1 A_1 \sqrt{1 + \frac{\mu_2^2 d_2^4}{\mu_0^2 d_1^4}} + \mu_2 A_2\right)^2}$$

adică $$H_2 = \frac{(4{,}5 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 9{,}81\left[0{,}82 \cdot 0{,}314 \cdot 10^{-3}\sqrt{1 + \frac{0{,}45^2 \cdot 0{,}0263^4}{0{,}62^2 \cdot 0{,}02^4}} + 0{,}45 \cdot 0{,}543 \cdot 10^{-3}\right]}$$

$$H_2 = 2{,}38 \text{ m şi } H_1 = 6{,}14 \text{ m},$$

de unde $Q_1 = \mu_1 A_1 \sqrt{2gH_1} = 0{,}82 \cdot 0{,}314 \cdot 10^{-3}\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}14} = 2{,}8310^{-3}$ m³/s

şi $Q_2 = \mu_2 A_2 \sqrt{2gH_2} = 0{,}45 \cdot 0{,}53 \cdot 10^{-3} \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}39} = 1{,}67 \cdot 10^{-3}$ m³/s.

Problema 4.7. Un rezervor cilindric cu apă, deschis la presiunea atmosferică, are diametrul $D = 2$ m şi este prevăzut cu un orificiu de lăţime $b = 0{,}2$ m şi înălţime $h = 0{,}2$ m situat la adîncimea $H = 2$ m de suprafaţa liberă (fig. 4.7). Să se determine :

a) debitul scurs prin orificiu în ipoteza menţinerii constante a nivelului ;

b) timpul de golire a rezervorului, admiţînd că datorită tensiunii superficiale va rămîne apă în rezervor pînă la cota $h_{min} = 0{,}5$ m faţă de muchia inferioară a orificiului. Valoarea coeficientului de debit al orificiului este $\mu = 0{,}6$.

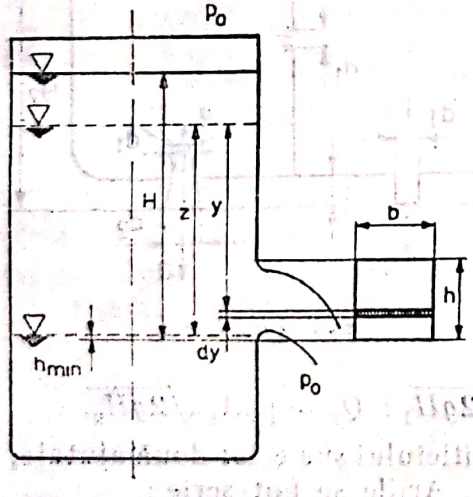


Fig. 4.7.

Rezolvare : Avînd în vedere raportul dintre mărimea diametrului rezervorului şi lăţimea orificiului, se poate aproxima secţiunea de curgere a acestuia cu un dreptunghi de lăţime b şi înălâime h.

a) în ipoteza făcută, debitul elementar care corespunde unei înălţimi elementare dy are expresia :

$$dQ = \mu\sqrt{2gy}\, dA.$$

Se obţine $$Q = \int_{H-h}^{H} \mu\sqrt{2gy}\, b\, dy,$$

unde s-a înlocuit expresia ariei dA cu aria unui dreptunghi elementar de înălţime dy şi lăţime b (în cazul orificiilor mari, viteza nu mai poate fi considerată constantă în secţiunea de curgere, deci formula (4.1.8) îşi pierde valabilitatea).

Rezultă $$Q = (2/3)\mu\sqrt{2g}b(H^{3/2} - (H - h)^{3/2}) ; \qquad (4.7.1)$$

$$Q = (2/3)0{,}6 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81} \cdot 0{,}2(2^{3/2} - (2 - 0{,}2)^{3/2}) = 0{,}1465 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) pentru calculul timpului de golire se aleg două coordonate : z, care variază între H și h_{min}, și y, care, pentru un z constant, variază între $z - h$ și z. Calculul timpului de golire se face în două etape : timpul de golire al rezervorului între cotele $z = H$ și $z = h$, t_{g1}, și timpul de golire între cotele $z = h$ și $z = h_{min}$, t_{g2}.

Metodica de calcul aplicată este cea prezentată în problema (4.1). Rezultă

$$-\frac{\pi D^2}{4}\frac{dz}{dt} = \int_{z-h}^{z} \mu \sqrt{2gy}\, b\, dy,$$

$$\frac{\pi D^2}{4}\frac{dz}{dt} = (2/3)\mu \sqrt{2g}\, b[z^{3/2} - (z-h)^{3/2}].$$

$$I = \int_{h}^{H} \frac{dz}{z^{3/2} - (z-h)^{3/2}} = (2/3)\sqrt{2g}\, b\mu \frac{4}{\pi D^2} \int_{0}^{t_{g1}} dt.$$

Integrala se rezolvă numeric prin metoda prezentată în problema (4.5).

Se obține $x = \frac{H+h}{2} + \frac{H-h}{2} d = 1{,}1 + 0{,}9\, d.$

x	0,1271	0,21503	0,2998	0,3654	0,4042
$F(x)$	7,8678	4,6505	3,3355	2,7367	2,4742

$$I = \frac{H-h}{2} \sum_{k=1}^{5} D_k F(x_k) = 0{,}9(1{,}864 + 2{,}2258 + 1{,}8974 + 1{,}3098 +$$

$$+ 0{,}5862) = 7{,}095.$$

Deci, timpul de golire t_{g1} are valoarea

$$t_{g1} = \frac{3}{2}\frac{\pi D^2}{\sqrt{2 \cdot 9{,}81}\, b\mu 4} I = \frac{3}{2}\frac{\pi 2^2}{\sqrt{2 \cdot 9{,}81} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 4} \cdot 7{,}095 \cong 252 \text{ s.}$$

Timpul de golire t_{g2} rezultă din relația

$$-\frac{\pi D^2}{4}\frac{dz}{dt} = \int_{0}^{z} \mu \sqrt{2gy}\, b\, dy,$$

$$\int_{h_{min}}^{h} \frac{dz}{z^{3/2}} = \frac{2}{3}\mu \sqrt{2g}\, b \frac{4}{\pi D^2} \int_{0}^{t_{g2}} dt$$

$$t_{g2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{h_{min}}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right)\frac{3}{2}\frac{1}{\mu b \sqrt{2g}} \cdot \frac{\pi D^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{0{,}0005}} - \frac{1}{\sqrt{0{,}2}}\right)\frac{3}{2}\frac{1}{0{,}6 \cdot 0{,}2\sqrt{2 \cdot 9{,}81}}\frac{\pi 2^2}{4} \cong 753 \text{ s.}$$

Problema 4.8. În peretele unui rezervor foarte mare, se găseşte practicată o deschidere dreptunghiulară de lăţime $b = 1{,}2$ m, a cărei muchie superioară este la adîncimea $H_1 = 2$ m sub nivelul suprafeţei libere, iar muchia inferioară este la adîncimea $H_2 = 2{,}6$ m sub suprafaţa liberă (fig. 4.8).

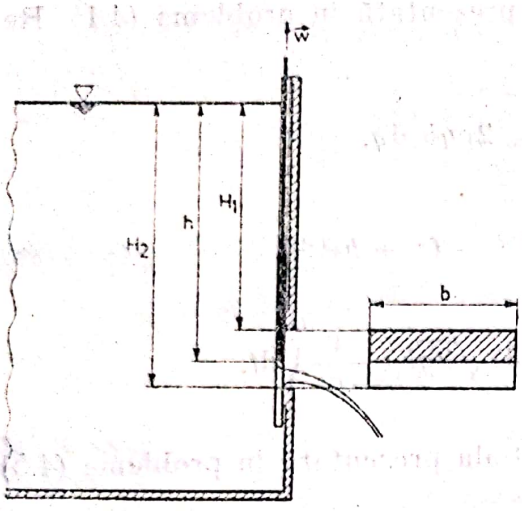


Fig. 4.8.

Deschiderea este închisă cu o clapetă plană, care poate fi ridicată cu viteza constantă $w = 10$ mm/s.

Cunoscînd coeficientul de debit al orificiului $\mu = 0{,}61$ şi considerînd nivelul în rezervor constant, să se determine volumul de apă evacuat din rezervor în timpul deschiderii clapetei.

Rezolvare : Se consideră o poziţie oarecare a clapetei, între poziţia închis şi deschis, ca în figura 4.8 şi fie h adîncimea muchiei inferioare a clapetei. În această poziţie, debitul evacuat pe sub clapetă este (4.7.1)

$$Q_h = (2/3)\mu b \sqrt{2g}\,(H_2^{3/2} - h^{3/2}),$$

respectiv volumul $d\mathcal{V}$ care este evacuat în intervalul elementar de timp dt cît clapeta este în această poziţie este

$$d\mathcal{V} = Q_h \cdot dt = (2/3)\mu b \sqrt{2g}(H_2^{3/2} - h^{3/2})\,dt,$$

respectiv volumul evacuat în timpul ridicării clapetei este

$$\mathcal{V} = \int d\mathcal{V}.$$

Legătura dintre timpul de ridicare şi poziţia clapetei este dată de ecuaţia de mişcare a clapetei

$$h = H_2 - wt,$$

sau

$$dh = -w\,dt.$$

Deci volumul evacuat de clapetă este

$$\mathcal{V} = -(2/3)\mu b \frac{\sqrt{2g}}{w} \int_{H_2}^{H_1} (H_2^{3/2} - h^{3/2})\,dh,$$

deci

$$\mathcal{V} = (2/3)\mu b \frac{\sqrt{2g}}{w} (3/5 H_2^{5/2} - H_1 H_2^{3/2} + 2/5 H_1^{5/2}),$$

sau

$$\mathcal{V} = (2/3)0{,}61 \cdot 1{,}2 \frac{2 \cdot 9{,}81}{0{,}01} [(3/5)2{,}6^{5/2} - 2{,}6 \cdot 2^{3/2} + (2/5)2^{5/2}] = 313 \text{ m}^3.$$

Problema 4.9. Un lichid foarte vîscos, avînd un comprtament reologic newtonian, curge liber sub forma unui jet plan printr-o fantă dreptunghiulară aflată la fundul unui rezervor cu nivel constant (fig. 4.9).

Să se stabilească relaţia care descrie evoluţia lăţimii b a jetului şi a presiunii relative în interiorul jetului pe verticala curgerii, cunoscînd : debitul

Scanned with OKEN Scanner

pe unitatea de lățime a fantei q, deschiderea fantei b_0, viscozitatea dinamică η și densitatea fluidului ρ. (Se neglijează componenta vitezei pe lățimea jetului (axa Ox)).

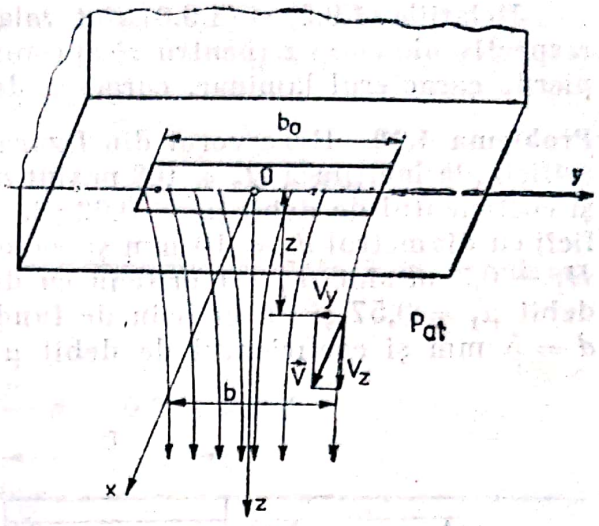


Fig. 4.9.

Rezolvare: Admițînd curgerea lichidului laminară, fenomenul este descris de ecuațiile Navier-Stokes și de ecuația de continuitate (7.1)

$$\begin{cases} 0 = \rho g - \dfrac{\partial p}{\partial z} + \eta \dfrac{\partial^2 v^2}{\partial z^2} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \eta \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \end{cases} \qquad (4.9.1)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad (4.9.2)$$

Din (4.9.1) și (4.9.2), se obține

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[-p + \eta\left(-\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right] = 0 \qquad (4.9.3)$$

$$p + \eta \frac{\partial v_z}{\partial z} = C_1.$$

Curgerea avînd loc la presiune atmosferică, rezultă că suprapresiunea p din relația (4.9.3) este dată numai de gradientul componentei vitezei v_z pe direcția axei Oz.

Deci $C_1 = 0$ și $p = -\dfrac{\partial v_z}{\partial z}$.

Din (4.9.1), se obține

$$\rho g + \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0, \qquad (4.9.4)$$

sau $\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = -\dfrac{\rho g}{2\eta}$.

Rezultă $\dfrac{dv_z}{dz} = -\dfrac{\rho g}{2\eta} z + C_2$, $v_z = -\dfrac{\rho g}{4\eta} z^2 + C_2 z + C_3$.

Pentru determinarea constantelor C_2 și C_3, se consideră expresia debitului

$$q = \int_0^b v_z \, dy = v_z b = \text{constant},$$

deci $\dfrac{\partial v_z}{\partial z} = \dfrac{\partial q}{\partial z} = 0$, $C_2 = 0$; și condiția la limită

$$z = 0; \; b = b_0, \; v_z = q/b_0.$$

Se obține $q\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{b_0}\right) = \dfrac{-\rho g}{4\eta} z^2$;

$$b = b_0 \frac{k}{k - z^2}; \quad k = \frac{4\eta q}{\rho g b_0}; \qquad (4.9.5)$$

$$p = -\frac{\rho g}{2} z. \qquad (4.9.6)$$

Relaţiile (4.9.5) şi (4.9.6) sînt valabile la distanţe mici de fundul vasului, respectiv ale cotei z (pentru z^2 apropiat ca valoare constantei k mişcarea îşi pierde caracterul laminar, curgerea devenind nepermanentă şi discontinuă).

Problema 4.10. Rezervorul din figura 4.10, *a* este prevăzut cu următoarele orificii : la înălţimea $H_3 = 0{,}8$ m sînt $n_3 = 5$ orificii cu diametrul $d_3 = 15$ mm şi coeficientul de debit $\mu_3 = 0{,}62$; la înălţimea $H_2 = 0{,}5$ m sînt $n_2 = 4$ orificii cu diametrul $d_2 = 10$ mm şi coeficientul de debit $\mu_2 = 0{,}6$; la înălţimea $H_1 = 0{,}3$ m sînt $n_1 = 1$ orificiu cu diametrul $d_1 = 7$ mm şi coeficientul de debit $\mu_1 = 0{,}57$ şi un orificiu de fund, la înălţimea $H = 1$ m cu diametrul $d = 5$ mm şi coeficientul de debit $\mu = 0{,}55$.

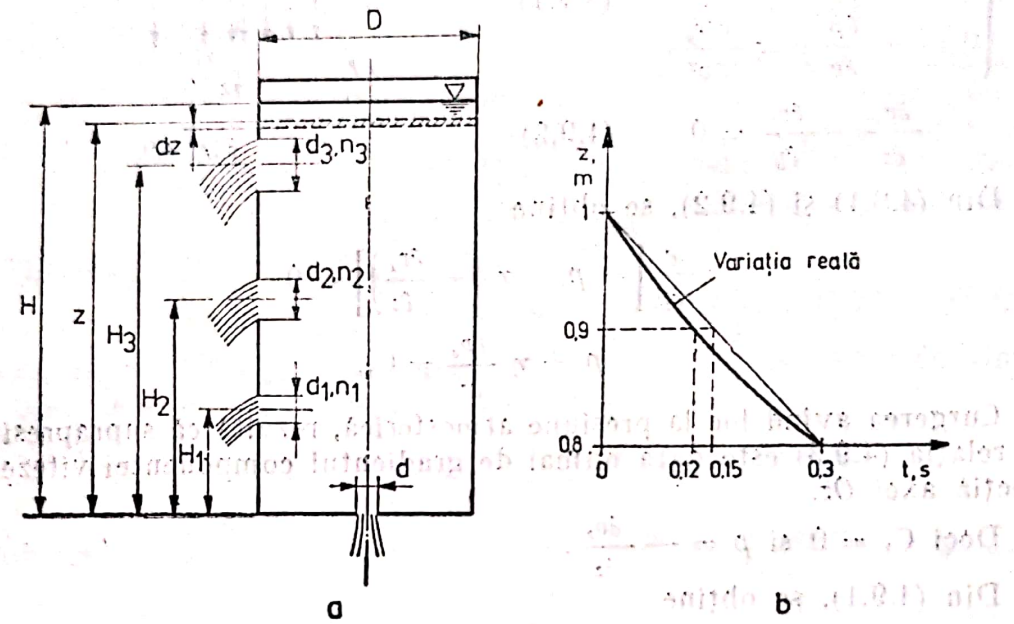


Fig. 4.10.

Să se determine timpul în care nivelul suprafeţei libere ajunge la înălţimea H_3.

Admiţînd o variaţie liniară a înălţimii din rezervor cu timpul, să se precizeze pe care orificii se scurge un volum mai mare. Rezervorul se consideră cilindric cu diametrul $D = 50$ mm.

Rezolvare : În ipoteza orificiilor mici, timpul în care nivelul suprafeţei libere ajunge la înălţimea H_3 se calculează pornind de la relaţia de continuitate,

$$-\frac{\pi D^2}{4}\frac{dz}{dt} = n_3\mu_3\sqrt{2g(z-H_3)}\,\frac{\pi d_3^2}{4} + n_2\mu_2\sqrt{2g(z-H_2)}\,\frac{\pi d_2^2}{4} + \\ + n_1\mu_1\sqrt{2g(z-H_1)}\,\frac{\pi d_1^2}{4} + \mu\sqrt{2gz}\,\frac{\pi d^2}{4}, \qquad (4.10.1)$$

(în momentul în care nivelul $z = H_i$, prin orificiul respectiv nu se mai evacuează debit, în relaţia (4.10.1) termenul corespunzător va dispare).

Rezultă $\int_{H_3}^{H} F(z)\,dz = \int_0^{t_3} dt$, în care

$$F(z) = [k_3(z-H_3)^{1/2} + k_2(z-h_2)^{1/2} + k_1(z-H_1)^{1/2} + kz^{1/2}]^{-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Constantele k_i avînd expresiile şi valorile

$$k_i = \frac{4}{\pi D^2} n_i \mu_i \sqrt{2g} \frac{\pi d_i^2}{4},$$

$$k_1 = 1{,}238,\ k_2 = 0{,}425,\ k_3 = 0{,}05,\ k_4 = 0{,}024$$

Integrala $I = \int_{0{,}8}^{1} F(z)\,dz$ se rezolvă prin metoda prezentată în problema (4.5). Se obţine

$$z = \frac{H + H_3}{2} + \frac{H - H_3}{2} d = 0{,}9 + 0{,}1\,d.$$

z	0,8094	0,846	0,9	0,9538	0,9906
$F(\cdot)$	2,41	1,74	1,385	1,196	1,106

$$I = \frac{H - H_3}{2} \sum_{k=1}^{5} D_k F(z_k) = 0{,}1 \cdot 3{,}026 \cong 0{,}3.$$

Deci timpul în care suprafaţa liberă ajunge de la nivelul $H = 1$ m la nivelul $H_3 = 0{,}8$ m este $t_3 = 0{,}3$ s.

Pentru determinarea volumelor scurse în această perioadă, se foloseşte relaţia

$$\mathcal{V}_i = n_i \mu_i \sqrt{2g} \frac{\pi d_i^2}{4} \int_0^{t_3} \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3} t\right) - H_i}\,dt, \qquad (4.10.2)$$

în care s-a folosit variaţia liniară a nivelului z din vas cu timpul t

$$z = H - \frac{H - H_3}{t_3} t = 1 - \frac{2}{3} t.$$

Calculul integralei din relaţia (4.10.2) se face cu ajutorul substituţiei $u = \sqrt{a - 2t}$,

$$\int \sqrt{a - 2t} \cdot dt = \int u(-u\,du) = \frac{-1}{3}(a - 2t)^{3/2}.$$

Se obţin valorile:

$\mathcal{V}_1 = 2{,}8 \cdot 10^{-4}$ m^3, $\mathcal{V}_2 = 2{,}4 \cdot 10^{-4}$ m^3, $\mathcal{V}_3 = 3{,}9 \cdot 10^{-5}$ m^3, $\mathcal{V}_4 = 2{,}7 \cdot 10^{-5}$ m^3

În cazul în care calculul este corect, $\sum \mathcal{V}_i = (\pi D^2/4)(H - H_3)$.
Rezultă $\sum \mathcal{V}_i = 5{,}86 \cdot 10^{-4}$ m^3 şi $\mathcal{V}_{real} \cong 4 \cdot 10^{-4}$ m^3.

Diferenţa provine în principal din faptul că, în realitate, legea de variaţie $z = z(t)$ nu este liniară (fig. 4.10, *b*) ; alte surse de erori sînt, bineînţeles, integrările numerice repetate la care s-a recurs.

Cu toate acestea, se poate admite că proporţia dintre volumele scurse se păstrează şi în cazul real. Deci prin orificiile *1* se va scurge volumul cel mai mare.

Scanned with OKEN Scanner

Problema 4.11. Un rezervor conține aer la presiunea $p_0 = 102{,}33$ kPa (fig. 4.11). În peretele rezervorului se găsește un orificiu cu aria $A = 2$ cm², mult mai mică decît aria A_0 a secțiunii rezervorului. Considerînd că presiunea p_0 din rezervor este menținută constantă și că în exteriorul rezervorului parametrii aerului sînt $p = p_{at} = 101{,}325$ kPa și $\rho = 1{,}229$ kg/m³, iar coeficientul de debit al orificiului este $\mu = 0{,}62$, să se determine debitul masic al orificiului considerînd evoluția aerului adiabatică, cu exponentul $\varkappa = 1{,}4$.

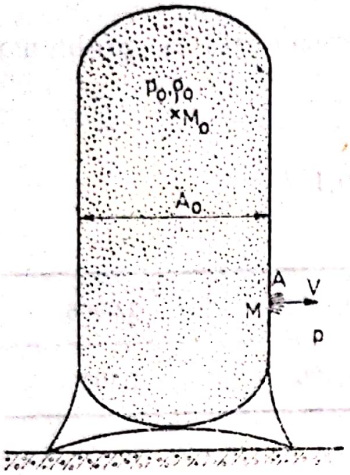


Fig. 4.11.

Rezolvare : Deoarece presiunea p_0 din interior și presiunea p din exterior sînt constante, se poate scrie relația lui Bernoulli între un punct M_0 din interiorul rezervoului și un punct M în centrul orificiului :

$$(V^2 - V_0^2)/2 + \int dp/\rho = 0, \qquad (4.11.1)$$

în care s-au neglijat forțele masice și s-a admis că viteza este constantă în secțiune — ipoteză admisă pentru gaze. Considerînd viteza nulă în rezervor $V_0 = 0$, rezultă viteza în centrul secțiunii orificiului

$$V^2 = -2 \int dp/\rho, \qquad (4.11.2)$$

integrala avînd ca limite starea fluidului în M_0, respectiv starea fluidului în M. Pentru rezolvarea integralei se consideră evoluția adiabatică a aerului conform ecuației de stare

$$p/\rho^\varkappa = p_0/\rho_0^\varkappa = C \qquad (4.11.3)$$

de unde $p = C\rho^\varkappa$, iar $dp = \varkappa C \rho^{\varkappa-1} d\rho$. Cu aceasta rezultă

$$V^2 = -2 \cdot \varkappa C \int_{\rho_0}^{\rho} \rho^{\varkappa-2} d\rho,$$

sau $$V^2 = 2 \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} C (\rho_0^{\varkappa-1} - \lambda^{\varkappa-1}) = 2 \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0^\varkappa} \rho_0^{\varkappa-1} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\varkappa-1}\right],$$

de unde $$V^2 = 2 \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\varkappa-1)/\varkappa}\right].$$

Deci se poate scrie $$V = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\varkappa-1)/\varkappa}\right]}, \qquad (4.11.4)$$

relație echivalentă cu $$V = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p}{\rho} \left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(\varkappa-1)/\varkappa} - 1\right]}. \qquad (4.11.5)$$

Relațiile (4.11.4) și (4.11.5) sînt cunoscute sub numele Wantzel-Saint Venant.

Debitul masic este $$Q_m = \mu \rho A V = \mu A \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1} p\rho \left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(\varkappa-1)/\varkappa} - 1\right]}, \qquad (4.11.6)$$

adică $$Q_m = 0{,}62 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}4}{1{,}4 - 1} \cdot 101\,325 \cdot 1{,}229 \left[\left(\frac{102{,}33}{101{,}325}\right)^{(1.4-1)/1.4} - 1\right]}.$$

Deci $$Q_m = 6{,}17 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s}.$$

Problema 4.12. Într-un rezervor foarte mare se află aer la presiunea p_0 necunoscută. În peretele rezervorului se găseşte un orificiu prevăzut cu un ajutaj convergent-dvergent, ca în figura 4.12.

Se cere :

1) să se stabilească ecuaţia lui Hugoniot pentru curgerea prin ajutaj ;

2) să se determine condiţiile în care regimul este subsonic, critic sau supersonic ;

3) să se determine presiunea p_0 în rezervor şi densitatea aerului ρ_0, astfel încît debitul masic evacuat să fie maxim dacă diametrul minim al porţiunii convergente este $d = 2$ cm. Să se determine acest debit masic.

Se consideră că presiunea la ieşirea din ajutaj este $p = 101{,}325$ kPa şi densitatea este $\rho = 1{,}229$ kg/m^3, iar coeficientul de debit al ajutajului este $\mu = 0{,}62$.

Rezolvare : 1) Deoarece presiunea p_0 în rezervor este mare, viteza V este comparabilă ca ordin de mărime cu viteza sunetului şi trebuie ţinut seama de regimul de mişcare din ajutaj.

Considerînd mişcarea permanentă, ecuaţia continuităţii se poate scrie

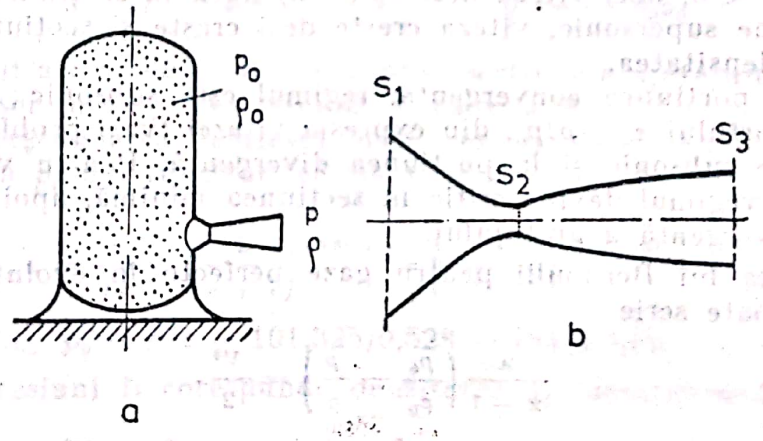
$$\rho A V = const. \tag{4.12.1}$$

şi logaritmînd, iar apoi diferenţiind relaţia (4.12.1), se obţine

$$d\rho/\rho + dA/A + dV/V = 0. \tag{4.12.2}$$

Relaţia lui Bernoulli, în acest caz, se poate scrie

$$V^2/2 + \int dp/\rho = const.,$$



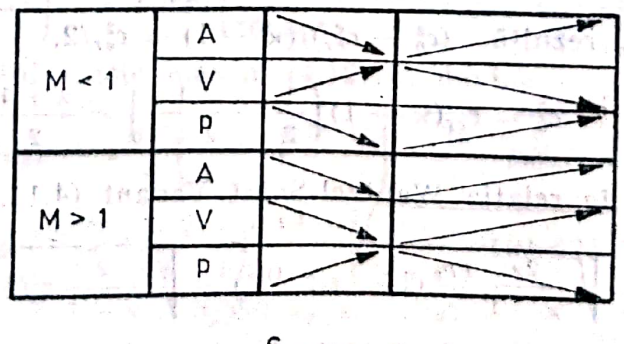


Fig. 4.12.

care, prin diferențiere, devine $V\,dV + dp/\rho = 0$

sau
$$V\,dV + dp/d\rho \cdot d\rho/\rho = 0 \qquad (4.12.3)$$

Ținînd seama că $c^2 = dp/d\rho$, unde c este viteza sunetului, se obține
$$V\,dV + c^2 d\rho/\rho = 0. \qquad (4.12.4)$$

Dacă se elimină $d\rho/\rho$, între relația (4.12.2) și relația (4.12.4), se obține
$$dA/A = (V^2/c^2 - 1)dV/V,$$
sau
$$dA/A = (M^2 - 1)dV/V, \qquad (4.12.5)$$
în care $\mathbf{M} = V/c$ este numărul Mach al mișcării. Relația (4.12.5) se numește ecuația lui Hugoniot. Din relația (4.12.5), rezultă : a) dacă $\mathbf{M} > 1$, mărimile V și A variază în același sens ; b) dacă $\mathbf{M} < 1$, mărimile V și A variază în sens contrar (ca în fig. 4.12, *c*) ; mărimea V (viteza) nu poate atinge viteza c decît într-o secțiune cu aria minimă (deoarece viteza V rămîne finită).

2) Între secțiunile S_1 și S_2 (fig. 4.12, *b*), aria descrește și deci $dA/A < 0$. În secțiunea S_2, aria este minimă și deci $dA/A = 0$, iar între secțiunile S_2 și S_3, aria crește și deci $dA/A > 0$.

Dacă între secțiunile S_1 și S_2 viteza este mai mică decît viteza sunetului $V < c$, paranteza este negativă și deci $dV/V > 0$, deci viteza crește : a) pînă la o valoare maximă $V_{max} < c$ obținută în secțiunea S_2 ; b) pînă la valoarea vitezei sunetului c în secțiunea S_2, caz în care în această secțiune se atinge regimul critic $V = V_{cr} = c$, deci $\mathbf{M} = 1$.

Între secțiunile S_2 și S_3 sînt, de asemenea, două posibilități legate de cele precedente : a) dacă $V_{max} < c$, regimul rămîne subsonic și cum $dA/A > 0$, rezultă $dV/V < 0$, deci viteza descrește ; b) dacă în secțiunea S_2, $V_{cr} = c$, regimul devine supersonic, viteza crește deși crește și secțiunea, însă descrește mult densitatea.

Deci, în porțiunea convergentă, regimul este subsonic ; pentru valori mari ale raportului $\varepsilon = p/p_0$, din expresia vitezei (vezi problema 4.11), regimul rămîne subsonic și în porțiunea divergentă. Pentru valori mici ale raportului ε, regimul devine critic în secțiunea minimă, apoi supersonic în porțiunea divergentă a ajutajului.

3) Relația lui Bernoulli pentru gaze perfecte în evoluție adiabatică (4.11.1) se poate scrie
$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho}\right) = \frac{V^2}{2}. \qquad (4.12.6)$$

Se observă că $\varkappa p_0/\rho_0 = c_0^2$, $\varkappa(p/\rho)_{cr} = c_{cr}^2 = V_{cr}^2$,

și cu $V = V_{cr}$ rezultă $(c_0^2 - c_{cr}^2)/(\varkappa - 1) = c_{cr}^2/2$,

de unde
$$c_0^2 = c_{cr}(\varkappa - 1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\varkappa - 1}\right) = \frac{\varkappa + 1}{2} c_{cr}^2.$$

Înlocuind în relația Wantzel-Saint Venant (4.11.4), rezultă
$$c_{cr} = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_0}{\rho_0}(1 - \varepsilon_{cr}^{(\varkappa-1)/\varkappa})} = \sqrt{\frac{2}{\varkappa - 1} c_0^2 (1 - \varepsilon^{(\varkappa-1)/\varkappa})},$$
de unde se obține
$$\varepsilon_{cr} = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\varkappa/(\varkappa-1)} = \frac{p_{cr}}{p_0} = \left(\frac{\rho_{cr}}{\rho_0}\right)^{\varkappa}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În consecință, se obține $p_{cr} = p_0\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\varkappa/(\varkappa-1)}$ și $\rho_{cr} = \rho_0\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{1/(\varkappa-1)}$, mărimile de stare în regimul critic sînt constante proporționale cu mărimile de stare inițiale.

Debitul masic evacuat de ajutaj este $Q_m = \mu\rho A\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\cdot\frac{p_0}{\rho_0}(1-\varepsilon^{(\varkappa-1)/\varkappa})} =$

$$= \mu A\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\,\frac{p_0}{\rho_0}\,\rho^2(1-\varepsilon^{(\varkappa-1)/\varkappa})}.$$

Deoarece $\frac{p_0}{\rho_0}\rho^2 = p_0\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{2/\varkappa} = p_0\rho_0\varepsilon^{2/\varkappa}$, se obține

$$Q_m = \mu A\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\,p_0\rho_0\varepsilon^{2/\varkappa}(1-\varepsilon^{(\varkappa+1)/\varkappa})}. \qquad (4.12.7)$$

Debitul masic devine maxim, dacă $dQ_m/d\varepsilon = 0$,

adică $\mu A\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\,p_0\rho_0}\,\frac{d}{d\varepsilon}[\varepsilon^{2/\varkappa}-\varepsilon^{(\varkappa+1)/\varkappa}]^{1/2} = 0,$

deci debitul este maxim pentru $\varepsilon = \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\varkappa/(\varkappa-1)} = \varepsilon_{cr}.$ (4.12.8)

Cu aceasta, debitul masic maxim are expresia

$$Q_{m,\,max} = \mu A_{cr}\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\,p_0\rho_0\varepsilon_{cr}^{2/\varkappa}(1-\varepsilon_{cr}^{(\varkappa-1)/\varkappa})}, \qquad (4.12.9)$$

sau

$$Q_{m,\,max} = \mu A_{cr}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{1/(\varkappa-1)}\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\,p_0\rho_0}. \qquad (4.12.10)$$

Acest debit are aceeași valoare în orice secțiune a ajutajului, dar se calculează mai ușor în secțiunea minimă S_2 cu aria A_{cr}.

Pentru determinarea debitului masic maxim, este necesar să se determine presiunea p_0 din rezervor, căreia îi corespunde debitul maxim cu relația (4.12.8)

Deci $\varepsilon = \frac{p}{p_0} = \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\varkappa/(\varkappa-1)} = \left(\frac{2}{1{,}4+1}\right)^{1.4/(1.4-1} = 0{,}528,$

de unde $p_0 = p/\varepsilon = 101{,}325/0{,}528 = 191{,}9$ kPa.

Acestei presiuni îi corespunde densitatea ρ_0, determinată din ecuația de stare

$$\rho_0 = \rho\left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/\varkappa} = 1{,}229\left(\frac{191{,}9}{101{,}325}\right)^{1/1.4} = 1{,}939\ \text{kg/m}^3.$$

Cu aceasta, debitul masic maxim (4.12.10) devine

$$Q_{m,\,max} = \mu\frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{1/(\varkappa-1)}\sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\,p_0\rho_0},$$

adică $Q_{m,\,max} = 0{,}62\,\frac{\pi 0{,}02^2}{4}\left(\frac{2}{1{,}4+1}\right)^{1/(1.4-1)}\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4+1}\,101\,325\cdot 1{,}939} =$

$$= 0{,}059\ \text{kg/s}.$$

Deci $Q_{m,\,max} = 59\cdot 10^{-3}$ kg/s.

Scanned with OKEN Scanner

Problema 4.13. Un rezervor este umplut cu aer la presiunea $p_0 = 0{,}8$ MPa, care se menține constantă, figura 4.13. Presupunînd mișcarea gazului adiabatică și permanentă, să se determine debitul printr-un orificiu cu diametrul $d = 10$ mm, dacă presiunea exterioară este $p_e = 0{,}75$ MPa.

Pentru ce presiunea exterioară debitul are valoarea maximă ? Se cunosc : exponentul adiabatic al aerului $\varkappa = 1{,}4$; densitatea aerului la presiunea atmosferică $\rho_e = 1{,}21$ kg/m^3 ; coeficientul de debit al orificiului $\mu = 0{,}52$.

(În timpul mișcării viteza se consideră subsonică $V < c$).

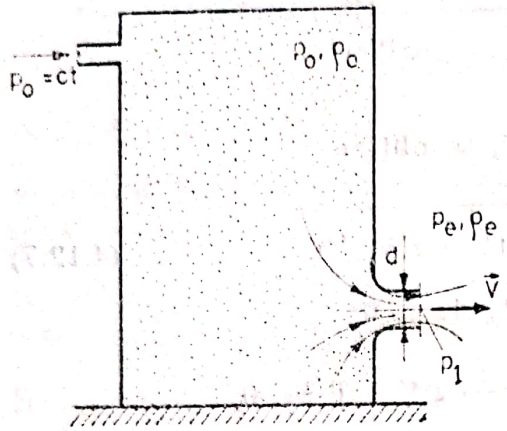


Fig. 4.13.

Rezolvare : Pentru o mișcare permanentă a unui gaz ideal în evoluție adiabatică, relația lui Bernoulli (4.11.1) este

$$\frac{V_0^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{V_e^2}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_e}{\rho_e}, \tag{4.13.1}$$

unde s-a neglijat greutatea gazului, $\Pi = 0$ și mișcarea s-a considerat izentropică (viteza gazului în ajutaj nu depășește viteza sunetului).

Din ecuația de continuitate $Q_{m1} = Q_{m2}$, (4.13.2)

$Q_m = \rho Q$ fiind debitul masic, se poate neglija viteza V_0, $V_0 \cong 0$.

Cu ecuația de stare $p_0/\rho^{\varkappa} = p_e/\rho_e^{\varkappa}$, (4.13.3)

rezultă viteza în ajutaj (4.11.4)

$$V_e = V = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{(\varkappa-1)/\varkappa}\right]}. \tag{4.13.4}$$

În literatura de specialitate, formula (4.13.4) poartă denumirea de formula lui Saint-Venant și Wantzel. Numeric se obține valoarea

$$\rho_0 = \rho_e(p_0/p_e)^{1/\varkappa} = 1{,}21(0{,}8/0{,}1)^{1/1.4} = 5{,}34 \text{ kg/m}^3,$$

$$V = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}4}{1{,}4 - 1}\frac{0{,}8\cdot 10^6}{5{,}34}\left[1 - \left(\frac{0{,}75}{0{,}8}\right)^{(1.4-1)/1.4}\right]} = 138 \text{ m/s}$$

Debitul masic are expresia (4.11.6)

$$Q_m = \mu A \rho_e V = \mu \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{1/\varkappa}\sqrt{2p_0\rho_0}\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{(\varkappa-1)/\varkappa}\right]}, \tag{4.13.5}$$

$$Q_m = 0{,}52\,\frac{\pi 0{,}01^2}{4}\,1{,}21\left(\frac{0{,}75}{0{,}1}\right)^{1/1.4}\cdot 138 = 0{,}0287 \text{ kg/s}.$$

Pentru a determina valoarea lui p_e pentru care Q_m este maxim, se pune condiția de maximizare a funcției

$$\psi = \varepsilon^{1/\varkappa}\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}(1 - \varepsilon^{(\varkappa-1)/\varkappa})}, \quad \varepsilon = p_e/p_0$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci, cu $d\psi/d\varepsilon = 0$, se obține $\varepsilon = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{1/(\varkappa-1)}$, (4.13.6)

valoarea debitului (4.13.5) fiind

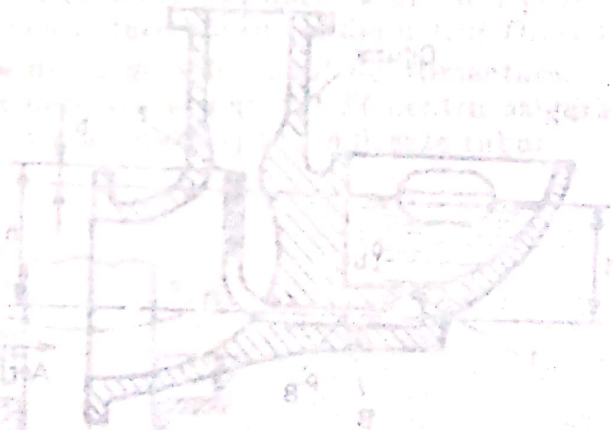
$$Q_m = Q_{m.\,max} = \mu \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{p_0 \rho_0} \sqrt{\varkappa \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{(\varkappa+1)/(\varkappa-1)}}. \quad (4.13.7)$$

Înlocuind valorile numerice, se găsește

$$p_e = 0{,}8 \left(\frac{2}{1{,}4 + 1}\right)^{1.4/(1.4-1)} = 0{,}42 \text{ MPa},$$

$$Q_{m.\,max} = 0{,}52 \frac{\pi 0{,}01^2}{4} \sqrt{0{,}8 \cdot 10^6 \cdot 1{,}69} \sqrt{1{,}4 \left(\frac{2}{(1{,}4+1)}\right)^{(1.4+1)/(1.4-1)}} = 0{,}0325 \text{ kg/s}.$$

Observație. Calculul în cazurile practice se face în felul următor : din (4.14.6) se determină presiunea exterioară critică $p_{ecr} = 0{,}528\ p_0$. Dacă $p_e \geqslant p_{cr}$, se consideră presiunea în jet $p_1 = p_e$ și calculul debitului se face cu relația (4.13.5). Dacă $p_e < p_{cr}$, conform ecuației lui Hugoniot* mișcarea în ajutaj devine independentă de p_e, debitul fiind dat de relația (4.13.7).



* Dan Gh. Ionescu ș.a. Mecanica fluidelor și mașini hidraulice. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1983, pag. 121.

5

CURGEREA FLUIDELOR ÎN INSTALAȚII HIDRAULICE

Problema 5.1. Un carburator se compune din camera cu nivel constant și difuzorul, în a cărui secțiune minimă se produce evaporarea combustibilului (formarea amestecului), ca în figura 5.1.

Combustibilul este adus prin intermediul unei conducte prevăzută la capete cu două orificii calibrate (jicloare), având diametrele $D_1 = 1{,}60$ mm și $D_2 = 1{,}15$ mm, care au coeficienții de debit $\mu_1 = 0{,}7$ și $\mu_2 = 0{,}72$.

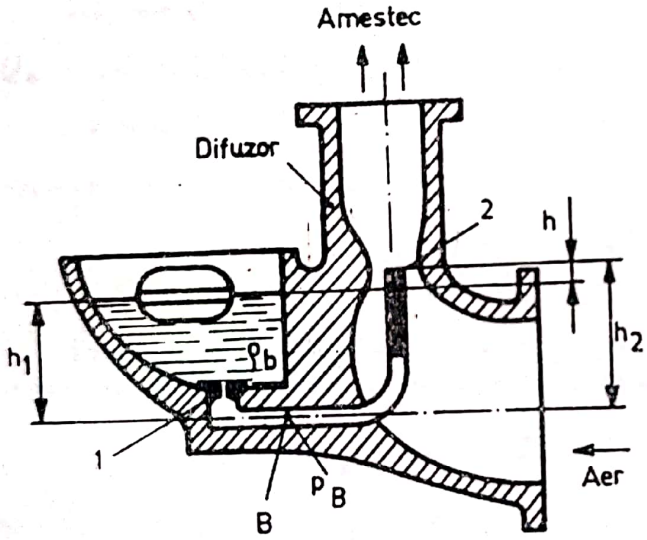


Fig. 5.1.

Presiunea aerului în secțiunea îngustată a ajutajului convergent divergent este $p_2 = 80$ kPa, iar în camera cu nivel constant este presiunea atmosferică $p_{at} = 101{,}33$ kPa, denivelarea între ele este $h = 25$ mm.

Dacă densitatea benzinei este $\rho_b = 750$ kg/m³ (CO 98), să se determine consumul motorului în timpul unei ore de funcționare.

Rezolvare: Debitul primului orificiu este dat de relația

$$Q_1 = \mu_1 \frac{\pi D_1^2}{4} \sqrt{2g\left(\frac{p_{at} - p_B}{\rho_b g} + h_1\right)},$$

în care p_B este presiunea din conducta de legătură. Similar debitul celui de al doilea orificiu se, scrie

$$Q_2 = \mu_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \sqrt{2g\left(\frac{p_B - p_2}{\rho_b g} - h_2\right)}.$$

Ținînd seama că $Q_1 = Q_2 = Q$ și eliminînd presiunea p_B între cele două relații, rezultă

$$\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{16}{\pi^2 \mu_1^2 D_1^4} + \frac{16}{\pi^2 \mu_2^2 D_2^4}\right) = \frac{p_{at} - p_2}{\rho_b g} - h,$$

în care $h = h_2 - h_1$, de unde rezultă

$$Q = \frac{\mu_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \sqrt{2g\left(\frac{p_{at} - p_2}{\rho_b g} - h\right)}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu_2 D_2^2}{\mu_1 D_1^2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{\pi(1{,}15 \cdot 10^{-3})^2}{4} \, 0{,}72 \sqrt{2 \cdot 9{,}81\left(\frac{101\,330 - 80\,000}{750 \cdot 9{,}81} - 0{,}025\right)}}{\sqrt{1 + \left(\frac{0{,}72 \cdot 1{,}15^2}{0{,}7 \cdot 1{,}6^2}\right)^2}},$$

adică $Q = 4{,}7 \cdot 10^{-6}$ m³/s,

iar $\mathcal{V} = Qt = 4{,}7 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}6 \cdot 10^3 = 17 \cdot 10^{-3}$ m³ = 17 l.

Problema 5.2. Pentru ungerea și răcirea lagărului arborelui vertical al unei turbine, este folosit un ungător automat, în care alimentarea cu ulei se realizează cu ajutorul unei conducte de diametrul $d = 12$ mm și lungime totală $l = 4$ m. În lagăr trebuie să fie asigurat un debit $Q = 0{,}15 \cdot 10^{-3}$ m³/s, corespunzător turației arborelui $n = 200$ rot/min.

Se cunosc : $H_0 = 3$ m, $b = 0{,}35$ m, viscozitatea cinematică a uleiului $\nu = 0{,}35 \cdot 10^{-4}$ m²/s. Se pune condiția ca suprafața liberă a uleiului în repaus relativ să intersecteze capacul superior al rezervorului la diametrul $D_1 = 1$ m.

Să se determine viteza medie de curgere în tubul de alimentare, pierderea de sarcină în tub, presiunea necesară în punctul M pentru asigurarea debitului impus și diametrul D_0 la care urmează să se amplaseze tubul.

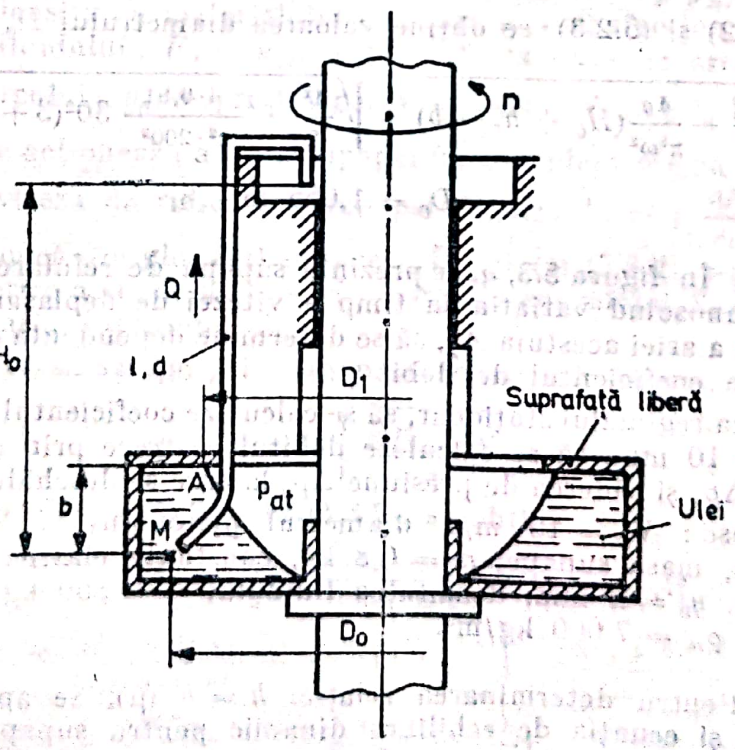


Fig. 5.2.

Rezolvare : Viteza medie în tubul de alimentare se calculează cu relaţia

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0{,}15 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}012^2} = 1{,}32 \text{ m/s}.$$

La această viteză, corespunde numărul $\mathrm{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1{,}32 \cdot 0{,}012}{0{,}35 \cdot 10^{-4}} = 445 < \mathrm{Re}_{cr}$ deci regimul de curgere este laminar.

Pierderea de sarcină se calculează cu formula

$$h_r = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} = \frac{64}{\mathrm{Re}} \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} = \frac{64}{445} \cdot \frac{4}{0{,}012} \cdot \frac{1{,}32^2}{2 \cdot 9{,}81} = 4{,}2 \text{ m}.$$

Presiunea necesară în punctul M pentru asigurarea debitului impus este

$$H_M = H_0 + h_r = 3 + 4{,}2 = 7{,}2 \text{ m} \qquad (5.2.1)$$

Relaţia fundamentală a hidrostaticii (3.1.4) se scrie între punctele M şi A.

$$p_M + \rho\left(gz_M - \frac{\omega^2 r_0^2}{2}\right) = p_A + \rho\left[g(z_M + b) - \frac{\omega^2 r_1^2}{2}\right];$$

cu $p_A = p_a$ rezultă $\frac{p_M - p_a}{\rho g} = b + \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} - \frac{\omega^2 r_1^2}{2g}$. (5.2.2)

Presiunea H_M, determinată în (5.2.1), se mai poate scrie

$$H_M = (p_{statică} + p_{dinam})/\rho g = \overline{MA} + \frac{u^2}{2g} = \frac{p_M - p_a}{\rho g} + \frac{\omega^2 r_0^2}{2g},$$

deci $\frac{p_M - p_a}{\rho g} = H_M - \frac{\omega^2 r_0^2}{2g}$. (5.2.3)

Din (5.2.2) şi (5.2.3), se obţine valoarea diametrului D_0

$$D_0 = \sqrt{\frac{D_1^2}{2} + \frac{4g}{\pi^2\omega^2}(H_0 + h_r - b)} = \sqrt{\frac{1^2}{2} + \frac{4 \cdot 9{,}81}{\pi^2 \cdot 200^2} 30^2 (3 + 4{,}2 - 0{,}35)}$$

$$D_0 = 1{,}055 \text{ m}.$$

Problema 5.3. În figura 5.3, *a*, se prezintă supapa de refulare a unei pompe cu piston. Cunoscînd variaţia în timp a vitezei de deplasare a pistonului, $V_p = V_p(t)$ şi a ariei acestuia A_p, să se determine dependenţa cursei supapei h în funcţie de coeficientul de debit μ.

În ipoteza regimului staţionar, să se calculeze coeficientul de debit pentru distanţa $h = 10$ mm, să se calculeze debitul ce trece prin supapă, căderea de presiune Δp_s şi căderea de presiune Δp_0 la care se deschide supapa.

Se cunosc : $V_p = 10$ m/s, diametrul pistonului $d_p = d_1 = 50$ mm, $d_b = 10$ mm, masa supapei $m = 0{,}8$ kg, constanta elastică a arcului $k = 40$ N/mm, $y_0 = 2$ mm, densitatea fluidului $\rho = 850$ kg/m³, densitatea materialului $\rho_m = 7\,000$ kg/m³.

Rezolvare : Pentru determinarea relaţiei $h = h(\mu)$, se aplică ecuaţia de continuitate şi ecuaţia de echilibru dinamic pentru supapă. Se consideră volumul de control $\mathcal{V}$ cu suprafeţele S_1 şi $S_2 = S_{21} \cup S_{22}$.

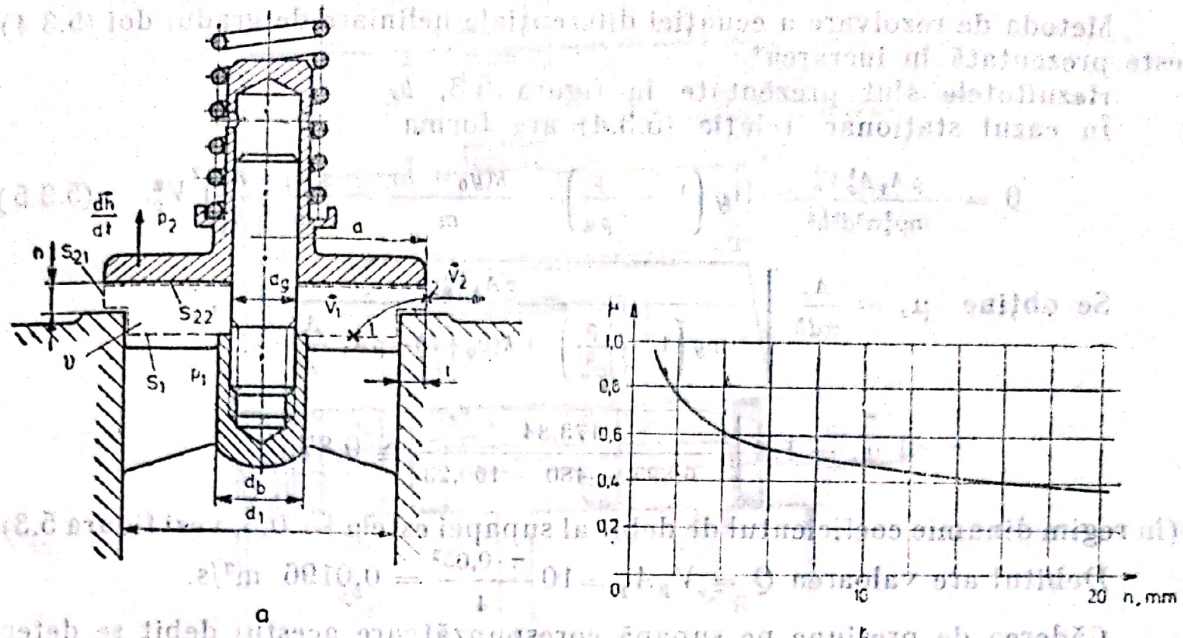


Fig. 5.3.

Ecuația de continuitate are forma

$$Q = Q_{21} + Q_{22} = \mu\pi\, dhV_2 + \frac{\pi(d^2 - d_g^2)}{4}\frac{dh}{dt} = A_1V_1 = A_pV_p. \qquad (5.3.1)$$

unde $A_1 = \frac{\pi(d_1^2 - d_b^2)}{4}$ și Q_{21} — debitul real ce curge prin suprafața S_{21}.

Ecuația de echilibru proiectată pe direcția de deplasare a supapei este

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = A_1(p_1 - p_2) - G - F_a + I_1 - F_r, \qquad (5.3.2)$$

în care G reprezintă greutatea supapei în fluid, $G = mg(1 - \rho/\rho_m)$; m — masa supapei; ρ_m — densitatea materialului din care este confecționată supapa; ρ — densitatea fluidului; $F_a = k(y_0 + h)$ — forța dată de arcul supapei; k — constanta arcului; y_0 — prestrîngerea inițială; $I_1 = \rho A_1\left(V_1 - \frac{dh}{dt}\right)^2$ forța de impuls ce acționează asupra supapei (se consideră viteza fluidului V_1 mai mare decît viteza de ridicare a supapei dh/dt); $F_r = \varepsilon\frac{dh}{dt}$ — forța de frecare hidrodinamică din ghidajul supapei. (În relația (5.3.2), s-a considerat distanța de acoperire a supapei $t << d_1$, deci aria suprafeței S_1 este aproximativ egală cu aria suprafeței S_2^2).

Debitul real ce se scurge prin supapă se pune sub forma:

$$Q_{21} = \mu\pi dh\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}. \qquad (5.3.3)$$

Introducînd (5.3.3) și (5.3.1) în (5.3.2), se obține

$$m\frac{d^2h}{dt^2} + G + F_a + F_r - I_1 = \frac{A_1\rho}{2}\cdot\frac{(A_pV_p - A_2^2\, dh/dt)^2}{\mu^2(h)\pi^2d^2h^2}, \text{ cu } A_2^2 = \frac{\pi(d^2 - d_g^2)}{4},$$

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{\rho A_1(A_pV_p - A^2\, dh/dt)^2}{m\mu^2(h)\pi^2d^2h^2} - g\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) - \frac{k(y_0 + h)}{m} - \frac{\varepsilon}{m}\frac{dh}{dt} + \frac{\rho A_1}{m}\left(\frac{A_p}{A_1}V_p - \frac{dh}{dt}\right)^2. \qquad (5.3.4)$$

Metoda de rezolvare a ecuației diferențiale neliniare de gradul doi (5.3.4) este prezentată în lucrarea* :

Rezultatele sînt prezentate în figura 5.3, *b*.

În cazul staționar, relația (5.3.4) are forma

$$0 = \frac{\rho A_1 A_p^2 V_p^2}{m\mu_s^2\pi^2 d^2 h^2} - g\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) - \frac{k(y_0 + h)}{m} + \frac{\rho A_1}{m}\left(\frac{A_p}{A_1}\right)^2 V_p^2. \qquad (5.3.5)$$

Se obține $\mu_s = \frac{A_p}{\pi d h}\sqrt{\frac{\rho A_1 V_p^2}{mg\left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) + k(y_0+h) - \rho A_1 \frac{A_p^2}{A_1^2}\cdot V_p^2}}$,

$$\mu_s = 1{,}2\sqrt{\frac{173{,}84}{6{,}895 + 480 - 160{,}23}} \cong 0{,}87.$$

(în regim dinamic coeficientul de debit al supapei este $\mu = 0{,}5$, vezi figura 5.3).

Debitul are valoarea $Q = V_p A_p = 10\frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4} = 0{,}0196$ m³/s.

Căderea de presiune pe supapă corespunzătoare acestui debit se determină din relația (5.3.3)

$$\Delta p_s = \frac{\rho Q^2}{2\mu^2\pi^2 d^4 h^2} = \frac{850 \cdot 0{,}0196}{2 \cdot 0{,}87^2 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}052^2 \cdot 0{,}012} = 0{,}08 \text{ MPa}.$$

Căderea de presiune la care se deschide supapa este

$$\Delta p_0 = \frac{ky_0 + mg(1 - \rho/\rho_m)}{\pi d_1^2/4} = \frac{40 \cdot 2 + 0{,}8 \cdot 9{,}81(1 - 850/7\,000)}{\pi \cdot 0{,}05^2/4} = 0{,}044 \text{ MPa}.$$

Problema 5.4. În figura 5.4, se prezintă un dispozitiv hidraulic pentru prelucrare mecanică prin copiere**. Uleiul aspirat de pompă din rezervorul R este introdus cu debitul Q și presiunea p_1 într-un distribuitor C, al cărui sertar este legat de vîrful sondei de urmărire S. Presupunînd că sonda se deplasează către stînga, sertarul distribuitorului deschide orificiul A, comandînd deplasarea pistonului cilindrului hidraulic care acționează scula prelucrătoare în sensul indicat de sondă. Debitul de ulei vehiculat în circuitul indicat revine în rezervorul R.

Să se stabilească caracteristicile pompei volumice, astfel încît, la o deplasare a sondei S, $x = 1$ mm, viteza pistonului să fie $V_p = 0{,}5$ m/s sub o forță de încărcare $F = 35$ kN. Se cunosc : diametrul sertarului $d_s = 10$ mm, diametrul și lungimea conductelor de alimentare $d = 8$ mm, $l = 5$ m, diametrul pistonului $D = 150$ mm, diametrul tijei pistonului $d_p = 30$ mm, viscozitatea cinematică a uleiului $\nu = 30$ cSt, densitatea uleiului $\rho = 850$ kg/m³.

Pentru calculul coeficientului de debit, se va consulta anexa A.4.

Rezolvare : Pompele volumice se caracterizează prin menținerea constantă a debitului pentru o variație largă a presiunii de lucru. Presiunea necesară în instalație trebuie să asigure deplasarea pistonului și deci învingerea rezistențelor hidraulice și a forțelor exterioare aplicate pe motoarele hidraulice ; presiunea este limitată de construcția pompei, fiind indicată de întreprinderea producătoare. Pentru pompele obișnuite, presiunea maximă de lucru se situează între 20 și 30 MPa.

---

* M. Cazacu, V. Nistreanu, Mișcarea supapelor automate ale unei pompe cu piston acționată prin bielă manivelă. Comunicările Conferinței de Mașini hidraulice, Timișoara, 1964.

** Decaulne, P., Pellegrin, M. Problémes d'asservissement. Paris, Dunod, 1967.

Scanned with OKEN Scanner

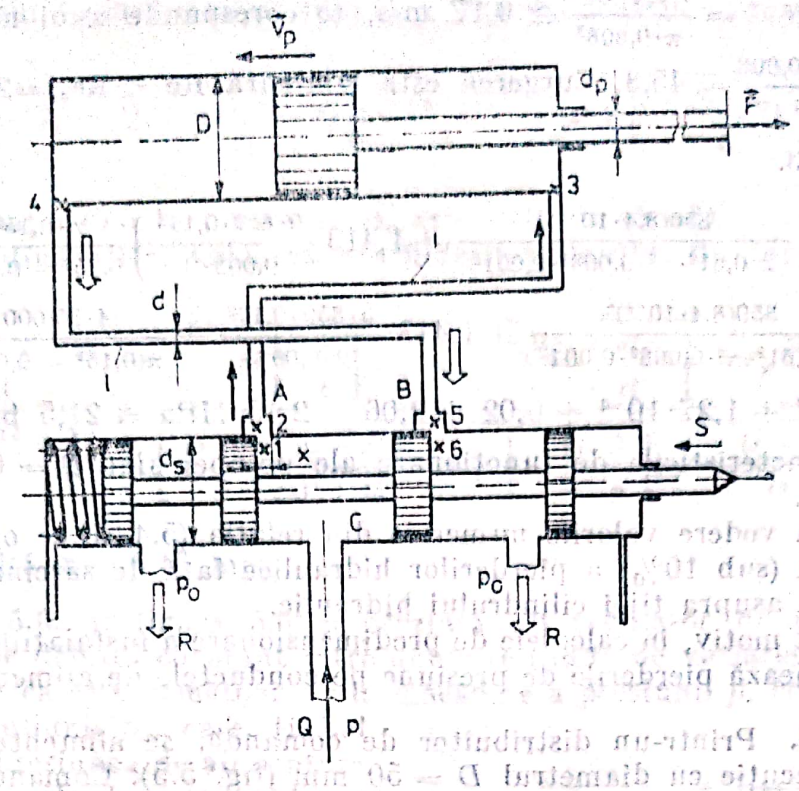


Fig. 5.4.

Debitul necesar se calculează cu relaţia

$$Q = V_p\pi(D^2-d_p^2)/4 = 0{,}5\cdot10^{-3}\pi(0{,}15^2-0{,}03^2)/4 = 8{,}4\cdot10^{-6}\ \text{m}^3/\text{s}.$$

Deci $Q = 0{,}5$ l/min.

Pentru determinarea presiunii de lucru, se aplică relaţia lui Bernoulli între punctele (*2*, *3*) şi (*4*, *5*), admiţînd că presiunile p_3 şi p_4 acţionează pe feţele pistonului cilindrului hidraulic:

$$p_3 = p_2 - \lambda(l/d)(\rho V^2/2)\,;\quad p_5 = p_4 - \lambda(l/d)(\rho V^2/2)\,; \tag{5.4.1}$$

$$Q = \mu\pi d_s x\sqrt{2(p_1-p_2)/\rho} = \mu\pi d_s x\sqrt{2(p_5-p_6)/\rho}, \tag{5.4.2}$$

$$F = p_3\,\pi(D^2-d_p^2)/4 - p_4\pi D^2/4. \tag{5.4.3}$$

Relaţiile (5.4.2) reprezintă expresia debitului funcţie de căderea de presiune pe un orificiu.

Din sistemul ecuaţiilor (5.4.1), (5.4.2), (5.4.3) rezultă

$$p = \left(p_0 + \frac{\rho Q^2}{2\mu^2\pi^2d^2x^2} + \lambda\frac{l}{d}\frac{\rho V^2}{2}\right)\frac{\pi D^2}{D^2-d_p^2} + \frac{\rho Q^2}{2\mu^2\pi^2d^2x^2} + \lambda\frac{l}{d}\frac{\rho V^2}{2} + \frac{4F}{\pi(D^2-d_p^2)}. \tag{5.4.4}$$

În (5.4.4) s-a notat cu p_0 presiunea din rezervor $p_0 = p_6 = p_{at}$; $V = 4Q/(\pi d^2)$ — viteza de curgere în conducta de alimentare; λ — coeficientul lui Darcy.

Se obține $V = \frac{4 \cdot 8{,}4 \cdot 10^{-6}}{\pi \cdot 0{,}008^2} \cong 0{,}17$ m/s, ce corespunde unui număr $\mathbf{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0{,}17 \cdot 0{,}008}{30 \cdot 10^{-6}} = 45{,}3$. Curgerea este laminară $\mathbf{Re} < \mathbf{Re}_{cr} = 2\,300$ și $\lambda = \frac{64}{\mathbf{Re}} = 1{,}413$.

$$p_r = \left(\frac{850(8{,}4 \cdot 10^{-6})^2}{2 \cdot 0{,}61^2 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}008^2 \cdot 0{,}001^2} + 1{,}413 \frac{5 \cdot 850 \cdot 0{,}17^2}{0{,}008 \cdot 2} \right) \frac{\pi \cdot 0{,}15^2}{0{,}15^2 - 0{,}03^2} +$$

$$+ \frac{850(8{,}4 \cdot 10^{-6})^2}{2 \cdot 0{,}61^2 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}008^2 \cdot 0{,}001^2} + 1{,}413 \frac{5 \cdot 850 \cdot 0{,}17^2}{2 \cdot 0{,}008} + \frac{4 \cdot 35\,000}{\pi(0{,}15^2 - 0{,}03)^2} =$$

$$= 0{,}07 + 1{,}27 \cdot 10^{-4} + 0{,}02 + 2{,}06 = 2{,}15 \text{ MPa} = 21{,}5 \text{ bar}. \quad (5.4.5)$$

Deci caracteristicile de funcționare ale pompei sînt $Q = 0{,}5$ l/min și $p = 21{,}5$ bar.

Avînd în vedere valorile numerice din relația (5.4.5), se observă ponderea scăzută (sub 10%) a pierderilor hidraulice față de sarcina exterioară ce acționează asupra tijei cilindrului hidraulic.

Din acest motiv, în calculele de predimensionare a instalațiilor, în prima fază, se neglijează pierderile de presiune pe conductele de alimentare.

Problema 5.5. Printr-un distribuitor de comandă, se alimentează un cilindru de execuție cu diametrul $D = 50$ mm (fig. 5.5). Comanda debitului se realizează prin deplasarea sertarului distribuitorului, care acoperă pe o distanță variabilă x, o fantă cu lungimea $s = 3$ mm. Atît presiunea de alimentare $p_0 = 15$ MPa, cît și presiunea $p_1 = 0{,}2$ MPa, se mențin constante. La o încărcare dată a cilindrului de execuție, corespunde o presiune p_x și deci o închidere de fantă x. Să se determine dependența dintre p_x și x_0, cînd cilindrul de execuție este imobil, și funcția $x = x(x_0)$ pentru o viteză de deplasare a cilindrului $V_p = \text{constant}$ sub aceeași sarcină. Aplicație numerică: $V_p = 0{,}1$ mm/s, $\rho = 850$ kg/m^3, lățimea fantei $b = 10$ mm, $x_0 = 0{,}3$ mm, coeficientul de debit $\mu_0 = \mu_1 = 0{,}62$. (Se neglijează pierderile prin conducta de alimentare a cilindrului de execuție).

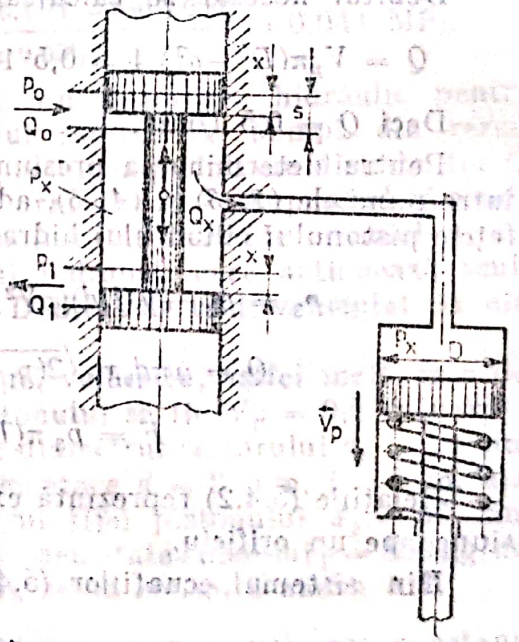


Fig. 5.5.

Rezolvare: Debitul de alimentare se calculează cu formula

$$Q_0 = \mu b(s - x_0)\sqrt{2(p_0 - p_x)/\rho}. \quad (5.5.1)$$

Pentru $V_p = 0$, se obține $Q_0 = Q_1$, deci $\mu b(s - x_0)\sqrt{2(p_0 - p_x)/\rho} = \mu x b\sqrt{2(p_x - p_1)/\rho}$. (5.5.2)

Dependența $p_x = p_x(x_0)$ are forma $p_x = \frac{(s - x_0)^2 p_0 + x_0^2 p_1}{(s - x_0)^2 + x_0^2}$. (5.5.3)

Valoarea presiunii p_x este $p_x = \frac{(3 - 0{,}3)^2 \cdot 15 \cdot 10^6 + 0{,}3^2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^6}{(3 - 0{,}3)^2 + 0{,}3^2} =$ $= 14{,}8$ MPa.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul deplasării cilindrului cu viteza V_p, ecuația de continuitate (5.5.2) devine

$$Q_0 = Q_1 + Q_x : \mu b(s - x)\sqrt{\frac{2(p_0 - p_x)}{\rho}} = \mu b x \sqrt{\frac{2(p_x - p_1)}{\rho}} + V_p \frac{\pi D^2}{4}. \tag{5.5.4}$$

În relația (5.5.4), presiunea p_x este dată de (5.5.3).

Se obține astfel valoarea deschiderii sertarului de comandă în regim dinamic

$$x = \frac{1}{\mu b} \cdot \frac{\mu b s \sqrt{\frac{2}{\rho}\left[p_0 - \frac{(s - x_0)^2 p_0 + x_0^2 p_1}{(s - x_0)^2 + x_0^2}\right]} - V_p \frac{\pi D^2}{4}}{\sqrt{\frac{2}{\rho}\left[\frac{(s - x_0)^2 p_0 + x_0^2 p_1}{(s - x_0)^2 + x_0^2} - p_1\right]} + \sqrt{\frac{2}{\rho}\left[p_0 - \frac{(s - x_0)^2 p_0 + x_0^2 p_1}{(s - x_0)^2 + x_0^2}\right]}} \tag{5.5.5}$$

Rezultă $x = 0{,}16$ mm.

Problema 5.6. În figura 5.6 se prezintă un regulator de debit, dispozitiv ce menține debitul constant între anumite limite de variație ale presiunii p. Funcționarea este următoarea : la o scădere a presiunii p, corespunde o scădere a presiunii p_x, care, ținînd seama că presiunea de alimentare p_0 = constant, duce la creșterea debitului, $Q > Q_0$. Căderea de presiune $p_0 - p_x$ fiind mai mare, se comprimă resortul R și deci fanta de lățime x se micșorează față de situația trecerii debitului nominal Q_0. Astfel, debitul Q scade pînă la valoarea nominală impusă de predimensionarea resortului pentru $Q = Q_0$ (analog se descrie funcționarea pentru cazul în care presiunea p crește).

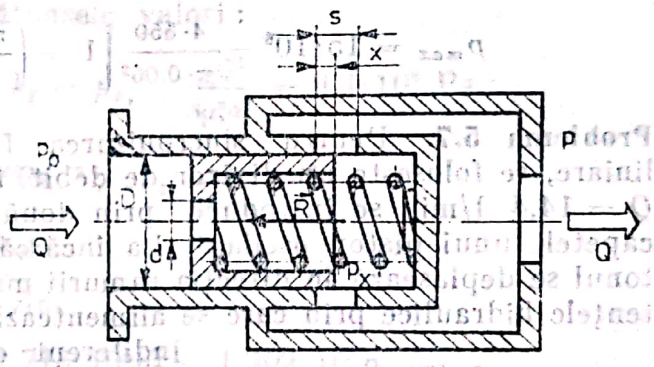


Fig. 5.6.

Cunoscînd forța $R = 550$ N și presiunea de alimentare $p_0 = 15$ MPa, să se determine :

1) debitul nominal Q_0 ;

2) dependența deschiderii x de presiunea p și valoarea ei pentru $p = 0$;

3) valoarea maximă a presiunii p de la care regulatorul nu mai funcționează. Se dau : diametrele $D = 60$ mm și $d = 10$ mm, lățimea maximă a fantei $s = 5$ mm, aria totală a fantelor $A_s = 1{,}5$ cm², densitatea fluidului $\rho = 850$ kg/m³, coeficienții de debit prin drosel și prin fante egali cu $\mu = 0{,}6$.

Rezolvare : Debitul Q_0 are expresia $Q_0 = \mu(\pi d^2/4)\sqrt{2(p_0 - p_x)/\rho}$. (5.6.1)

Diferența de presiune echilibrează forța din resort.

Avînd în vedere că $d << D$, se poate considera

$$(p_0 - p_x)\pi D^2/4 = R. \tag{5.6.2}$$

Se obține $p_0 - p_x = \frac{4R}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 550}{\pi \cdot 0{,}06^2} = 0{,}1945$ MPa.

$$Q_0 = 0{,}6 \frac{\pi \cdot 0{,}01^2}{4}\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1945 \cdot 10^6}{850}} = 60 \text{ l/min}.$$

Debitul prin drosel este egal cu debitul care trece prin fante, deci

$$Q = \mu(\pi d^2/4)\sqrt{2(p_0 - p_x)/\rho} = \mu(xA_s/s)\sqrt{2(p_x - p)/\rho}. \qquad (5.6.3)$$

Din (5.6.2) şi (5.6.3), se obţine dependenţa lăţimii fantei x de presiunea p

$$x = \frac{\pi d^2}{4}\cdot\frac{s}{A_s}\sqrt{\frac{4R/(\pi D^2)}{p_0 - p - 4R/(\pi D^2)}}. \qquad (5.6.4)$$

Pentru valoarea lui p_0 indicată şi $p = 0$, se obţine

$$x = \frac{\pi\cdot 0{,}01^2}{4}\cdot\frac{0{,}005}{1{,}5\cdot 10^{-4}}\sqrt{\frac{\frac{4\cdot 550}{\pi\cdot 0{,}06^2}}{15\cdot 10^6 - 0 - \frac{4\cdot 550}{\pi\cdot 0{,}06^2}}} = 0{,}3 \text{ mm}.$$

Presiunea maximă de funcţionare rezultă din condiţia $x = s$ introdusă în relaţia (5.6.4)

$$p_{max} = p_0 - \frac{4R}{\pi D^2}\left[1 + \left(\frac{\pi d^2/4}{A_s}\right)^2\right],$$

$$p_{max} = 15\cdot 10^6 - \frac{4\cdot 550}{\pi\cdot 0{,}06^2}\left[1 + \left(\frac{\pi\cdot 0{,}01^2/4}{1{,}5\cdot 10^{-4}}\right)^2\right] = 14{,}75 \text{ MPa}.$$

Problema 5.7. Pentru sincronizarea funcţionării motoarelor hidraulice liniare, se foloseşte un divizor de debit, figura 5.7, în care debitul de fluid $Q = 14{,}4$ l/min se introduce prin două drosele identice cu $d = 2$ mm la capetele unui piston oscilant. La încărcări neuniforme ale motoarelor, pistonul se deplasează în direcţia ramurii mai puţin încărcate, modificînd rezistenţele hidraulice prin care se alimentează cei doi cilindri hidraulici. Astfel, indiferent de sarcina impusă din exterior, debitele pe cele două ramuri vor fi identice. Dacă încărcărlle pe cei doi cilindri sînt $F_1 = 20$ kN şi $F_2 = 15$ kN, să se determine presiunea de alimentare p_0 şi distanţa x. Se cunosc: lăţimea şi lungimea fantei $s = 4$ mm, $b = 5$ mm, diametrul $D = 50$ mm, coeficientul de debit al droselului $\mu_1 = 0{,}6$, coeficientul de debit al fantei $\mu = 0{,}5$, densitatea uleiului $\rho = 870$ kg/m³. Se neglijează forţele din arcuri.

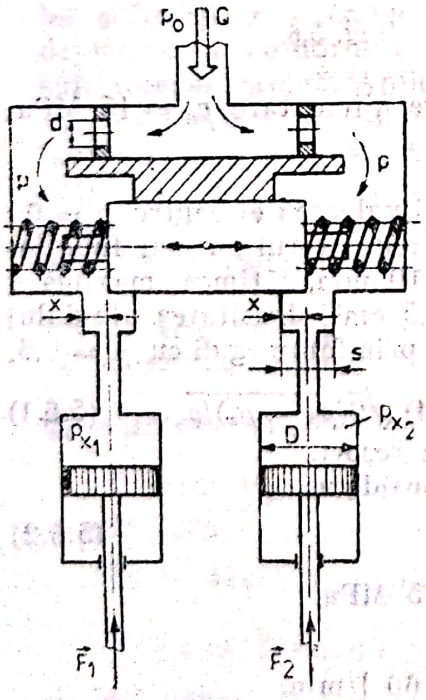


Fig. 5.7.

Rezolvare: Debitele pe ramurile *1* şi *2* fiind identice, ecuaţia de continuitate are forma

$$\frac{Q}{2} = \mu x b\sqrt{2(p - p_{x1})/\rho} =$$

$$= \mu(s - x)b\sqrt{2(p - p_{x2})/\rho} =$$

$$= \mu_1(\pi d^2/4)\sqrt{2(p_0 - p)/\rho}, \qquad (5.7.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

în care p reprezintă presiunea ce acționează pe fețele pistonului oscilant, iar presiunile p_{x1} și p_{x2} au valorile

$$p_{x1} = \frac{4F_1}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 20\,000}{\pi \cdot 0{,}05^2} = 10{,}186 \text{ MPa},$$

$$p_{x2} = \frac{4F_2}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 15\,000}{\pi \cdot 0{,}05^2} = 7{,}64 \text{ MPa}.$$

Din a doua egalitate introdusă în (5.7.1), rezultă

$$x = \frac{s\sqrt{p - p_{x2}}}{\sqrt{p - p_{x1}} + \sqrt{p - p_{x2}}}, \tag{5.7.2}$$

unde

$$p = p_0 - \frac{2\rho Q^2}{\mu_1^2 \pi^2 d^4}. \tag{5.7.3}$$

Cu (5.7.2). și (5.7.3), introduse în prima egalitate din (5.7.1), se obține o ecuație de gradul 4 în p_0.

$$k_3 p_0^4 - 2k_3 k_4 p_0^3 + (k_3 k_1^2 + 4k_1 k_2 k_3 + k_3 k_2^2 - 8)p_0^2 + (8k_4 - 2k_1^2 k_2 k_3 - 2k_1 k_2^2 k_3)p_0 + k_1^2 k_2^2 k_3 - k_4^2 - 4k_1 k_2 = 0. \tag{5.7.4}$$

Constantele k din (5.7.4) au următoarele valori:

$$k_1 = p_{x_1} + \frac{\rho Q^2}{8\mu_1^2 a^2} = 11{,}85 \cdot 10^6 \text{ Pa}; \quad k_2 = p_{x_2} + \frac{\rho Q^2}{8\mu_1^2 a^2} = 9{,}4 \cdot 10^6 \text{ Pa};$$

$$k_3 = \frac{64}{\rho^2 Q^4} \mu^4 b^4 s^4 = 2{,}54 \cdot 10^{-10} \text{Pa}^{-2}; \quad k_4 = k_1 + k_2;$$

$$a = \pi d^2/4.$$

Cu aceste valori, expresia (5.7.4) devine

$$F(p_0) = 2{,}54p_0^4 - 1{,}08 \cdot 10^3 p_0^3 + 1{,}713 \cdot 10^5 p_0^2 - 1{,}202 \cdot 10^7 p_0 + 3{,}15 \cdot 10^8 = 0, \tag{5.7.5}$$

în care p_0 se exprimă în bar.

Rezolvarea ecuației (5.7.5) se face prin procedeul numeric prezentat în problema 2.14.

Cu $F'(p_0) = 10{,}16p_0^3 - 3{,}24 \cdot 10^3 p_0^2 + 3{,}425 \cdot 10^5 p_0 - 1{,}202 \cdot 10^7$

și valoarea inițială $p_0^{(1)} = 140$ bar, după trei iterații, se obține $p_0 = 133{,}4$ bar $=$ $= 13{,}34$ MPa.

Din (5.7.2) și (5.7.3), se obține valoarea deplasării x a pistonului care împarte debitul egal pe cele două ramuri

$$p = 13{,}34 \cdot 10^6 - \frac{2 \cdot 870 \cdot (240 \cdot 10^{-6})^2}{0{,}6^2 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}002^4} = 11{,}58 \text{ MPa}.$$

Deci $$x = \frac{4\sqrt{11{,}58 - 7{,}64}}{\sqrt{11{,}58 - 10{,}186} + \sqrt{11{,}58 - 7{,}64}} = 2{,}51 \text{ mm}.$$

Problema 5.8. Prin intermediul distribuitorului DR, o pompă volumică alimentează circuitul din figura 5.8 cu debitul $Q = 0{,}4$ l/min. Sub acțiunea unei forțe $F = 35$ kN, pistonul se deplasează cu viteză constantă.

Scanned with OKEN Scanner

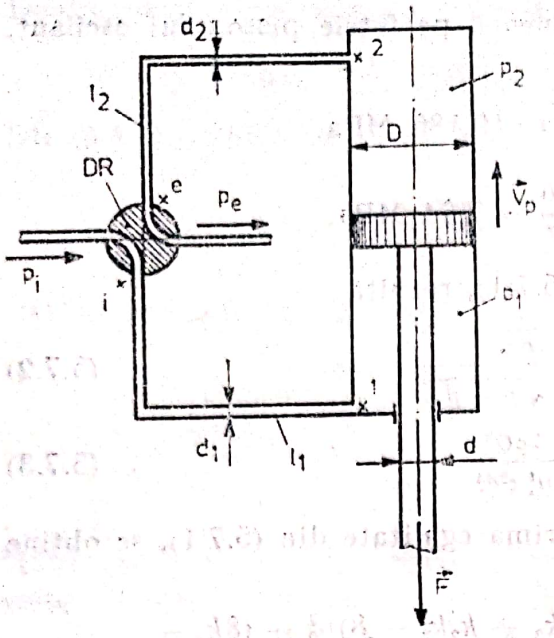


Fig. 5.8.

Cunoscînd lungimile conductelor de alimentare ale motorului liniar $l_1 = 5$ m, $l_2 = 8$ m și diametrele acestora $d_1 = 10$ mm, $d_2 = 8$ mm, să se determine căderea de presiune $\Delta p = p_i - p_e$ pe distribuitor.

Se dau diametrele pistonului $D = 60$ mm, $d = 10$ mm și caracteristicile lichidului de lucru, viscozitatea cinematică $\nu = 20$ cSt și densitatea $\rho = 750$ kg/m³.

Rezolvare : Viteza cu care se deplasează pistonul este $V_p = \frac{4Q_1}{\pi(D^2 - d^2)} = \frac{4 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3}}{60\pi(0{,}06^2 - 0{,}01^2)} = 2{,}4$ mm/s.

Din ecuația de continuitate, $Q_1 = Q_2$.

Vitezele uleiului în cele două conducte sînt $V_1 = \frac{4Q_1}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3}}{60\pi 0{,}01^2} = 0{,}085$ m/s ; $V_2 = \frac{4Q_2}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3}}{60\pi \cdot 0{,}008^2} = 0{,}135$ m/s.

Pentru determinarea diferenței de presiune $p_i - p_e$, se aplică relația lui Bernoulli între punctele $(i,1)$ și $(2,e)$

$$p_i = p_1 + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \rho \frac{V_1^2}{2} ; \quad p_e = p_2 - \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \rho \frac{V_2^2}{2} . \tag{5.8.1}$$

Rezultă $p_i - p_e = p_1 - p_2 + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \rho \frac{V_1^2}{2} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \rho \frac{V_2^2}{2}$. (5.8.2)

Curgerea în conducte este laminară $\mathbf{Re}_1 = \frac{V_1 d_1}{\nu} = \frac{0{,}085 \cdot 0{,}01}{20 \cdot 10^{-6}} = 42{,}5 < \mathbf{Re}_{cr}$, $\mathbf{Re}_2 = \frac{V_2 d_2}{\nu} = \frac{0{,}135 \cdot 0{,}008}{20 \cdot 10^{-6}} = 54 < \mathbf{Re}_{cr}$,

deci coeficienții lui Darcy sînt :

$\lambda_1 = 64/\mathbf{Re}_1 = 64/42{,}5 = 1{,}506$; $\lambda_2 = 64/\mathbf{Re}_2 = 64/54 = 1{,}185$.

Forța F este echilibrată de diferența de presiune care acționează pe fețele pistonului

$F = p_1 \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) - p_2 \frac{\pi D^2}{4}$. Se aproximează $F \cong (p_1 - p_2)\frac{\pi D^2}{4}$.

Relația (5.8.2) devine $p_i - p_e = \frac{4F}{\pi D^2} + \frac{\rho}{2}\left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} V_1^2 + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} V_2^2\right) = \frac{4 \cdot 35\,000}{\pi \cdot 0{,}06^2} + \frac{750}{2}\left(1{,}506 \frac{5}{0{,}01} \cdot 0{,}085^2 + 1{,}185 \frac{8}{0{,}008} \cdot 0{,}135^2\right) = 12{,}38 + 0{,}01 = 12{,}39$ MPa $\cong$ $\cong 124$ bar.

Se observă că practic $p_i - p_e = p_1 - p_2$, deci pierderea de presiune pe lungimea conductelor de alimentare ale motorului hidraulic sînt neglijabile.

Scanned with OKEN Scanner

Problema 5.9. O pompă volumică alimentează un motor hidraulic liniar, al cărui piston se deplasează sub acțiunea forței $F = 20$ kN cu viteza constantă $V_p = 0{,}1$ m/s.

În ipoteza neglijării lungimii conductei care leagă cilindrul hidraulic la rezervor, să se determine presiunea de la refularea pompei, p_R.

Se cunosc: diametrul cilindrului $D = 80$ mm, diametrul tijei $d_p = 20$ mm, diametrul conductei de alimentare $d = 10$ mm, lungimea $l = 15$ m, viscozitatea cinematică a uleiului $\nu = 50$ cSt și densitatea acestuia $\rho = 800$ kg/m³.

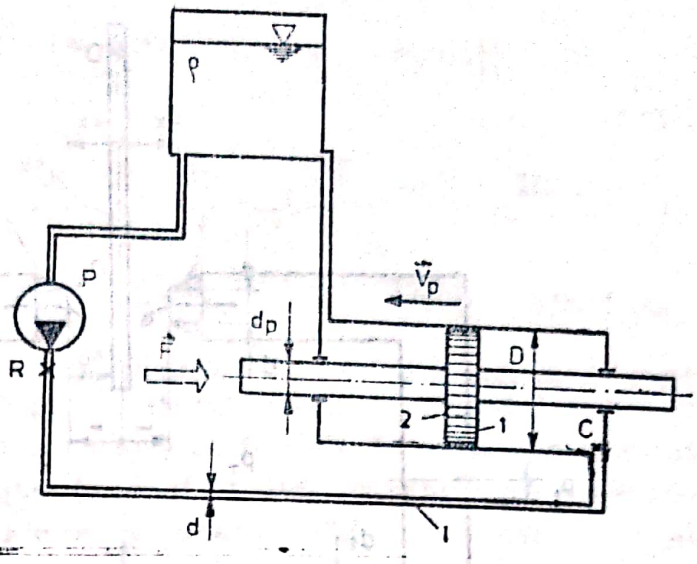


Fig. 5.9.

Rezolvare: Din ecuația de continuitate se obține valoarea debitului furnizat de pompă

$$Q = V_p \frac{\pi}{4}(D^2 - d_p^2) = 0{,}1 \frac{\pi}{4}(0{,}08^2 - 0{,}02^2) = 28{,}3 \text{ l/min.}$$

Viteza în conducta de alimentare este $V = 4Q/(\pi d^2) = 6$ m/s.

Numărul Reynolds corespunzător este $\mathrm{Re} = Vd/\nu = 6 \cdot 0{,}01/50 \cdot 10^{-6} = 1\,200 < \mathrm{Re}_{cr} = 2\,300$, deci curgerea este laminară. Se aplică relația lui Bernoulli între punctele R și C

$$p_R = p_c + \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{V^2}{2}. \qquad (5.9.1)$$

Forța F este echilibrată de forța de presiune care acționează pe fețele pistonului motorului hidraulic

$$F = (p_1 - p_2)\frac{\pi}{4}(D^2 - d_p^2).$$

Se admite $p_1 = p_c$ și $p_2 = p_{at}$. Relația (5.9.1) devine

$$p_R = \frac{4F}{\pi(D^2 - d_p^2)} + \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{V^2}{2} = \frac{4 \cdot 20\,000}{\pi(0{,}08^2 - 0{,}02^2)} + \frac{64}{1\,200} \cdot \frac{15}{0{,}01} 800 \frac{6^2}{2} =$$

$$= 4{,}24 + 1{,}15 = 5{,}39 \text{ MPa} \cong 54 \text{ bar}$$

(curgerea fiind laminară, coeficientul lui Darcy s-a calculat cu formula $\lambda = 64/\mathrm{Re}$).

Problema 5.10. În comanda instalațiilor hidraulice un loc important este ocupat de dispozitivul numit servovalvă alcătuit din două etaje: distribuitorul de comandă propriu-zis și amplificatorul duză-paletă, prezentat în figura 5.10.

Funcționarea amplificatorului este următoarea: se alimentează dispozitivul la presiunea p_0 și debitul Q pe două ramuri identice; debitul este eliminat într-un rezervor prin duza *1* în fața căreia se găsește paleta *2*. Paleta este acționată de un magnet prin intermediul unui curent de comandă i proporțional cu semnalul primit de la elementul de execuție. Se presupune o deplasare x

Scanned with OKEN Scanner

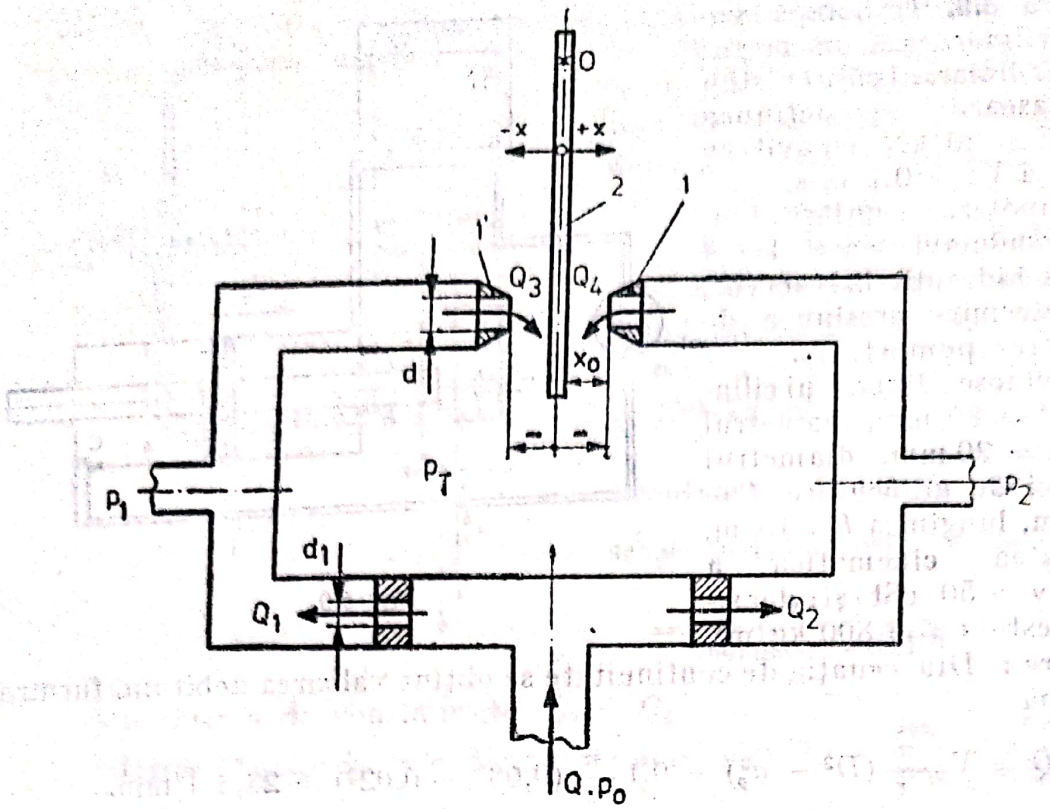


Fig. 5.10.

a paletei spre dreapta ; datorită deplasării x, duza *1* se obturează mai mult și presiunea p_2 crește în detrimentul presiunii p_1. Diferența de presiune astfel formată acționează etajul al doilea al servovalvei (distribuitorul de comandă), care comandă, la rîndul lui, elementul de execuție al instalației hidraulice. În funcționarea amplificatorului duză-paletă, o caracteristică importantă (caracteristica statică) este dependența diferenței de presiune $\Delta p = p_2 - p_1$ de presiunea de alimentare p_0 și deplasarea x a clapetei. Să se determine caracteristica statică a amplificatorului, presiunile p_1 și p_2 și debitul admis pentru poziția de zero a clapetei $x = 0$. Se cunosc diametrele $d_1 = 0{,}9$ mm, $d_2 = 2$ mm, distanța $x_0 = 0{,}12$ mm, coeficienții de debit $\mu_1 = 0{,}8$, $\mu = 0{,}6$, densitatea fluidului $\rho = 900$ kg/m^3, presiunea de alimentare $p_0 = 7$ MPa

Rezolvare : În cazul în care consumatorii sînt blocați, ecuația de continuitate este $Q_1 = Q_3$, $Q_2 = Q_4$. Se obține

$$\begin{aligned} \mu_1(\pi d_1^2/4)\sqrt{2(p_0 - p_1)/\rho} &= \mu\pi d(x_0 + x)\sqrt{2p_1/\rho}, \\ \mu_1(\pi d_1^2/4)\sqrt{2(p_0 - p_2)/\rho} &= \mu\pi d(x_0 - x)\sqrt{2p_2/\rho}, \end{aligned} \tag{5.10.1}$$

(s-a considerat presiunea în rezervor egală cu presiunea atmosferică).

Prin ridicare la pătrat în relațiile (5.10.1), rezultă

$$p_1 = \frac{kp_0}{k + (x_0 + x)^2}; \quad p_2 = \frac{kp_0}{k + (x_0 - x)^2}, \tag{5.10.2}$$

unde $$k = \left(\frac{\mu_1 d_1^2}{4\mu d}\right)^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația caracteristicii statice este $\Delta p = p_2 - p_1 = \left[\frac{1}{k + (x_0 - x)^2} - \frac{1}{k + (x_0 + x)^2}\right] kp_0$. (5.10.3)

Pentru $x = 0$, $p_1 = p_2 = \frac{kp_0}{k + x_0^2} = \frac{1{,}82 \cdot 10^{-8} \cdot 7 \cdot 10^6}{1{,}82 \cdot 10^{-8} + 0{,}00012^2} = 3{,}91$ MPa.

Debitul admis în poziția de nul este $Q = Q_3 + Q_4$

$$Q = 2\pi\mu d x_0 \sqrt{2p_1/\rho} = 2\pi \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}002 \cdot 0{,}00012 \sqrt{2 \cdot 3{,}91 \cdot 10^6/900} = 5{,}06 \text{ l/min.}$$

Problema 5.11. Pentru separarea particulelor de praf din aer, se folosește un aerociclon care funcționează pe următorul principiu : curentul de aer încărcat cu praf intră tangențial în ciclon, particulele de praf fiind aruncate radial pe perete, după care cad liber în conul colector. Să se determine mărimea minimă a particulelor de praf care se pot separa și căderea de presiune totală

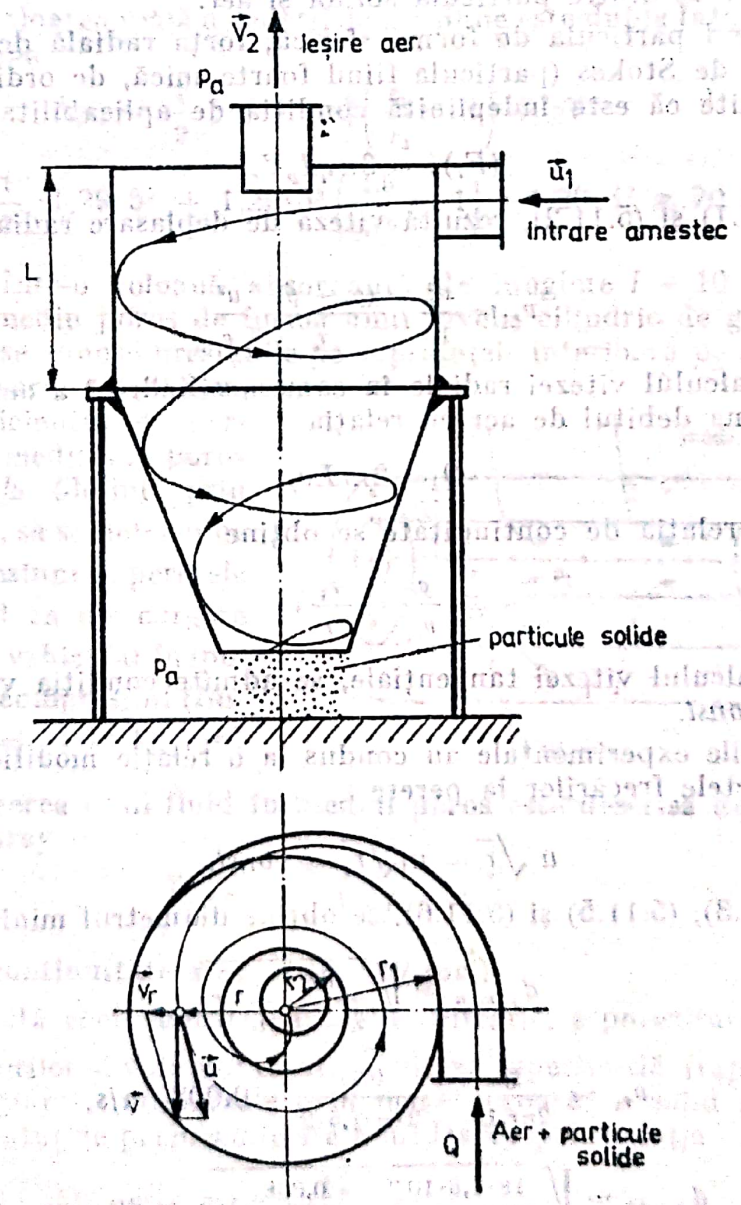


Fig. 5.11.

în aerociclon. Se cunosc: debitul de aer $Q = 0{,}1$ m³/s, dimensiunile $L = 2$ m, $r_1 = 1{,}5$ m, $r_2 = 0{,}75$ m, densitatea aerului $\rho_a = 1{,}29$ kg/m³, densitatea particulelor solide $\rho_s = 220$ kg/m³, viscozitatea dinamică a aerului $\eta_{aer} = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ Pa·s, viteza aerului la ieșire $V_2 = 4$ m/s.

Rezolvare: Fie u și v_r componentele tangențială și respectiv radială ale vitezei amestecului la raza r (curentă) în aerociclon.

Admițînd că particula se mișcă la fel ca și aerul, accelerația radială a acestuia este u^2/r. Asupra particulei acționează o forță de rezistență la înaintare

$$(F_v)_r = m_r a = \frac{\pi}{6}(\rho_s - \rho) d_p^3 \frac{u^2}{r}, \qquad (5.11.1)$$

unde m_r reprezintă masa relativă a particulei solide în curentul de aer. Forța rezultantă de aruncare înspre perete este compensată, în mișcarea pe traiectorie de o forță radială dirijată spre interior, care ia naștere datorită vitezei radiale relative v_r dintre particula solidă și aer.

Considerînd particula de formă sferică, forța radială de rezistență are expresia dată de Stokes (particula fiind foarte mică, de ordinul micronilor, se poate admite că este îndeplinită condiția de aplicabilitate a formulei).

Deci
$$(F_v)_r = 3\pi\eta d_p V_r. \qquad (5.11.2)$$

Din (5.11.1) și (5.11.2), rezultă viteza de deplasare radială a particulei în aerociclon

$$v_r = \frac{d_p^2}{18} \cdot \frac{(\rho_s - \rho)}{\eta} \frac{u^2}{r}. \qquad (5.11.3)$$

Pentru calculul vitezei radiale în camera cilindrică a aerociclonului, se poate aproxima debitul de aer cu relația

$$Q = 2\pi r L v_r. \qquad (5.11.4)$$

Aplicînd relația de continuitate se obține

$$\frac{v_r}{v_{r_1}} = \frac{r_1}{r}. \qquad (5.11.5)$$

Pentru calculul vitezei tangențiale, se admite condiția vortexului liber $ur = u_1 r_1 = const.$

Observațiile experimentale au condus la o relație modificată, care ține seama de efectele frecărilor la perete

$$u\sqrt{r} = u_1\sqrt{r_1} = const. \qquad (5.11.6)$$

Din (5.11.3), (5.11.5) și (5.11.6), se obține diametrul minim de particulă

$$d_{p\,min} = \sqrt{\frac{18\eta}{\rho_s - \rho} \frac{v_{r_1}}{u_1^2} r_1}, \qquad (5.11.7)$$

$$v_{r_1} = \frac{Q}{2\pi r_1 L} = \frac{0{,}1}{2 \cdot \pi \cdot 1{,}5 \cdot 2} = 0{,}008 \text{ m/s},$$

$$d_{p\,min} = \sqrt{\frac{18 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-5}}{220 - 1{,}29} \cdot \frac{0{,}008}{5^2} \cdot 1{,}5} \cong 60 \ \mu\text{m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că, pentru diametre $d_p > d_{p\ min}$, particula atinge peretele și deci se depune, pentru $d_p < d_{p\ min}$, particula are tendința de a rămîne în suspensie și deci poate părăsi aerociclonul odată cu aerul evacuat.

Căderea de presiune în curgerea aerului prin instalație cuprinde trei componente :

— la intrare în aerociclon : $\Delta p_i = \frac{1}{2}\rho u_1^2$;

— în vortexul liber : $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{u^2}{r} = \frac{u_1^2 r_1}{r^2}$,

$$p = \int_{r_i}^{r_1} \rho u_1^2 \frac{r_1}{r^2}\,dr = \rho u_1^2\left(\frac{r_1}{r_2} - 1\right);$$

— la ieșirea din aerociclon : $\Delta p_e = \frac{1}{2}\rho V_2^2$.

Datorită existenței unei rotații, în tubulatura de ieșire s-a demonstrat experimental că valoarea reală a căderii de presiune este dublă față de valoarea teoretică. Se obține

$$\Delta p_t = \frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho u_1^2\left(\frac{r_1}{r_2} - 1\right) + \rho V_2^2,$$

$$\Delta p_t = \frac{1}{2}\cdot 1{,}29\cdot 5^2 + 1{,}29\cdot 5^2\left(\frac{1{,}5}{0{,}75} - 1\right) + 1{,}29\cdot 4^2 \cong 70 \text{ Pa}.$$

Problema 5.12. Într-o coloană absorbantă de lungime $l = 10$ m, un fluid curge printr-un mediu poros de forma unui înveliș cilindric de grosime $\delta = r_2 - r_1$. Dacă se cunosc presiunile pe suprafețele interioară $p_1 = 1$ și exterioară $p_2 = 1{,}2$ bari, $r_1 = 0{,}3$ m, $r_2 = 0{,}8$ m, coeficientul de permeabilitate al mediului poros $K = 1{,}5\cdot 10^{-4}$ m/s (definit prin relația lui Darcy), să se determine distribuția de presiuni în peretele de grosime δ, viteza de curgere radială și debitul vehiculat în ipoteza fluidului incompresibil (fluidul este apă, $\rho = 1\,000$ kg/m³).

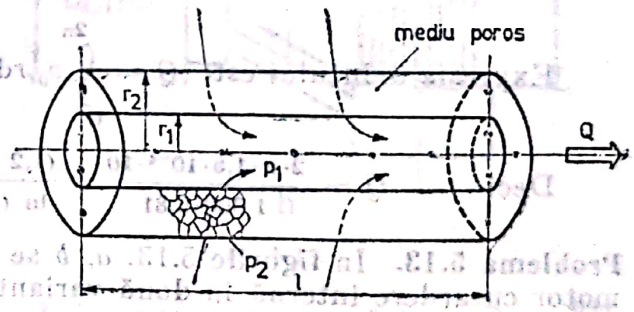


Fig. 5.12.

Rezolvare : Curgerea unui fluid în mediul poros este descrisă de ecuația de mișcare a lui Darcy

$$\vec{v}_0 = -\frac{k}{\eta}(\nabla p - \rho\vec{g}) \qquad (5.12.1)$$

și de ecuația de continuitate $\varepsilon\,\partial\rho/\partial t = -\nabla(\rho\vec{v}_0)$, (5.12.2)

în care k reprezintă coeficientul aparent de filtrație, ε porozitatea (raportul dintre volumul porilor și volumul total), $\vec{v}_0$ viteza superficială (raportul dintre debit și aria secțiunii transversale prin masa poroasă — solid și fluid). Se definește coeficientul de permeabilitate a lui Darcy prin relația

$$K = \frac{\rho k}{\eta}g. \qquad (5.12.3)$$

Cu notaţia $$\nabla p^* = \nabla p - \rho \vec{g},$$

relaţia (5.12.1) devine

$$\vec{v}_0 = -K \frac{\Delta p^*}{\rho g} = -Ki, \tag{5.12.4}$$

în care i reprezintă panta hidraulică.

Din (5.12.4) şi (5.12.2), pentru un fluid incompresibil, se obţine

$$\nabla^2 p = 0 \tag{5.12.5}$$

(s-a neglijat efectul greutăţii fluidului).

În ipoteza dependenţei presiunii numai de raza coloanei absorbante, rezultă

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial p}{\partial r}\right) = 0; \quad \mathrm{d}\left(r \frac{\partial p}{\partial r}\right) = 0; \quad r \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = C_1;$$

$$p = C_1 \ln r + C_2. \tag{5.12.6}$$

Pentru ecuaţia (5.12.6), condiţiile la limită sînt:

$$r = r_1, \; p = p_1; \; r = r_2, \; p = p_2.$$

Distribuţia de presiuni în mediul poros are forma

$$p = \frac{(p_1 - p_2) \ln r}{\ln (r_1/r_2)} - \frac{p_1 \ln r_2 - p_2 \ln r_1}{\ln (r_1/r_2)}. \tag{5.12.7}$$

Din (5.12.1) rezultă

$$v_0 = v_{0r} = -\frac{k}{\gamma_i r} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\ln (r_1/r_2)} = -\frac{K}{\rho g} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\ln (r_1/r_2)}. \tag{5.12.8}$$

Expresia debitului este $$Q = \int_0^{2\pi} v_{0r} r \mathrm{d}\theta = \frac{2\pi K l}{\rho g} \cdot \frac{p_2 - p_1}{\ln (r_2/r_1)}. \tag{5.12.9}$$

Deci $$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 10}{1\,000 \cdot 9{,}81} \cdot \frac{(1{,}2 - 1) \cdot 10^5}{\ln (0{,}8/0{,}3)} \cong 0{,}02 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Problema 5.13. În figurile 5.13, *a*, *b* se prezintă sistemul de răcire al unui motor cu ardere internă în două variante: răcire cu circulaţie naturală prin termosifonare, (varianta *a*) şi răcire cu circulaţie forţată (varianta *b*).

În prima variantă, diferenţa de presiune care asigură circulaţia apei în radiator este rezultatul diferenţei de densitate dintre apa rece şi caldă. Datorită încălzirii, densitatea apei scade; coloana de apă este vehiculată prin ţevile radiatorului şi răcită prin transfer termic natural. Traseul apei de răcire este prezentat în figură.

În cea de-a doua variantă, pe lîngă circulaţia naturală, se suprapune o circulaţie forţată a apei de răcire prin intermediul unei pompe şi o răcire forţată a ţevilor radiatorului cu ajutorul unui ventilator (fig. 5.13, *b*). Dacă debitul necesar de răcire al motorului este $Q = 14$ l/min, să se determine diametrul şi numărul de ţevi ale radiatorului. Se consideră că circulaţia apei se realizează între temperaturile $\theta_1 = 95°C$ şi $\theta_{21} = 40°C$.

În varianta *b*, datorită prezenţei ventilatorului, se admite $\theta_{22} = 30°C$. Se impune viteza medie de circulaţie a apei în ţevile radiatorului $V_a = 0{,}15$ m/s şi $V_b = 1$ m/s, lungimea ţevii $l = 0{,}4$ m. Pierderile de sarcină locale şi în con-

ductele de alimentare se apreciază egale cu 20% din pierderile liniare de sarcină din radiator. Pentru viscozitate, se admite valoarea medie $\nu = 0{,}478$ cst (corespunzător temperaturii de 60°C).

Rezolvare : Se scrie relaţia lui Bernoulli între punctele *1* şi *2*, considerînd fluidul incompresibil.

Admiţînd $V_1 = V_2$, $z_1 \cong z_2$, rezultă

$$\frac{p_1}{\rho_1 g} - \frac{p_2}{\rho_2 g} = \sum h_{r1,2}\,; \qquad (5.13.1)$$

în ipoteza $p_1 = p_2 = p_{at} = 10^5$ Pa, se obţine presiunea utilă datorită diferenţei de densitate care este egală cu suma pierderilor

$$\frac{p_0}{g}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right) = 1{,}2 n\lambda \frac{l}{D}\frac{V_a^2}{2g}. \qquad (5.13.2)$$

Densitatea apei la θ_1 şi θ_{21} este $\rho_1 \cong 960$ kg/m³, $\rho_2 \cong 992$ kg/m³.

Ecuaţia de continuitate este $Q = n\frac{\pi d^2}{4} V_a$. (5.13.3)

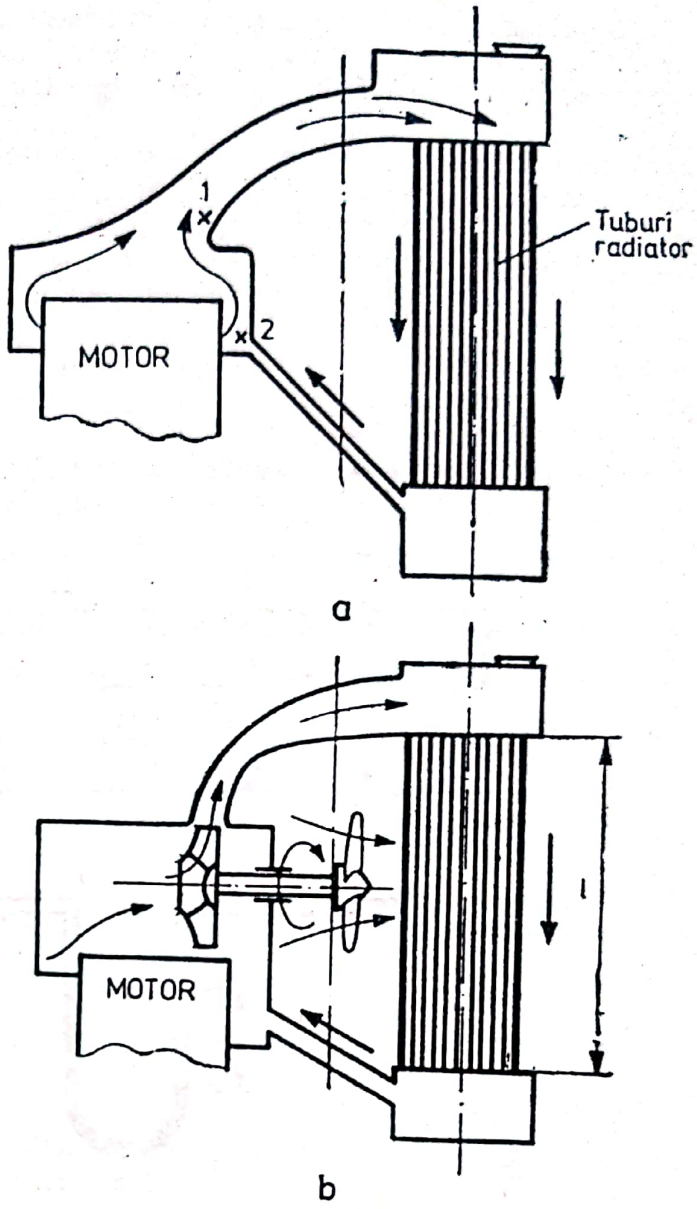


Fig. 5.13.

Din (5.13.2) şi (5.13.3), presupunînd curgerea laminară $\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64\nu}{V_a \cdot d}$, se obţine valoarea diametrului d al ţevii radiatorului

$$d = \sqrt[4]{\frac{2\pi g \frac{p_0}{g}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)}{1{,}2 \cdot 64 \cdot 4 \cdot \nu l Q}} = \sqrt[4]{\frac{2\pi \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}342}{1{,}2 \cdot 64 \cdot 4 \cdot 0{,}478 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}4 \cdot 2{,}33 \cdot 10^{-4}}} \cong 5 \text{ mm}.$$

Numărul de ţevi necesar în primul caz este $n_a = \frac{4Q}{\pi d^2 V_a} = \frac{4 \cdot 2{,}33 \cdot 10^{-4}}{\pi \cdot 0{,}005^2 \cdot 0{,}15} =$ $= 80$ ţevi.

În a doua variantă de răcire, se obţine din (5.13.3)

$$n_b = \frac{4 \cdot 2{,}33 \cdot 10^{-4}}{\pi \cdot 0{,}005^2 \cdot 1} = 12 \text{ ţevi}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că, în cazul unei răciri forțate, radiatorul necesar schimbului de căldură este cu mult mai mic față de radiatorul ce funcționează cu o circulație naturală a lichidului de răcire (pentru același debit de răcire.

Problema 5.14. Într-o conductă de diametrul $D = 100$ mm, curge ulei cu densitatea $\rho_1 = 850$ kg/m³ și viscozitatea $\nu_1 = 10$ St. Căderea de presiune pe lungimea $l = 2$ m este $h = 90$ mm H_2O. Considerînd aceeași cădere de presiune, să se determine debitul de vopsea transportat prin conductă. Vopseaua se consideră un fluid de tip Bingham cu aceeași viscozitate cinematică aparentă ca a uleiului, densitatea $\rho = 1\,100$ kg/m³ și grosimea de curgere $\delta = 0{,}3$ mm (sub această grosime vopseaua „nu curge" dacă se aplică pe un perete vertical). Pentru măsurarea viscozității aparente, s-a folosit viscozimetrul (problema 1.14) cu un joc radial $\Delta r = 5$ mm și o viteză tangențială $u = 0{,}05$ m/s. Care este traportul dintre debitul de vopsea și debitul de ulei ?

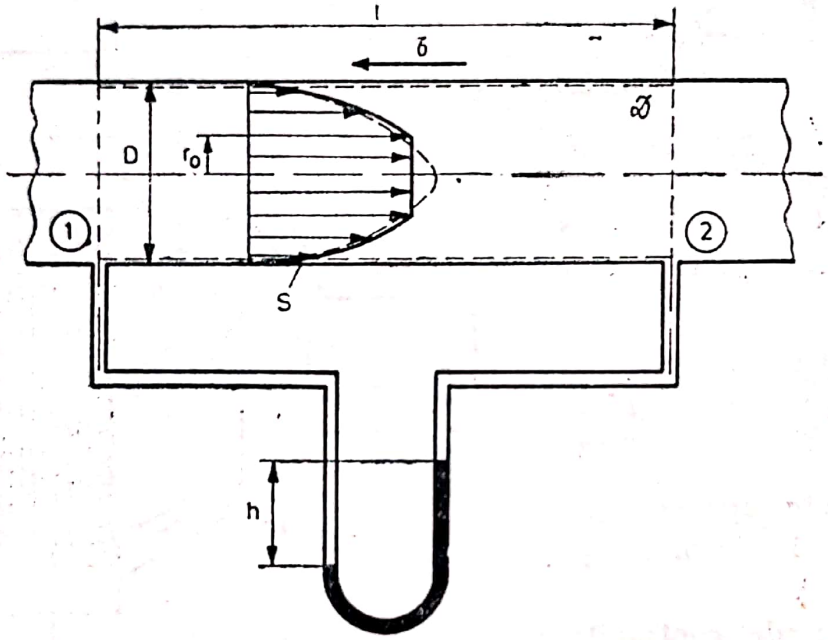


Fig. 5.14.

Rezolvare : Pentru un fluid nenewtonian cu prag de curgere (Bingham), expresia efortului tangențial într-o mișcare unidirecțională este

$$\tau = \tau_0 + \eta du/dy, \qquad (5.14.1)$$

unde y reprezintă coordonata normală la viteza de deplasare u, τ_0 efortul tangențial de la care fluidul începe să curgă, η vîscozitatea dinamică a fluidului.

Dacă viscozitatea fluidului nenewtonian se determină cu viscozimetrul (problema 1.14), se obține o viscozitate aparentă dată de relația

$$\tau = \eta_a \frac{du}{dy}; \quad \eta_a = \frac{\tau}{du/dy}. \qquad (5.14.2)$$

Din (5.14.2) se obține expresia efortului tangențial total

$$\tau = 10 \cdot 10^{-4} \cdot 1\,100 \cdot \frac{0{,}05}{0{,}005} = 11 \text{ Pa}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Efortul τ_0 se determină din condiția de curgere a vopselei

$$\tau_0 = \rho g \delta = 1\,100 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}0003 = 3{,}24 \text{ Pa}.$$

Viscozitatea reală a vopselei este deci

$$\eta = \frac{\tau - \tau_0}{du/dy} = \frac{11 - 3{,}24}{0{,}05/0{,}005} = 0{,}776 \text{ Pa·s}.$$

Viscozitatea aparentă are valoarea

$$\eta_a = 10 \cdot 10^{-4} \cdot 1\,100 = 1{,}1 \text{ Pa·s},$$

deci $\eta < \eta_a$.

Pentru determinarea distribuției de viteze, mișcarea fiind permanentă și unidirecțională, se aplică principiul lui d'Alembert domeniului de fluid $\mathcal{D}$.

Ecuația de echilibru a forțelor proiectată pe direcția de curgere este

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 - 2\pi r l(\tau_0 + \eta\, du/dr) = 0. \qquad (5.14.3)$$

Se observă că, pentru o porțiune din conductă, gradientul de viteză este nul și curgerea are loc cu viteză constantă pentru $r < r_0$, unde $r_0 = \frac{2\tau_0}{\Delta p/l}$.

Rezultă $$r_0 = \frac{2 \cdot 3{,}24 \cdot 2}{1\,000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}09} = 14{,}6 \text{ mm}.$$

În cazul în care raza conductei $R < r_0$, curgerea nu are loc sub diferența de presiune Δp considerată.

Pentru $r \in (r_0, R)$, distribuția de viteze se obține prin integrarea relației (5.14.3)

$$u = \int_r^R \frac{\Delta p}{2l\eta}(r - r_0)dr = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R - r)(R + r - 2r_0).$$

Viteza maximă se obține pentru $r = r_0$: $u_{max} = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R - r_0)^2$. (5.14.4)

Expresia debitului este

$$Q = \pi R^2 u_{max} + \int_{r_0}^R u \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{2\eta}\frac{\Delta p}{l}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{r_0}{R} + \frac{1}{12}\frac{r_0^4}{R^4}\right). \qquad (5.14.5)$$

Rezultă $$Q = \frac{\pi \cdot 0{,}05^4}{2 \cdot 0{,}776} \cdot \frac{1\,000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}09}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{0{,}0146}{0{,}05} + \frac{1}{12}\frac{0{,}0146^4}{0{,}054^4}\right) =$$

$$= 8{,}56 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} \cong 51{,}3 \text{ l/min}.$$

Debitul de ulei ce este transportat prin conductă se calculează cu formula de tip Hagen-Poisseuille

$$Q_1 = \frac{\pi R^2}{2\eta_1} \cdot \frac{\Delta p}{l} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi \cdot 0{,}05^4}{2 \cdot 850 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{1\,000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}09}{2} \cdot \frac{1}{4} = 1{,}275 \cdot 10^{-3} \text{m}^3/\text{s}.$$

Deci $$k = \frac{Q}{Q_1} = \frac{8{,}56 \cdot 10^{-4}}{1{,}275 \cdot 10^{-3}} = 0{,}67.$$

Scanned with OKEN Scanner

Problema 5.15. Pentru măsurarea debitelor de fluide în instalaţiile industriale, se utilizează rotametrul (figura 5.15, *a*).

Principiul de funcţionare al acestui instrument de măsură este următorul: într-un tub transparent tronconic, se montează un plutitor care este menţinut în echilibru la un nivel z de curentul de fluid vehiculat cu debitul Q care se cere determinat.

Nivelul plutitorului fiind stabilit de mărimea debitului, o scară gradată ataşată tubului de sticlă indică direct valoarea Q.

Să se determine dependenţa debitului transportat Q de cota z indicată de plutitor.

Cum trebuie să varieze coeficientul de rezistenţă la înaintare C_x al plutitorului cu numărul Reynolds asociat curgerii în tub?

Aplicaţie numerică: coeficientul de debit $\mu = 0{,}6$, diametrul plutitorului $D = 20$ mm, unghiul de înclinare al peretelui tubului $\alpha = 3°$, masa plutitorului $M = 20$ g, coeficientul de rezistenţă la înaintare $C_x = 1$, densitatea fluidului $\rho = 1{,}2$ kg/m³ (se consideră ipoteza fluidului incompresibil).

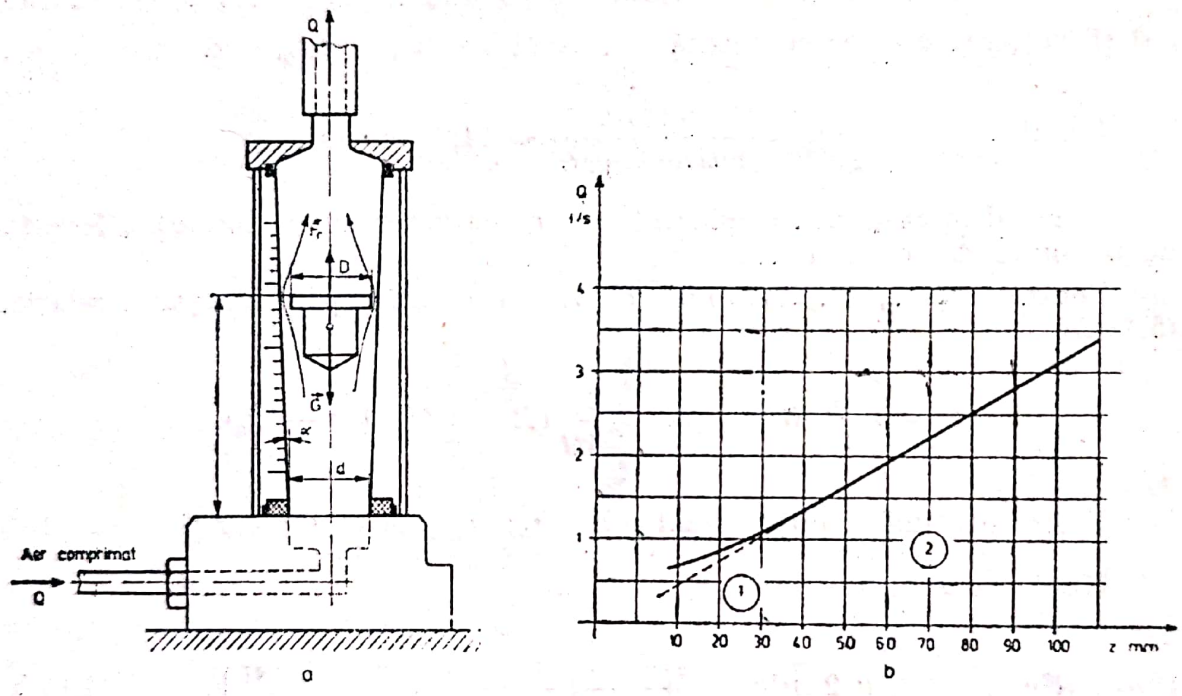


Fig. 5.15.

Rezolvare: Indiferent de poziţia plutitorului (deci de cota z), forţa de greutate G este în echilibru cu forţa de rezistenţă la înaintare,

$$G = C_x \frac{\rho}{2} A V^2, \tag{5.15.1}$$

în care $A = \pi D^2/4$, iar V reprezintă viteza medie în secţiunea minimă de curgere. Debitul Q are expresia

$$Q = \mu \frac{\pi}{4} [(d + 2z \operatorname{tg} \alpha)^2 - D^2] V = \mu \frac{\pi}{4} [(d + 2z \operatorname{tg} \alpha)^2 - D^2] \sqrt{\frac{2G}{\rho A}} \frac{1}{\sqrt{C_x}} \tag{5.15.2}$$

Admiţînd o valoare constantă a coeficientului de debit, relaţia (5.15.2) devine

$$Q = f(z)\frac{1}{\sqrt{C_x}}, \qquad (5.15.3)$$

$f(z)$ fiind o funcţie numai de cota z şi de caracteristicile constructive ale aparatului.

Cu datele numerice prezentate, se obţine dependenţa $Q = Q(z)$, figura 5.15, *b* (pentru $C_x = 1$). Graficul arată că, de la valoarea $z = 40$ mm, dependenţa debitului este practic liniară cu z (zona *2*); prelungirea dependenţei liniare şi pentru $z < 40$ mm (zona *1*) implică o modificare a coeficientului de rezistenţă C_x, în sensul creşterii acestuia pentru numere Reynolds mici. Astfel, în plutitor se practică nişte canale elicoidale datorită cărora fluidul dă naştere unei rotaţii a plutitorului şi, implicit, la creşterea coeficientului C_x. În realitate, coeficientul de rezistenţă la înaintare nu este constant; din acest motiv, fiecare aparat trebuie etalonat, indicîndu-se precizia cu care se citeşte debitul pentru fiecare cotă z.

Scanned with OKEN Scanner

6

CALCULUL FORȚELOR HIDRODINAMICE ÎN APARATE ȘI MAȘINI HIDROPNEUMATICE

Problema 6.1. Un jet de apă plan, în regim de curgere permanent, cu grosimea $a_1 = 0{,}25$ m, lățimea $b = 1$ m și debitul $Q = 0{,}05$ m³/s acționează pe o suprafață plană a unui tetraedru omogen articulat în punctul A, (fig. 6.1). Cunoscînd greutatea tetraedrului $G = 20$ N, laturile $BC = 0{,}3$ m și $AC = 0{,}8$ m, unghiul $\beta = 25°$, să se determine forța din arc pentru menținerea corpului în poziția din figură. Axa comună a jetului și a arcului se găsește la distanța $d = AC/2$ față de articulația A. Fluidul se consideră incompresibil și se neglijează pierderile de presiune și de debit.

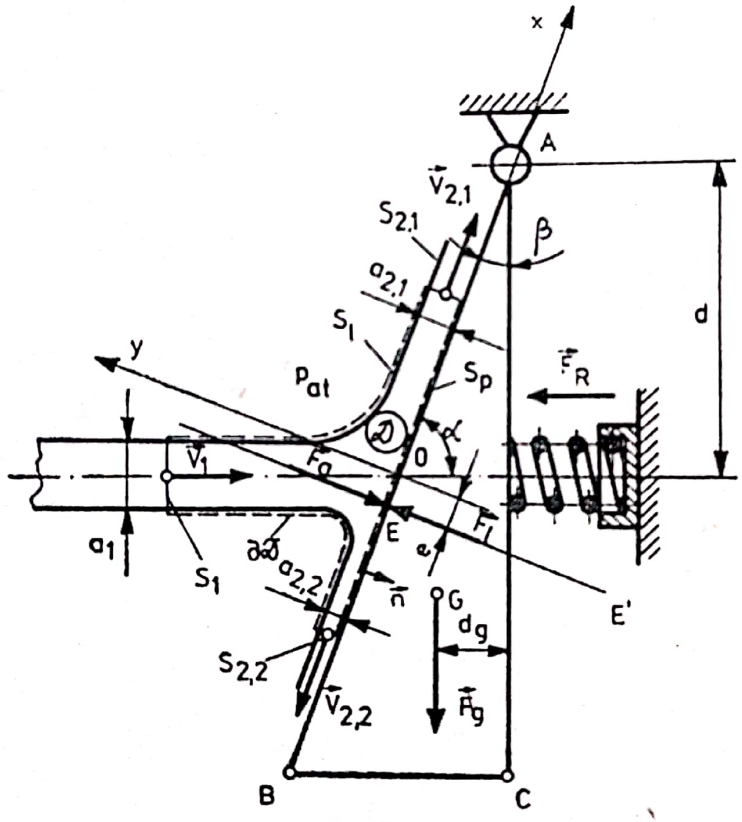


Fig. 6.1.

Rezolvare : Pentru determinarea acțiunii jetului asupra plăcii, se aplică domeniului $\mathcal{D}$ legea a doua a dinamicii

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}, \tag{6.1.1}$$

unde $\vec{H} = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \vec{v} d\mathcal{V}$ reprezintă impulsul fluidului din domeniul $\mathcal{D}$.

Rezultă
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{D}(t)}\rho\vec{v}\,\mathrm{d}\mathcal{V}=\int_{\mathcal{D}}\rho\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\mathcal{V}, \tag{6.1.2}$$

$$\int_{\mathcal{D}}\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t}\,\mathrm{d}\mathcal{V}+\int_{\partial\mathcal{D}}\rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\mathrm{d}A=\Sigma\vec{R}_{ext}. \tag{6.1.3}$$

În cazul unei mișcări permanente, admițînd că suprafața S este un tub de curent, se obține după integrarea relației (6.1.3) :

$$\rho[(Q_{2,1}\vec{V}_{2,1}+Q_{2,2}\vec{V}_{2,2})-Q_1\vec{V}_1]=\vec{F}_{p1}+\vec{F}_{p2,1}+\vec{F}_{p2,2}+\vec{F}_g+\vec{R}, \tag{6.1.4}$$

unde $\vec{V}$ reprezintă viteza medie în secțiune, $\vec{F}_p$ forța de presiune, $\vec{F}_g$ forța de greutate, $\vec{R}$ forța cu care mediul înconjurător acționează asupra jetului pe suprafața S, forța de reacțiune.

Pe suprafețele S_1, $S_{2,1}$ și $S_{2,2}$ acționează presiunea atmosferică, deci
$$-\oint_S p_{at}\vec{n}\,\mathrm{d}A=0. \tag{6.1.5}$$

Se aplică relația lui Bernoulli (4.1.3) și ecuația de continuitate între secțiunea de intrare S_1 și secțiunile de ieșire $S_{2,1}$ și $S_{2,2}$. Rezultă :

$$\begin{aligned} V_1&=V_{2,1}=V_{2,2}, & Q_i&=ba_iV_i\,; \\ Q_1&=Q_{2,1}+Q_{2,2}, & a_1&=a_{2,1}+a_{2,2}, \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

unde a_i reprezintă lățimea jetului în secțiunile considerate.

În ipoteza neglijării forței de greutate a jetului, relația (6.1.4) are forma
$$(Q_{2,1}\vec{V}_{2,1}+Q_{2,2}\vec{V}_{2,2}-Q_1\vec{V}_1)=-\vec{F}_a, \tag{6.1.7}$$

$\vec{F}_a=-\vec{R}$ reprezentînd forța cu care jetul acționează asupra suprafeței.

Pe suprafața de contact dintre fluid și corp, S_p, acționează o forță normală datorită diferenței de presiune dintre presiunea din jet, p și presiunea atmosferică. În acest caz,
$$\vec{R}=\vec{F}_l=-\int_{S_p}(p-p_{at})\vec{n}\,\mathrm{d}A. \tag{6.1.8}$$

Proiectînd relația vectorială (6.1.7) pe sistemul de axe din figură, se obține
$$Q_{2,1}V_{2,1}-Q_{2,2}V_{2,2}-Q_1V_1\cos\alpha=0\,; \tag{6.1.9}$$
$$Q_1V_1\sin\alpha=F_a. \tag{6.1.10}$$

Deci $$F_a=\rho Q_1\frac{Q_1}{a_1b}\sin\alpha=1\,000\,\frac{0{,}05^2}{0{,}25\cdot1}\sin65^\circ\cong9\ \mathrm{N}.$$

Pentru determinarea direcției de acțiune EE a forței F, se aplică aceluiași domeniu de fluid $\mathcal{D}$ teorema momentului cinetic (pentru mișcare permanentă) :
$$\int_{\partial\mathcal{D}}\vec{r}\times\vec{V}(\vec{V}\vec{n})\mathrm{d}A=\Sigma(\vec{r}_i\times\vec{F}_{ext_i}), \tag{6.1.11}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\rho Q_{2,i}\vec{r}_{2,i}\times\vec{V}_{2,i}-\rho Q_1\vec{r}_1\times\vec{V}_1=\vec{r}_1\times\vec{F}_{p1}+\vec{r}_2\times\vec{F}_{p2}+\vec{r}_g\times\vec{F}_g+ \\ +r\times\vec{R} \tag{6.1.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau față de originea O, $\rho(Q_{2,1}\vec{r}_{2,1} \times \vec{V}_{2,1} + Q_{2,2}\vec{r}_{2,2} \times \vec{V}_{2,2}) = -\vec{r} \times \vec{R}$.

(6.1.13)

Din (6.1.9) și (6.1.6), se obțin relațiile :

$$a_{2,1} = (1/2)a_1(1 + \cos\alpha)\,; \qquad (6.1.14)$$

$$a_{2,2} = (1/2)a_1(1 - \cos\alpha).$$

Relația (6.1.13) proiectată pe direcția axei Oy (perpendiculară pe plan) are expresia

$$-\rho\frac{a_{2,1}}{2}Q_{2,1}V_{2,1} + \rho\frac{a_{2,2}}{2}Q_{2,2}V_{2,2} = -eF_a. \qquad (6.1.15)$$

Folosind (6.1.14) și (6.1.6), rezultă expresia excentricității e

$$e = \frac{-a_{2,2}Q_{2,2}V_{2,2} + a_{2,1}Q_{2,1}V_{2,1}}{2Q_1V_1 \sin\alpha},$$

$$e = \frac{a_1}{2}\operatorname{ctg}\alpha = \frac{0{,}25}{2}\operatorname{ctg}65^\circ \cong 0{,}058 \text{ m}.$$

Pentru determinarea forței F_R se aplică ecuația de momente față de punctul A. Se obține

$$F_R d - Gd_g - F_a(AB/2 + e) = 0$$

$$F_R = \frac{Gd_g + F_a\,(AB/2) + e)}{d} = \frac{20 \cdot 0{,}3/2 + 9(0{,}854/2 + 0{,}058}{0{,}8/2} = 18{,}41 \text{ N}.$$

Observație : Relația (6.1.4) nu ține seama de distribuția neuniformă a vitezei în secțiunea de curgere, fiind valabilă, cu o bună aproximație, în cazul curgerii turbulente (vezi problema 6.9).

Problema 6.2. Un tunel aerodinamic experimental (sufleric) (fig. 6.2) produce o vînă de aer cu un diametru $D_2 = 150$ mm și o viteză medie $V_2 = 20$ m/s. Neglijînd compresabilitatea aerului, viteza de intrare a aerului în colector și toate pierderile de sarcină și cunoscînd densitatea aerului $\rho = 1{,}225$ kg/m³, se cere :

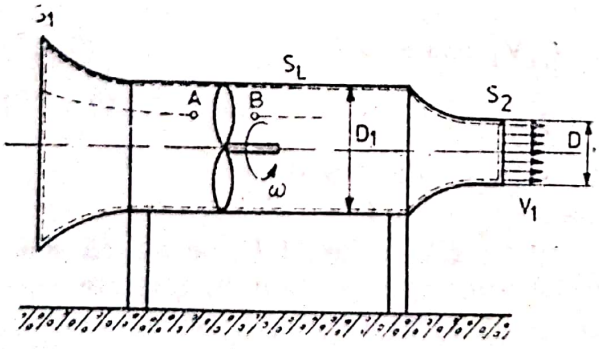


Fig. 6.2.

1) să se calculeze forța exercitată de suflerie asupra suportului său ;
2) să se calculeze diferența de presiune existentă între două puncte A și B, situate, unul imediat în amonte de elice și unul imediat în aval, dacă diametrul tubației este $D_1 = 350$ mm ;
3) să se determine împingerea axială exercitată de elice asupra arborelui său ;
4) să se calculeze puterea hidraulică a ventilatorului.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare : 1) Pentru suprafaţa de control formată din secţiunea S_1 la intrarea în suflerie, secţiunea S_2 la ieşirea din suflerie şi peretele sufleriei S, se aplică teorema cantităţii de mişcare (impulsului), pentru mişcarea permanentă

$$\rho Q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = -\oint_S p\vec{n}\,dA, \qquad (6.2.1)$$

în care s-a neglijat greutatea aerului din suprafaţa de control $S = S_1 \cup S_2 \cup S_L$. Se observă că, pe suprafeţele S_1 şi S_2, presiunea este cea atmosferică şi deci se poate scrie

$$\oint_S p\vec{n}\,dA = \int_{S_1} p_{at}\vec{n}_1\,dA_1 + \int_{S_2} p_{at}\vec{n}_2\,dA_2 + \int_{S_L} p\vec{n}\,dA,$$

şi, adunînd şi scăzînd termenul $\int_{S_L} p_{at}\vec{n}\,dA$, rezultă

$$\oint_S p\vec{n}\,dA = \int_{S_1} p_{at}\vec{n}_1\,dA_1 + \int_{S_2} p_{at}\vec{n}_2\,dA_2 + \int_{S_L} p_{at}\vec{n}\,dA + \int_{S_L} (p - p_{at})\vec{n}\,dA,$$

adică $$\oint_S p\vec{n}\,dA = \oint_S p_{at}\vec{n}\,dA + \int_{S_L} (p - p_{at})\vec{n}\,dA = \int_{S_L} (p - p_{at})\vec{n}\,dA.$$

Dar $\int_{S_L} (p - p_{at})\vec{n}\,dA = \vec{R}$, forţa de acţiune a aerului asupra peretelui sufleriei şi relaţia (6.2.1) devine

$$\rho Q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = -\vec{F}_a$$

şi neglijînd viteza la intrarea în suflerie ($V_1 = 0$), rezultă

$$\vec{F}_a = -\rho Q\vec{V}_2,$$

iar, prin proiecţia pe axa sufleriei, rezultă

$$F_a = \rho Q V_2 = \rho A_2 V_2^2 = \rho V_2^2 \frac{\pi D_2^2}{4} = 1{,}225 \cdot 20^2 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}15^2}{4} = 8{,}66 \text{ N}.$$

2) Pentru determinarea diferenţei de presiune, se scrie relaţia lui Bernoulli între secţiunea B şi secţiunea S_2 de ieşire din suflerie, respectiv între secţiunea de intrare S_1 şi secţiunea din A :

$$V_B^2/2 + p_B/\rho = V_2^2/2 + p_{at}/\rho ;$$

$$V_1^2/2 + p_{at}/\rho = V_A^2/2 + p_A/\rho.$$

Considerînd şi aici $V_1 = 0$ şi $V_A = V_B$, deoarece tubaţia sufleriei are diametrul constant, rezultă

$$p_B - p_A = \frac{\rho}{2} V_2^2 = 1{,}225 \frac{20^2}{2} = 245 \text{ Pa}.$$

3) Pentru determinarea forţei axiale preluată de arborele elicei, se consideră că această forţă este produsă de diferenţa de presiune $p_B - p_A$ pe secţiunea elicei

$$F_p = (p_B - p_A)\frac{\pi D_1^2}{4} = 245 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}33^2}{4} = 23{,}6 \text{ N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4) Determinarea puterii hidraulice a ventilatorului se face cu relaţia

$$P_H = Q\Delta p_t = (p_B - p_A)\frac{\pi D_2^2}{4} V_2 = 86{,}5 \text{ W}.$$

Problema 6.3. Un cot cu reducţie cu unghiul $\alpha = 60°$ (fig. 6.3) este plasat într-o conductă de apă orizontală avînd debitul $Q = 40$ l/s. Presiunea la intrare este $p_1 = 0{,}4$ MPa, diametrul la intrare este $D_1 = 150$ mm, iar diametrul la ieşire este $D_2 = 100$ mm.

Neglijînd pierderile de sarcină din zona cotului, să se calculeze mărimea şi direcţia forţei hidrodinamice exercitată de apă asupra cotului.

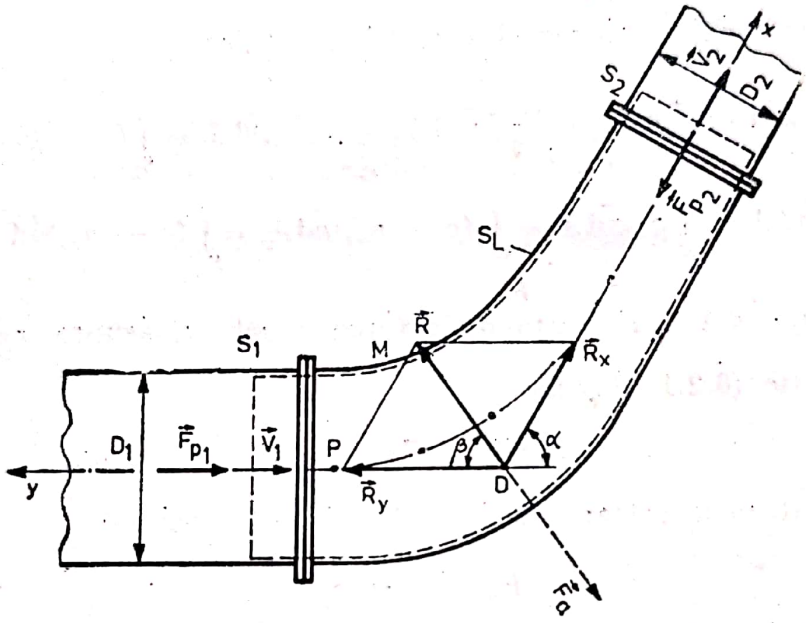


Fig. 6.3.

Rezolvare : Se alege o suprafaţă de control închisă, formată din două secţiuni drepte S_1 şi S_2 şi suprafaţa laterală a conductei, asimilată cu un tub de curent. Pentru această suprafaţă de control, se scrie teorema impulsului pentru un tub de curent

$$\rho Q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} + \vec{F}_g + \vec{R}, \qquad (6.3.1)$$

unde $\vec{R}$ este reacţiunea peretelui, iar $\vec{F}_g$ greutatea apei din suprafaţa de control.

Se alege un sistem de referinţă xOy, axele Ox şi Oy fiind axele celor două ramuri de conductă (sistem nerectangular). Se proiectează relaţia (6.3.1) pe axele sistemului de coordonate ales şi se obţine :

proiecţia pe Ox : $\rho Q(V_2 - V_1\cos\alpha) = F_{p1}\cos\alpha - F_{p2} + R_x - R_y\cos\alpha$; (6.3.2)

proiecţia pe Oy : $\rho Q(-V_2\cos\alpha + V_1) = -Fp_1 + Fp_2\cos\alpha - R_x\cos\alpha + R_y$. (6.3.3)

Scanned with OKEN Scanner

Forțele de presiune se pot scrie: $F_{p1} = p_1 A_1 = p_1 \pi D_1^2/4$; respectiv $F_{p2} = p_2 A_2 = p_2 \pi D_2^2/4$, iar pentru determinarea presiunii p_2, se scrie relația lui Bernoulli între secțiunile drepte S_1 și S_2 ale tubului de curent considerat

$$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2.$$

Se consideră $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, iar $z_1 = z_2$, cotul fiind așezat într-un plan orizontal și rezultă

$$p_2 = p_1 - \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) = p_1 - \frac{8\rho Q^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4}\right).$$

Pentru determinarea proiecțiilor R_x și R_y din relațiile (6.3.2) și (6.3.3), se înmulțește prima relație cu cos α și apoi se adună relațiile, rezultînd

$$R_y(1 - \cos^2\alpha) = \rho Q V_1(1 - \cos^2\alpha) + F_{p1}(1 - \cos^2\alpha),$$

apoi se înmulțește a doua ecuație cu cos α și se adună relațiile.

Se obține $R_x(1 - \cos^2\alpha) = \rho Q V_2(1 - \cos^2\alpha) + F_{p2}(1 - \cos^2\alpha)$.

Deci rezultă $R_x = \rho Q V_2 + p_2 \frac{\pi D_2^2}{4} = \rho Q V_2 + \left[p_1 - \frac{8\rho Q^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4}\right)\right]\frac{\pi D_2^2}{4}$,

$$R_y = \rho Q V_1 + p_1 \frac{\pi D_1^2}{4}.$$

Înlocuind, se obține

$$R_x = 10^3 \cdot 0{,}04 \frac{4 \cdot 0{,}04}{\pi 0{,}1^2} + \left[4 \cdot 10^5 - \frac{8 \cdot 10^3 \cdot 0{,}04^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{0{,}1^4} - \frac{1}{0{,}15^4}\right)\right]\frac{\pi 0{,}1^2}{4} = 3\,262 \text{ N}.$$

$$R_y = 10^3 \cdot 0{,}04 \frac{4 \cdot 0{,}04}{\pi 0{,}15^2} + 4 \cdot 10^5 \frac{\pi 0{,}15^2}{4} = 7\,156 \text{ N}.$$

Rezultanta este $R = \sqrt{R_x^2 + Ry^2 - 2R_x R_y \cos\alpha} = 4\,150$ N,

iar pentru determinarea direcției reacțiunii R, în triunghiul OMP se aplică teorema sinusului

$$R/\sin\alpha = R_x/\sin\beta,$$

de unde $$\sin\beta = \frac{R_x}{R}\sin\alpha = \frac{3\,262}{4\,150} \cdot 0{,}865 = 0{,}680,$$

deci $$\beta = \text{arc sin}\,(0{,}680) = 42{,}84°.$$

Această direcție este suportul vectorului reacțiune $\vec{R}$ și a vectorului forță de acțiune

$$\vec{F}_a = -\vec{R}.$$

Problema 6.4. Distribuitorul unei uzine hidroelectrice este orizontal și are diametrul $D_1 = 3{,}8$ m (fig. 6.4) și distribuie apa la două turbine hidraulice de tip Francis, diametrele conductelor de legătură fiind $D_{2.1} = D_{2.2} = 2{,}6$ m, iar unghiurile făcute cu direcția conductei principale sînt $\alpha_{2.1} = \alpha_{2.2} = 60°$.

Scanned with OKEN Scanner

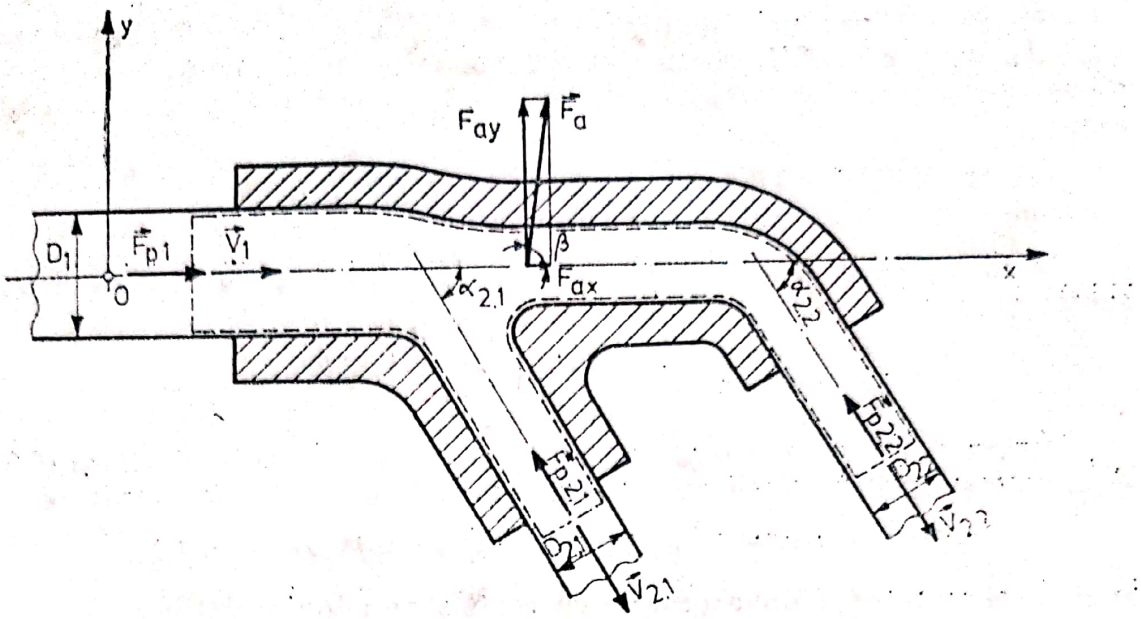


Fig. 6.4.

Cunoscînd presiunea de alimentare $p_1 = 1{,}4$ MPa, debitul de alimentare $Q_1 = 90$ m³/s, care se distribuie în mod egal pe cele două ramuri astfel încît $Q_{2.1} = Q_{2.2} = 45$ m³/s, și neglijînd pierderile de sarcină pe zona ramificațiilor să se determine forța orizontală preluată de masivul de ancoraj.

Rezolvare : Se aplică teorema cantității de mișcare pentru suprafața de control din figura 6.4, ținînd seama că tubul de curent este ramificat

$$\rho\left[\sum_{j=1}^{n} Q_{2.j}\vec{V}_{2.j} - \sum_{i=1}^{m} Q_{1.i}\vec{V}_{1.i}\right] = \Sigma\vec{F}, \tag{6.4.1}$$

în care $i = 1, 2, \ldots, m$ respectiv $j = 1, 2, \ldots, n$ sînt secțiunile de intrare în suprafața de control, respectiv secțiunile de ieșire din suprafața de control, iar $\Sigma\vec{F}$ reprezintă suma forțelor exterioare și de legătură. În cazul considerat, $i = 1$ și $j = 1, 2$, iar relația (6.20) devine

$$\rho[Q_{2.1}\vec{V}_{2.1} + Q_{2.2}\vec{V}_{2.2} - Q_1\vec{V}_1] = \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2.1} + \vec{F}_{p2.2} + \vec{F}_g + \vec{R}, \tag{6.4.2}$$

în care $\vec{F}_g$ este forța de greutate a lichidului din suprafața de control, iar $\vec{R} = -\vec{F}_a$ este reacțiunea peretelui suprafeței de control, inversul forței de acțiune.

Se alege un sistem de axe de coordonate xOy, cu axa Ox în lungul conductei principale și axa Oy perpendiculară pe aceasta. Se proiectează relația (6.4.2) pe axele sistemului de referință ales :

proiecția pe axa Ox : $\rho[Q_{2.1}V_{2.1}\cos\alpha_{2.1} + Q_{2.2}V_{2.2}\cos\alpha_{2.2} - Q_1V_1] = F_{p1} - F_{p2.1}\cos\alpha_{2.1} - F_{p2.2}\cos\alpha_{2.2} + R_x$; (6.4.3)

proiecția pe axa Oy : $\rho[-Q_{2.1}V_{2.1}\sin\alpha_{2.1} - Q_{2.2}V_{2.2}\sin\alpha_{2.2}] = F_{p2.1}\sin\alpha_{2.1} + F_{p2.2}\sin\alpha_{2.2} + R_y$, (6.4.4)

în care R_x și R_y sînt proiecțiile reacțiunii R.

Scanned with OKEN Scanner

Vitezele în conductele distribuitorului se determină din ecuaţia continuităţii, astfel :

$$V_1 = \frac{4Q_1}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 90}{\pi 3{,}8^2} = 7{,}94 \text{ m/s}; \quad V_{2.1} = \frac{4Q_{2.1}}{\pi \cdot D_{2.1}^2} = \frac{4 \cdot 45}{\pi 2{,}6^2} = 8{,}48 \text{ m/s};$$

$$V_{2.2} = \frac{4Q_{2.2}}{\pi D_{2.2}^2} = \frac{4 \cdot 45}{\pi 2{,}6^2} = 8{,}48 \text{ m/s}.$$

Se admite că energia curentului de lichid se împarte în mod egal pe cele două ramuri şi deci se poate scrie

$$\alpha_1 V_1^2/2 + p_1/\rho = \alpha_{2.1} V_{2.1}^2/2 + p_{2.1}/\rho,$$

respectiv

$$\alpha_1 V_1^2/2 + p_1/\rho = \alpha_{2.2} V_{2.2}^2/2 + p_{2.2}/\rho.$$

Deci, considerînd coeficienţii lui Coriolis $\alpha_1 = \alpha_{2.1} = \alpha_{2.2} = 1$, rezultă

$$p_{2.1} = p_{2.2} = p_1 + \frac{\rho}{2}(V_1^2 - V_{2.1}^2) = 1{,}364 \text{ MPa}.$$

Cu aceasta se obţine

$$R_x = \rho[Q_{2.1}V_{2.1}\cos\alpha_{2.1} + Q_{2.2}V_{2.2}\cos\alpha_{2.2} - Q_1V_1] - p_1\frac{\pi D_1^2}{4} + p_{2.1}\frac{\pi D_{2.1}^2}{4}\cos\alpha_{2.1} +$$

$$+ p_{2.2}\frac{\pi D_{2.2}^2}{4}\cos\alpha_{2.2} = -1{,}726 \text{ MN};$$

$$R_y = -\rho[Q_{2.1}V_{2.1}\sin\alpha_{2.1} + Q_{2.2}V_{2.2}\sin\alpha_{2.2}] - p_{2.1}\frac{\pi D_{2.1}^2}{4}\sin\alpha_{2.1} -$$

$$- p_{2.2}\frac{\pi D_{2.2}^2}{4}\sin\alpha_{2.2} = -13{,}175 \text{ MN},$$

şi deci

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 13{,}288 \text{ MN}.$$

Deci forţa de acţiune asupra masivului de ancoraj, care menţine distribuitorul, este

$$\vec{F}_a = -\vec{R},$$

care are componentele : $F_{ax} = 1{,}726$ MN ; $F_{ay} = 13{,}175$ MN,

iar direcţia forţei este dată de unghiul β cu axa Ox

$$\text{tg}\,\beta = \frac{F_{ay}}{F_{ax}} = \frac{13{,}175}{1{,}726} = 7{,}633, \quad \beta = \text{arc tg}\,7{,}633 = 82{,}53°.$$

Problema 6.5. O staţie de pompare este echipată cu două pompe Brateş 250a, $n = 1\,450$ rot/min, fiecare din ele funcţionînd cu parametrii $Q_{1.1} = Q_{1.2} = 170$ l/s, şi $H_{1.1} = H_{1.2} = 15$ m.

Colectorul staţiei este orizontal şi este alcătuit din două ramuri (fig. 6.5), cu diametrele $D_{1.1} = D_{1.2} = 250$ mm, care unesc pompele cu conducta de refulare a staţiei cu diametrul $D_2 = 350$ mm. Cunoscînd unghiurile celor două ramuri cu axa conductei de refulare $\alpha_{1.1} = 45°$ şi $\alpha_{1.2} = 30°$ şi neglijînd pierderile de sarcină din zona colectorului, să se determine forţa orizontală de acţiune produsă de apă asupra colectorului.

Scanned with OKEN Scanner

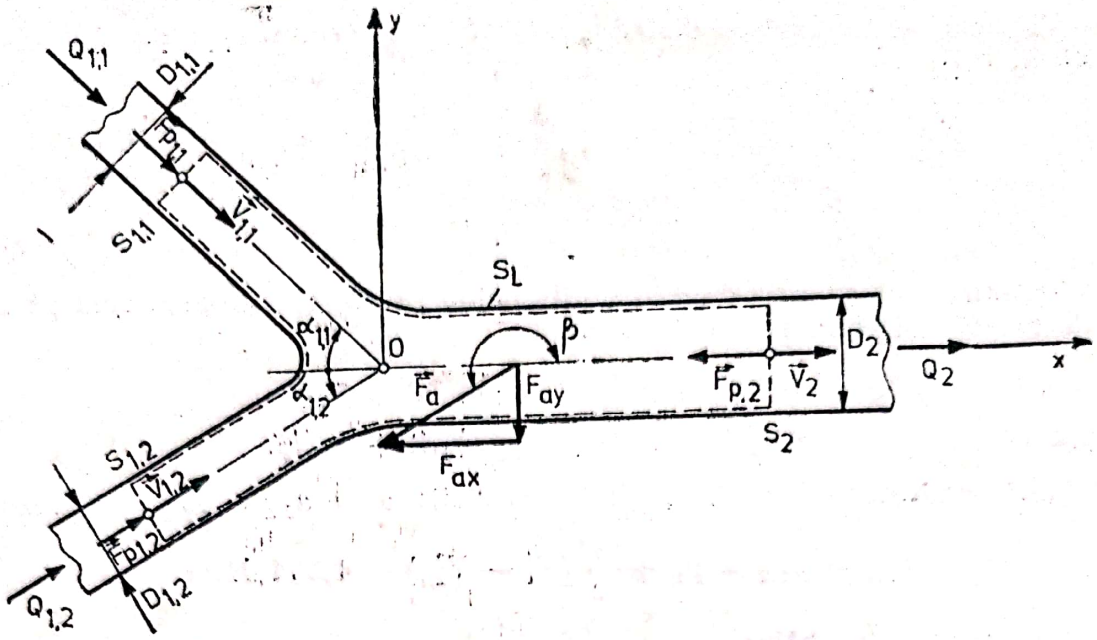


Fig. 6.5.

Rezolvare : Se alege o suprafață de control $S = S_{1.1} \cup S_{1.2} \cup S_2 \cup S_L$, pentru care se aplică teorema cantității de mișcare

$$\rho[Q_2\vec{V}_2 - Q_{1.1}\vec{V}_{1.1} - Q_{1.2}\vec{V}_{1.2}] = \vec{F}_{p1.1} + \vec{F}_{p1.2} + \vec{F}_{p2} + \vec{F}_g + \vec{R}, \quad (6.5.1)$$

în care $\vec{F}_g$ este forța de greutate corespunzătoare apei din suprafața de control, iar $\vec{R}$ este reacțiunea conductei.

Se alege un sistem de referință xOy cu axa Ox în lungul conductei de refulare a stației și axa Oy perpendiculară pe aceasta.

Se proiectează relația (6.5.1) pe axele sistemului de referință ales :

proiecția pe Ox : $\rho[Q_2V_2 - Q_{1.1}V_{1.1}\cos\alpha_{1.1} - Q_{1.2}V_{1.2}\cos\alpha_{1.2}] =$

$$= F_{p1.1}\cos\alpha_{1.1} + F_{p1.2}\cos\alpha_{1.2} - F_{p2} + R_x ;$$

proiecția pe Oy : $Q_{1.1}V_{1.1}\sin\alpha_{1.1} - Q_{1.2}V_{1.2}\sin\alpha_{1.2} =$

$$= F_{p1.2}\sin\alpha_{1.2} - F_{p1.1}\sin\alpha_{1.1} + R_y,$$

R_x și R_y fiind proiecțiile reacțiunii $\vec{R}$.

Presiunile în ramurile colectorului sînt $p_{1.1} = \rho g H_{1.1}$ și $p_{1.2} = \rho g H_{1.2}$, adică $p_{1.1} = p_{1.2} = 14{,}715$ kPa, iar presiunea în conducta de refulare se obține din relația lui Bernoulli

$$p_2 = p_{1.1} + \frac{\rho}{2}(V_{1.1}^2 - V_2^2) = p_{1.1} + \frac{8\rho Q^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{D_{1.1}^4} - \frac{1}{D_2^4}\right);$$

efectuînd înlocuirile rezultă $p_2 = 14{,}435$ kPa.

Exprimînd vitezele din ecuația continuității

$$V_{1.1} = \frac{4Q_{1.1}}{\pi D_{1.1}^2} = 3{,}46 \text{ m/s} ; \qquad V_{1.2} = \frac{4Q_{1.2}}{\pi D_{1.2}^2} = 3{,}46 \text{ m/s} ;$$

$$V_2 = \frac{4Q_2}{\pi D_2^2} = \frac{4(Q_{1.1} + Q_{1.2})}{\pi D_2^2} = 3{,}54 \text{ m/s},$$

se pot exprima proiecţiile reacţiunii $\vec{R}$:

$$R_x = \rho[Q_2V_2 - Q_{1,1}V_{1,1}\cos\alpha_{1,1} - Q_{1,2}V_{1,2}\cos\alpha_{1,2}] + p_2\frac{\pi D_2^2}{4} - p_{1,1}\frac{\pi D_{1,1}^2}{4}\cos\alpha_{1,1} - p_{1,2}\frac{\pi D_{1,2}^2}{4}\cos\alpha_{1,2},$$

respectiv $R_y = \rho[Q_{1,1}V_{1,1}\sin\alpha_{1,1} - Q_{1,2}V_{1,2}\sin\alpha_{1,2}] + p_{1,1}\frac{\pi D_{1,1}^2}{4}\sin\alpha_{1,1} - p_{1,2}\frac{\pi D_{1,2}^2}{4}\sin\alpha_{1,2}.$

Înlocuind, rezultă

$$R_x = 10^3[0{,}34\cdot 3{,}54 - 0{,}17\cdot 3{,}46\cos 45° - 0{,}17\cdot 3{,}46\cos 30°] + 14\,435\frac{\pi\cdot 0{,}35^2}{4} - 14\,715\frac{\pi\cdot 0{,}25^2}{4}\cos 45° - 14\,715\frac{\pi\cdot 0{,}25^2}{4}\cos 30° = 532 \text{ N},$$

$$R_y = 10^3[0{,}17\cdot 3{,}46\cdot\sin 45° - 0{,}17\cdot 3{,}46\sin 30°] + 14\,715\frac{\pi\cdot 0{,}25^2}{4}\sin 45° - 14\,715\frac{\pi\cdot 0{,}25^2}{4}\sin 30° = 271 \text{ N}.$$

Deci $$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 597 \text{ N}.$$

Forţa de acţiune $\vec{F}_a = -\vec{R}$ are valoarea $F_a = 597$ N şi direcţia dată de unghiul β, astfel încît

$$\operatorname{tg}\beta = F_{ay}/F_{ax} = -271/-532 = 0{,}509,$$

căreia îi corespunde unghiul $\beta = 207°$

Problema 6.6. Pentru frînarea unui vehicul, se foloseşte o frînă hidraulică formată dintr-o lamelă curbă care intră în apă pînă la o adîncime h ca în figura 6.6. Dacă viteza iniţială este $V_0 = 150$ m/s, să se determine adîncimea h_0, necesară unei decelerări cu valoarea $a = -20$ m/s².

După ce legea variază adîncimea h şi după cît timp va fi atinsă valoarea $h_m = 0{,}010$ m pentru ca acceleraţia a să fie menţinută constantă.

Din acest moment, adîncimea de imersie a frînei rămîne constantă, $h = h_m$. Să se calculeze, ţinînd seama şi de rezistenţa aerului, energia cinetică a vehiculului după parcurgerea unei distanţe $L = 600$ m de la momentul iniţial al frînării. Se cunosc: masa vehiculului $m = 1\,000$ kg, aria transversală $A_t = 1 \times 1$ m², lăţimea frînei $b = 0{,}8$ m, $\alpha = 30°$, densitatea apei $\rho = 1\,000$ kg/m³, densitatea aerului $\rho_a = 1{,}21$ kg/m³, vîscozitatea cinematică a aerului $\nu_a = 15\cdot 10^{-6}$ m²/s, (se neglijează frecarea dintre roţile vehiculului şi şine).

Rezolvare: Pentru determinarea forţei de rezistenţă F_a, se aplică relaţia (6.2.1)

$$\rho Q_2\vec{V}_2 - \rho Q_1\vec{V}_1 = -\vec{F}_a + \vec{F}_{p1} \qquad (6.6.1)$$

(se neglijează forţa de greutate a lichidului din domeniul $\mathcal{D}$).

Proiectată pe direcţia axei Ox, relaţia (6.6.1), devine

$$\rho QV\cos\alpha + \rho QV = F_a - F_{p1}, \qquad (6.6.2)$$

Scanned with OKEN Scanner

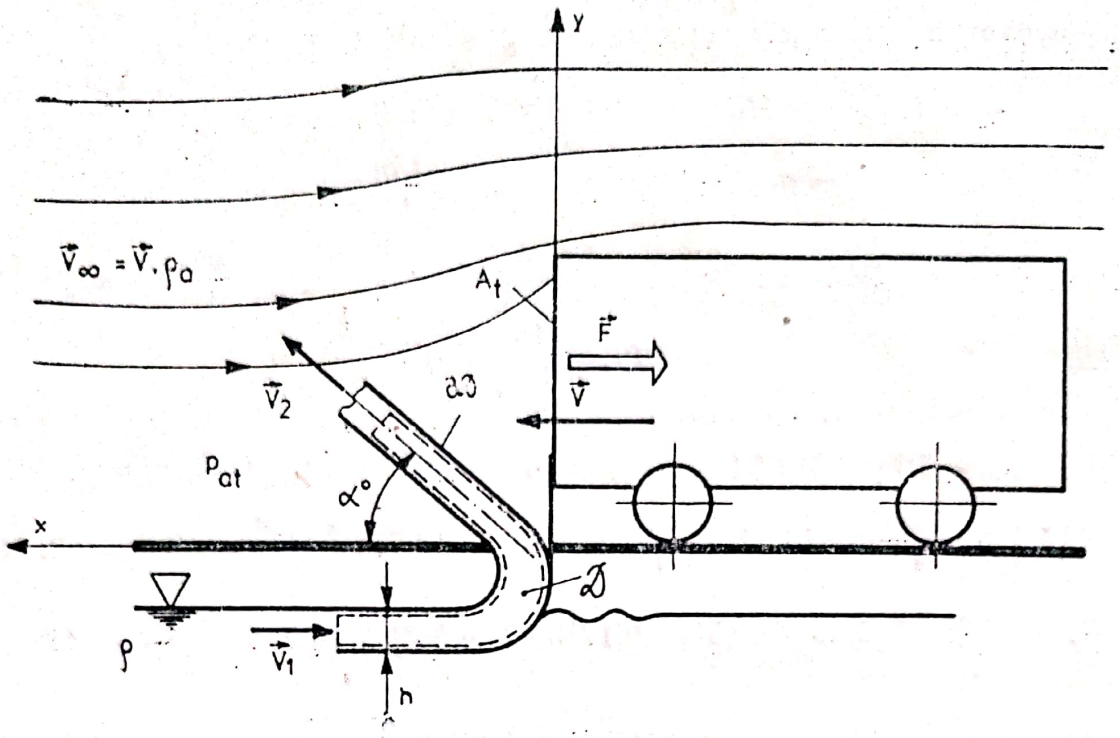


Fig. 6.6.

unde V se consideră aproximativ egală cu viteza de deplasare a vehiculului și $F_{p1} = \rho ghbh/2$ forța de presiune exercitată asupra porțiunii imersate. Se obține

$$F_a = \rho QV(1 + \cos\alpha) + \rho g\, h^2 b/2 \cong \rho QV(1 + \cos\alpha), \qquad (6.6.3)$$

ținînd seama că valoarea vitezei V este mare, iar adîncimea h este mică Se constată că forța de frînare F_a variază cu viteza și nu cu accelerația. Ecuația de mișcare are expresia

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \rho bh(1 + \cos\alpha)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \qquad (6.6.4)$$

Se obține $h_0 = \dfrac{ma}{\rho V_0^2 b(1 + \cos\alpha)} = \dfrac{1\,000 \cdot 20}{1\,000 \cdot 150^2 \cdot 0{,}8(1 + \cos 30°)} \cong 0{,}6$ mm.

Dacă accelerația $\vec{a} = \overrightarrow{const}$, din (6.6.3), rezultă condiția

$$V^2 h = \text{const.} \qquad (6.6.5)$$

Cu $V = V_0 - at$, rezultă variația lui h în funcție de timp

$$h_0/h = (V/V_0)^2;$$

$$h = h_0 V_0^2/(V_0 - at)^2. \qquad (6.6.6)$$

Se obține $(150 - 20 \cdot t)^2 = 0{,}0006 \cdot 150^2/0{,}010,$

$$t^2 - 15t + 52{,}875 = 0, \quad t_1 = 5{,}66 \text{ s}. \qquad (6.6.7$$

Viteza și spațiul parcurs după acest timp cu valorile :

$$V_1 = 150 - 20 \cdot 5{,}66 = 36{,}8 \text{ m/s};$$

$$L_1 = \int_0^{t_1} V dt = 150 \cdot t_1 - \frac{20 \cdot t_1^2}{2} = 528{,}6 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Luînd în considerare şi rezistenţa aerului, forţa de frînare are expresia

$$F = \rho b h V^2(1 + \cos\alpha) + \frac{C_x}{2}\rho A_t V^2, \qquad (6.6.8)$$

unde $C_x = C_x(\mathbf{Re}, \delta)$ reprezintă coeficientul de rezistenţă la înaintare al vehiculului, $\mathbf{Re} = \frac{Vd}{\nu}$, iar δ — un parametru care caracterizează forma corpului. Determinarea coeficientului C_x se face din Anexa A5.

Se calculează o valoare aproximativă a numărului Reynolds

$$\mathbf{Re}_1 = \frac{V_1 d}{\nu_a} = \frac{36{,}8 \cdot 1}{15 \cdot 10^{-2}} = 2{,}4 \cdot 10^6.$$

Ţinînd seama că aria transversală maximă A_t este de formă pătrată, şi în ipoteza menţinerii numărului $\mathbf{Re} > 1\,000$ în timpul mişcării, se găseşte $C_x = 1{,}16$. Deci relaţia (6.6.8) devine

$$F = [1\,000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}0006 \cdot (1 + \cos 30°) + \frac{1{,}16}{2} \cdot 1{,}21 \cdot 1]V^2 \cong 1{,}6\ V^2.$$

Ambele forţe, avînd o dependenţă pătratică de viteză, forma ecuaţiei de mişcare (6.6.4) rămîne neschimbată. Rezultă

$$\frac{dV/dt}{(dV/dt)_1} = \frac{1{,}6V^2}{V_1^2}, \qquad \left(\frac{dV}{dt}\right)_1 = -20\ \text{m/s}^2.$$

Prin integrarea ecuaţiei diferenţiale se obţine

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{1{,}6V^2} = \int_0^{t_2} \frac{-20}{V_1^2}\,dt, \qquad V_2 = \frac{V_1^2}{V_1 + 20 \cdot 1{,}6 \cdot t_2}. \qquad (6.6.9)$$

Spaţiul parcurs în timpul t_2 este

$$L_2 = \int_0^{t_2} V dt = \int_0^{t_2} \frac{V_1^2}{V_1 + 20 \cdot 1{,}6t}\,dt = L - L_1 = 600 - 528{,}6 = 71{,}4\ \text{m}.$$

$$\frac{V_1^2}{20 \cdot 1{,}6}\left[\ln\frac{(V_1 + 20 \cdot 1{,}6 \cdot t_2)}{V_1}\right] = 71{,}4.$$

Deci timpul t_2 are valoarea, $t_2 = 5{,}06$ s. (6.6.10)

Viteza în acest moment este $V_2 = \frac{36{,}8^2}{36{,}8 + 20 \cdot 1{,}6 \cdot 5{,}06} \cong 6{,}8$ m/s,

iar valoarea energiei cinetice este $E_C = mV_2^2/2 = 1\,000 \cdot 6{,}8^2/2 = 23{,}18$ kJ.

Problema 6.7. Dintr-un rezervor montat pe un cărucior se evacuează un jet de apă deviat cu un unghi $\alpha = 45°$ printr-un ajutaj cu diametrul $d = 15$ mm şi coeficient de debit de evacuare $\mu = 0{,}67$. Căruciorul este ancorat de un cablu C ca în figura 6.7. Rezervorul cu diametrul $D = 2$ m, înălţimea $H = 5$ m, şi volumul $\mathcal{V} = 18$ m³ se află la presiunea $p_M = 0{,}3$ MPa.

Să se determine tensiunea T din cablul C şi reacţiunea verticală R_y, dacă înălţimea H se consideră constantă. Se cunosc: $z = 0.4$ m, $\alpha = 45°$, densitatea apei $\rho = 1\,000$ kg/m³, coeficientul de viteză $\varphi = 0{,}9$.

Scanned with OKEN Scanner

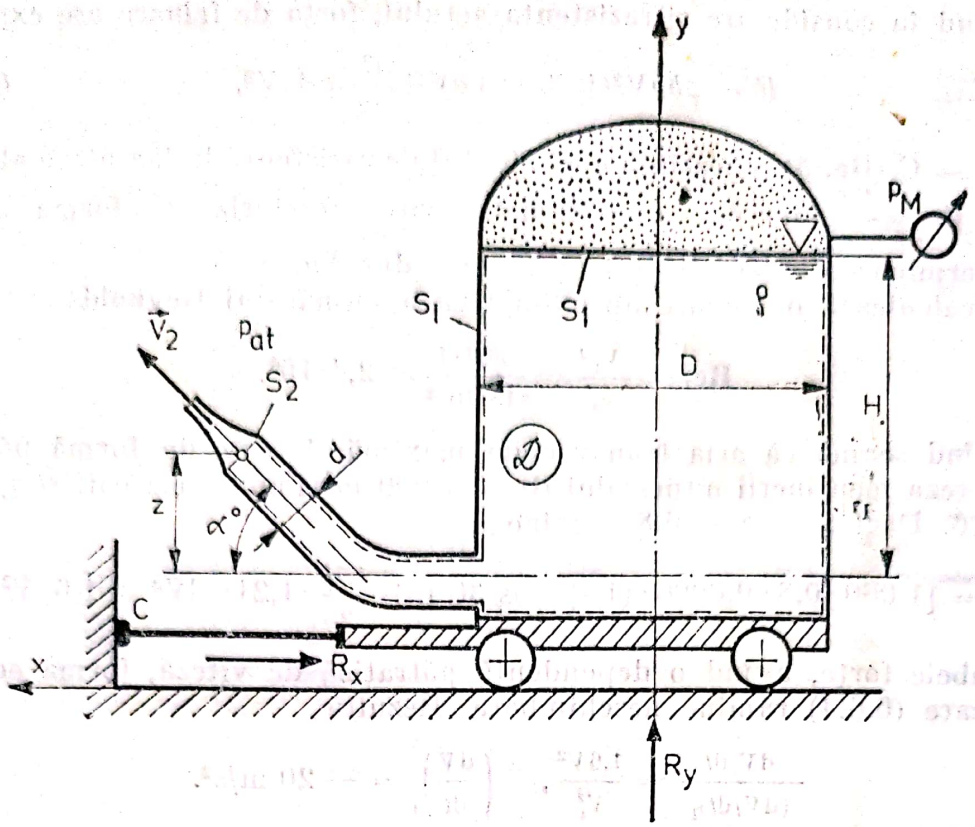


Fig. 6.7.

Rezolvare : Se aplică relația (6.2.1) domeniului fluid $\mathcal{D}$

$$\rho Q\vec{V}_2 = \vec{F}_g + \vec{F}_{p1} + \vec{R}. \tag{6.7.1}$$

Se proiectează relația vectorială (6.7.1) pe axele sistemului reprezentat în figură. Rezultă

$$\rho QV_2\cos\alpha = R_x\,;\quad \rho QV_2\sin\alpha = -F_g + R_y = -\rho g\mathcal{V} + R_y. \tag{6.7.2}$$

Relațiile de calcul ale vitezei și debitului sînt (4.1.6) și (4.1.8)

$$V_2 = V = \varphi\sqrt{2g(H + H_m - z)},\qquad Q = \mu\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2g(H + H_m - z)}, \tag{6.7.3}$$

unde $H_m = \frac{p_M}{\rho g} = \frac{0{,}3\cdot 10^6}{1\,000\cdot 9{,}81} = 30{,}58$ m, $V = 0{,}9\sqrt{2\cdot 9{,}81(5 + 30{,}58 - 0{,}4)} =$

$= 23{,}64$ m/s, $Q = 0{,}67\frac{\pi\cdot 0{,}015^2}{4}\cdot\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 35{,}18} = 0{,}0031\,\text{m}^3/\text{s}.$

Tensiunea din cablul C are valoarea

$$T = R_x = 1\,000\cdot 0{,}0031\cdot 23{,}46\cdot\cos 45° = 51{,}8\ \text{N}$$

și reacțiunea $R_y = 1\,000\cdot 0{,}0031\cdot 23{,}64\cdot\sin 45° + 1\,000\cdot 9{,}81\cdot 18 = 176{,}6$ kN

Problema 6.8. În procesul tehnologic de fabricație a hîrtiei, fibrele de celuloză sînt depozitate într-un reactor de fermentare, în contact cu abur menținut la presiunea constantă $p_M = 0{,}69$ MPa (presiunea manometrică). Reactorul este descărcat printr-un jet care lovește o placă plană, în scopul măririi gradului de separare a fibrei de celuloză.

Scanned with OKEN Scanner

Diametrul reactorului (considerat cilindric) este $D = 2{,}5$ m, înălțimea pastei $H = 6$ m, orificiul de descărcare are diametrul $d = 200$ mm, un coeficient de debit $\mu = 0{,}58$ și un coeficient de viteză $\varphi = 0{,}9$, iar placa se află la distanța $h = 600$ mm de orificiu. Densitatea pastei este $\rho = 1\,015$ kg/m³ (fig. 6.8).

a) Să se calculeze timpul de golire a pastei de la nivelul H.

b) Să se calculeze forța de acțiune a jetului asupra plăcii în momentul inițial și să se evalueze eroarea în cazul în care această forță se consideră constantă.

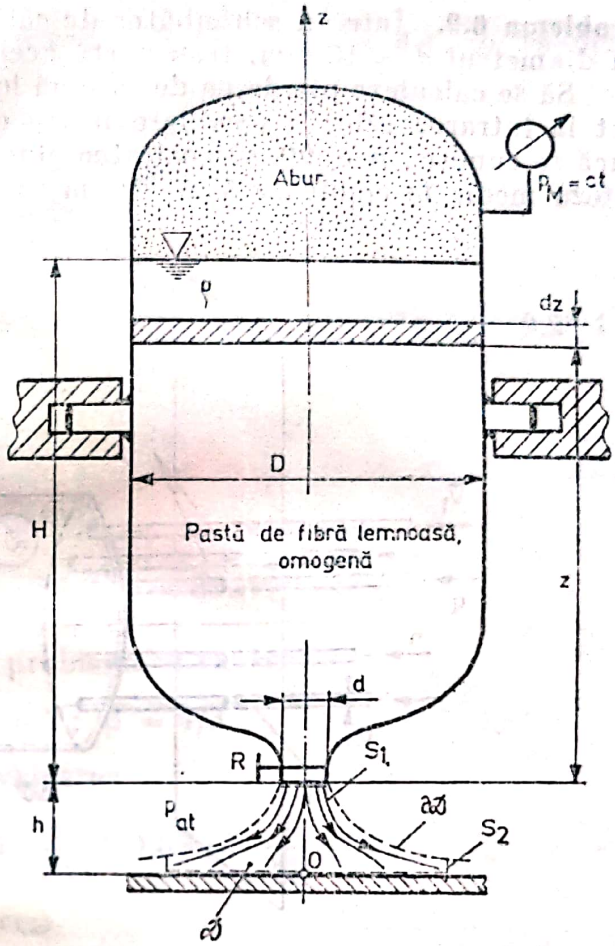


Fig. 6.8.

Rezolvare : a) Pentru determinarea timpului de golire se egalează volumul elementar golit din rezervor cu cel evacuat prin orificiu, pentru un nivel oarecare z în rezervor

$$\mu \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g\left(z + \frac{p_M}{\rho g}\right)}\, dt = -\frac{\pi D^2}{4}\, dz,$$

de unde

$$dt = -\frac{D^2}{\mu d^2 \sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z + p_M/\rho g}},$$

respectiv

$$t = \frac{2D^2}{\mu d^2 \sqrt{2g}} \left[\sqrt{H + \frac{p_M}{\rho g}} - \sqrt{\frac{p_M}{\rho g}}\right],$$

$$t = \frac{2 \cdot 2{,}5^2}{0{,}58 \cdot 0{,}2^2 \cdot 4{,}44} \left[\sqrt{6 + \frac{0{,}69 \cdot 10^6}{1\,015 \cdot 9{,}81}} - \sqrt{\frac{0{,}69 \cdot 10^6}{1\,015 \cdot 9{,}81}}\right] = 42 \text{ s}.$$

b) Pentru determinarea forței de acțiune, se aplică teorema impulsului pe suprafață de control indicată

$$\rho Q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} + \vec{F}_g + \vec{R},$$

iar prin proiecția relației pe axa Oz se obține

$$-\rho Q V_1 = F_g - F_a,$$

în care $\vec{F}_a = -\vec{R}$. Deci rezultă

$$F_a = \rho Q V_1 + F_g = 24{,}78 \text{ kN}.$$

Forța F_a este proporțională cu pătratul vitezei, care este proporțională cu rădăcina pătrată a lui $H_t = H + p_M/\rho g$. Deci eroarea este proporțională cu ponderea lui H în H_t, care este $6/69 = 0{,}087$, astfel eroarea este în jur de 9%.

Scanned with OKEN Scanner

Problema 6.9. Într-un schimbător de căldură (fig. 6.9), n conducte identice, cu diametrul $d = 10$ mm, transportă același debit de ulei q.

Să se calculeze pierderea de sarcină locală cu ajutorul relației Borda-Carnot la intrarea celor n conducte într-o conductă cu diametrul $D = 0{,}2$ m, dacă se cunosc : $n = 20$, viscozitatea cinematică a uleiului $\nu = 80 \cdot 10^{-6}$ m²/s, viteza medie în conducte $V_1 = 10$ m/s.

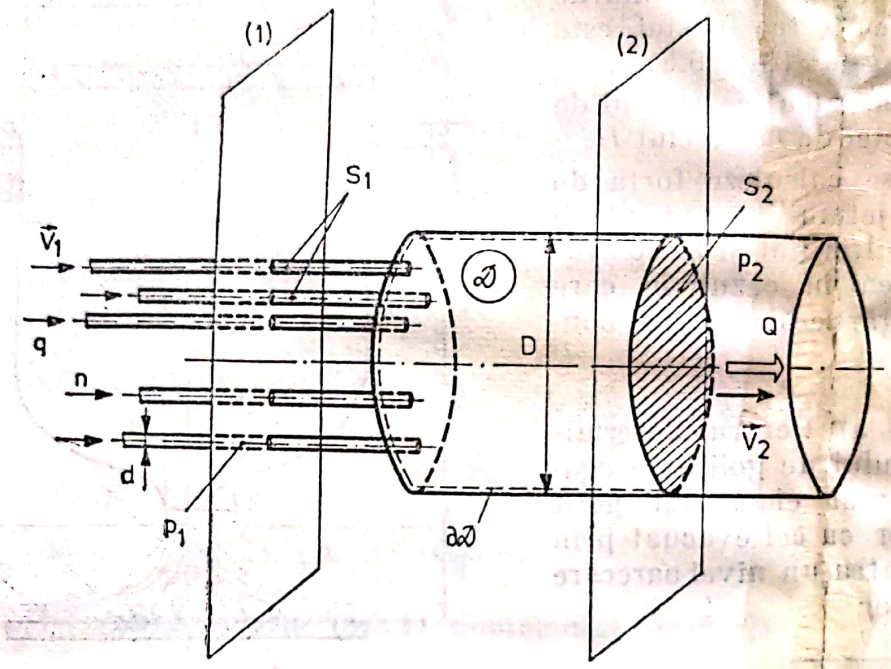


Fig. 6.9.

Rezolvare : Pentru suprafața de control $\partial \mathcal{D}$, se aplică relația (6.1.3) în cazul mișcării permanente a unui fluid incompresibil

$$\int_{S_2} \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\mathrm{d}A - \int_{S_1} \rho \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\mathrm{d}A = \sum \vec{F}_{ext}, \tag{6.9.1}$$

unde v reprezintă viteza punctuală în secțiunea de curgere. Se definește viteza medie într-o conductă

$$V_i = \frac{Q}{A_i} = \frac{1}{A_i}\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A. \tag{6.9.2}$$

Proiectată pe direcția conductei, relația vectorială (6.9.1) devine

$$\rho V_2^2 A_2 \cdot \frac{1}{A_2}\int_{S_2} \frac{v^2}{V_2^2}\mathrm{d}A - \rho V_1^2 A_1 \cdot \frac{1}{A_1}\int_{S_1} \frac{v^2}{V_1^2}\mathrm{d}A = p_1 A_1 + p_1(A_2 - A_1) -$$

$$- p_2 A_2 = A_2(p_1 - p_2). \tag{6.9.3}$$

Se aplică relația lui Bernoulli (4.1.1) între secțiunile S_1 și S_2

$$p_1/\rho g + \alpha_1 V_1^2/2g = p_2/\rho g + \alpha_2 V_2^2/2g + h_{r1,2}. \tag{6.9.4}$$

Deci pierderea de sarcină are valoarea

$$h_{r1,2} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{1}{2g}(\alpha_1 V_1^2 - \alpha_2 V_2^2). \tag{6.9.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Definind coeficientul lui Boussinesq, $\beta_i = \frac{1}{A_i}\int\limits_{S_i}\frac{v^2}{V_i^2}\,dA$, și raportul $k = A_1/A_2 = V_2/V_1$, din (6.9.4) și (6.9.2) rezultă

$$h_r = \frac{1}{2g}\alpha_1 V_1^2\left[1 - 2k\frac{\beta_1}{\alpha_1} + k^2\left(2\frac{\beta_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\right]. \qquad (6.9.6)$$

Ariile A_1 și A_2 au expresiile :

$$A_1 = n\ \pi d^2/4 = 20\ \pi\cdot 0{,}01^2/4 = 1{,}57\cdot 10^{-3}\ \text{m}^2; \qquad A_2 = \pi D^2/4 = \pi\cdot 0{,}2^2/4 = 0{,}031\ \text{m}^2.$$

Raportul ariilor este $k = 1{,}57\cdot 10^{-3}/0{,}031 = 0{,}05$.

Pentru determinarea coeficientului lui Coriolis și Boussinesq, se verifică regimul de curgere din secțiunile S_1 și S_2.

$$\mathbf{Re} = \frac{V_1 d}{\nu} = \frac{10\cdot 0{,}01}{80\cdot 10^{-6}} = 1\,250 < \mathbf{Re}_{cr} = 2\,300.$$

Mișcarea fiind laminară (vezi problema 4.1), rezultă :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 2\ ;\ \beta = 4/3.$$

Deci pierderea de sarcină are valoarea

$$h_r = \frac{1}{2\cdot 9{,}81}\,2\cdot 10^2\left[1 - 2\cdot 0{,}05\cdot\frac{4}{3\cdot 2} + 0{,}05^2\left(2\cdot\frac{4}{3\cdot 2} - 1\right)\right] = 9{,}52\ \text{m}.$$

Relația (6.9.6) se scrie sub forma

$$h_r = \zeta\frac{V_1^2}{2g},\ \zeta = \alpha_1\left[1 - 2k\frac{\beta_1}{\alpha_1} + k^2\left(2\frac{\beta_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\right], \qquad (6.9.7)$$

unde ζ este coeficientul de pierderi locale de sarcină hidraulică.

Observație : Numai în cazul mișcării turbulente $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta \cong 1$, iar ζ se calculează cu formula clasică $\zeta = (1 - k)^2$.

În cazul acesta, se obține o pierdere de sarcină acu aproximativ 50% mai mică, $h_r = 5{,}08$ m.

Problema 6.10. O instalație de acționare hidraulică are schema indicată în figura 6.10. Printr-o duză cu diametrul d_2, se transmite un jet de fluid unui piston diferențial care acționează o supapă de comandă S_c. Debitul de fluid Q intră în camera *1* printr-o diafragmă cu diametrul interior d_1. Presiunea p_1 acționează un piston cu diametrul D care susține forța F. Să se determine forțele de pretensionare necesare în cele două arcuri F_a și F_{as}, astfel încît supapa de comandă să nu se deschidă. Aplicație numerică : $d_1 = 5$ mm, $d_2 = 2$ mm, $d_3 = 10$ mm, $d_s = 5$ mm, $D = 0{,}15$ m, $\mu_1 = 0{,}6$, $\varphi_2 = 1$, $\delta = 0{,}5$ mm, $p_0 = 15$ PMa, $p_2 = 2$ MPa, densitatea fluidului $\rho = 850$ kg/m³, forța $F = 250$ kN.

Rezolvare : Relațiile de calcul sînt :

$$Q = \mu_1\frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2(p_0 - p_1)}{\rho}} = \mu_2\frac{\pi d_2^2}{4}\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}; \qquad (6.10.1)$$

$$p_1\frac{\pi D^2}{4} = F + F_a\ ;\quad F_c = \rho Q V_2 = p_3\frac{\pi d_3^2}{4}\ ;\quad p_3\frac{\pi d_s^2}{4} = F_{as}, \qquad (6.10.2)$$

Scanned with OKEN Scanner

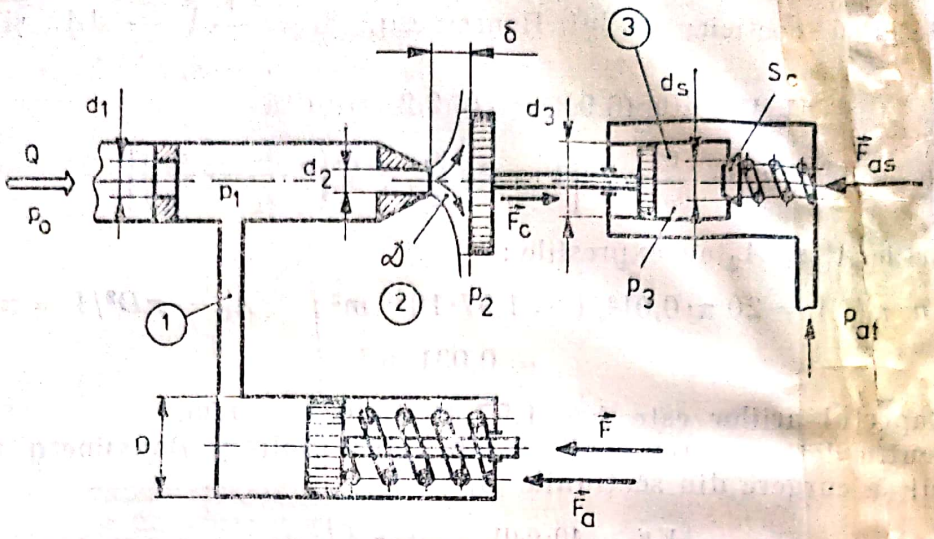


Fig. 6.10.

unde, pentru stabilirea relaţiilor (6.10.1) şi (6.10.2), s-au folosit (4.1.8) şi (6.1.10). Coeficientul de debit μ_2 se determină în funcţie de raportul δ/d_2 din anexa A.4.

Pentru $\delta/d_2 = 0{,}5/2 = 0{,}25$, corespunde $\mu_2 \cong 0{,}7$.

Din (6.10.1) rezultă $p_1 = \dfrac{\mu_1^2 \cdot d_1^4 p_0 + \mu_2^2 d_2^4 p_2}{\mu_1^2 d_1^4 + \mu_2^2 d_2^4} = \dfrac{0{,}6^2 \cdot 0{,}005^4 \cdot 15 \cdot 10^6 + 0{,}7^2 \cdot 0{,}002^4 \cdot 2 \cdot 10^6}{0{,}6^2 \cdot 0{,}005^4 + 0{,}7^2 \cdot 0{,}002^4} =$

$= 14{,}5$ MPa.

Debitul jetului are valoarea $Q = 0{,}6\pi \dfrac{0{,}005^2}{4} \sqrt{\dfrac{2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^6}{850}} = 4 \cdot 10^{-4}$ m³/s.

Viteza jetului este $V_2 = \varphi_2 \sqrt{\dfrac{2(p_1 - p_2)}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 12{,}5 \cdot 10^6}{850}} = 170$ m/s.

Se obţine valoarea forţei din arcul cilindrului

$$F_a = p_1 \pi D^2/4 - F = 14{,}5 \cdot 10^6\, \pi 0{,}15^2/4 - 250\,000 = 6{,}2 \text{ kN}.$$

Forţa de comandă produsă de jet este

$$F_c = \rho Q V_2 = 850 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 170 = 57{,}8 \text{ N}.$$

Rezultă $$p_3 = \frac{F_c \cdot 4}{\pi d_3^2} = \frac{57{,}8 \cdot 4}{\pi 0{,}01^2} = 0{,}73 \text{ MPa}.$$

Deci forţa necesară menţinerii supapei de comandă în poziţie închisă este

$$F_{as} = \frac{0{,}73 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 0{,}005^2}{4} = 14{,}3 \text{ N}.$$

Problema 6.11. Într-un rezervor se află aer la presiunea $p_0 = 0{,}11$ MPa. În ipoteza menţinerii constante a presiunii din rezervor, să se determine coeficientul de contracţie pentru un ajutaj Borda (vezi fig. 6.11), prin care aerul este evacuat la presiunea atmosferică. Mişcarea gazului se consideră adiabatică, cu un coeficient $\varkappa = 1{,}4$; densitatea aerului la presiunea atmosferică $\rho_e = 1{,}21$ kg/m³.

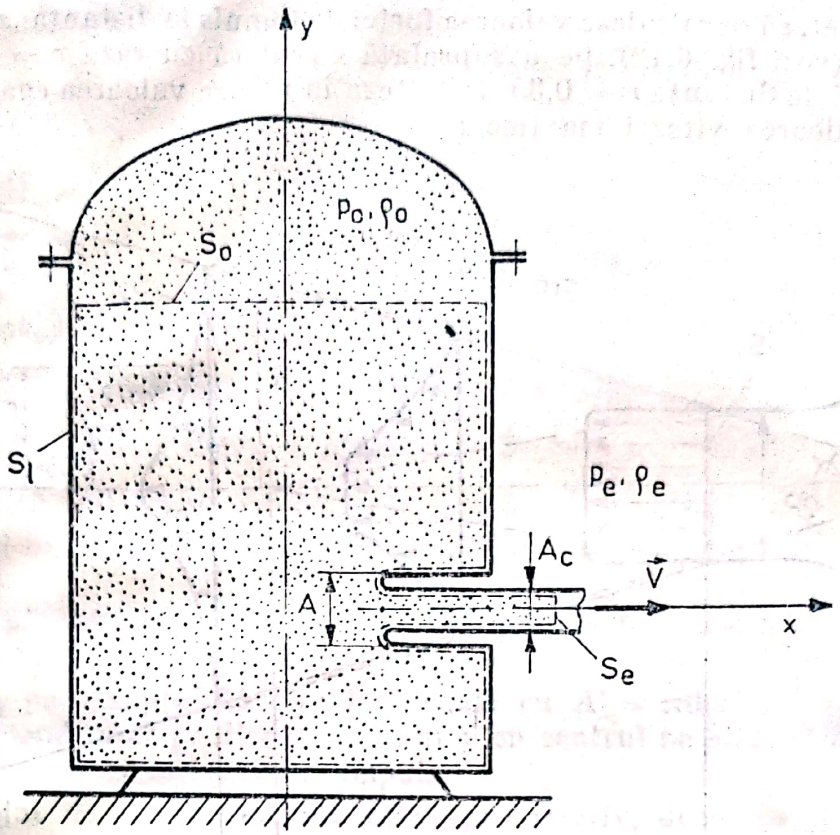


Fig. 6.11.

Rezolvare : Pentru determinarea coeficientului de contracţie $\varepsilon = A_c/A$, se aplică teorema impulsului unui volum de control care cuprinde suprafaţa rezervorului şi vena efluentă de aer ca în figura 6.11. Neglijînd viteza pe secţiunea S_0, relaţia (6.2.1) se proiectează pe direcţia Ox şi se obţine

$$\rho_e A_c V^2 = (p_0 - p_e)A$$

Viteza V se determină din formula Saint-Venant (vezi problema 4.11)

$$V = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}.$$

Rezultă

$$\varepsilon = \frac{A_c}{A} = \frac{1}{\rho_e}(p_0 - p_e)\frac{1}{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]},$$

iar, cu $\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} = \frac{\rho_e}{\rho_0}$, coeficientul de contracţie are expresia

$$\varepsilon = \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa}\left(\frac{p_0}{p_e} - 1\right)\left[\left(\frac{p_0}{p_e}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1\right]^{-1} = \frac{1{,}4 - 1}{2 \cdot 1{,}4}\left(\frac{0{,}11}{0{,}1} - 1\right)\left[\left(\frac{0{,}11}{0{,}1}\right)^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}} - 1\right]^{-1} =$$

$$= 0{,}517.$$

Problema 6.12. Printr-un orificiu circular înecat cu raza $R_0 = 0{,}25$ m este eliminat un debit de apă $Q = 0{,}88$ m³/s. Admiţînd că impulsul la ieşirea din conductă se conservă pe lungimea curgerii şi că viteza are o distribuţie pa-

Scanned with OKEN Scanner

rabolică în jet, să se calculeze valoarea forței de impuls la distanța $x = 0{,}25$ m de orificiu (vezi fig. 6.12), pe o suprafață circulară cu raza $r = 0{,}35\ R$. Se consideră că, la distanța $r = 0{,}35\ R$, viteza în jet are valoarea egală cu jumătate din valoarea vitezei maxime v_m.

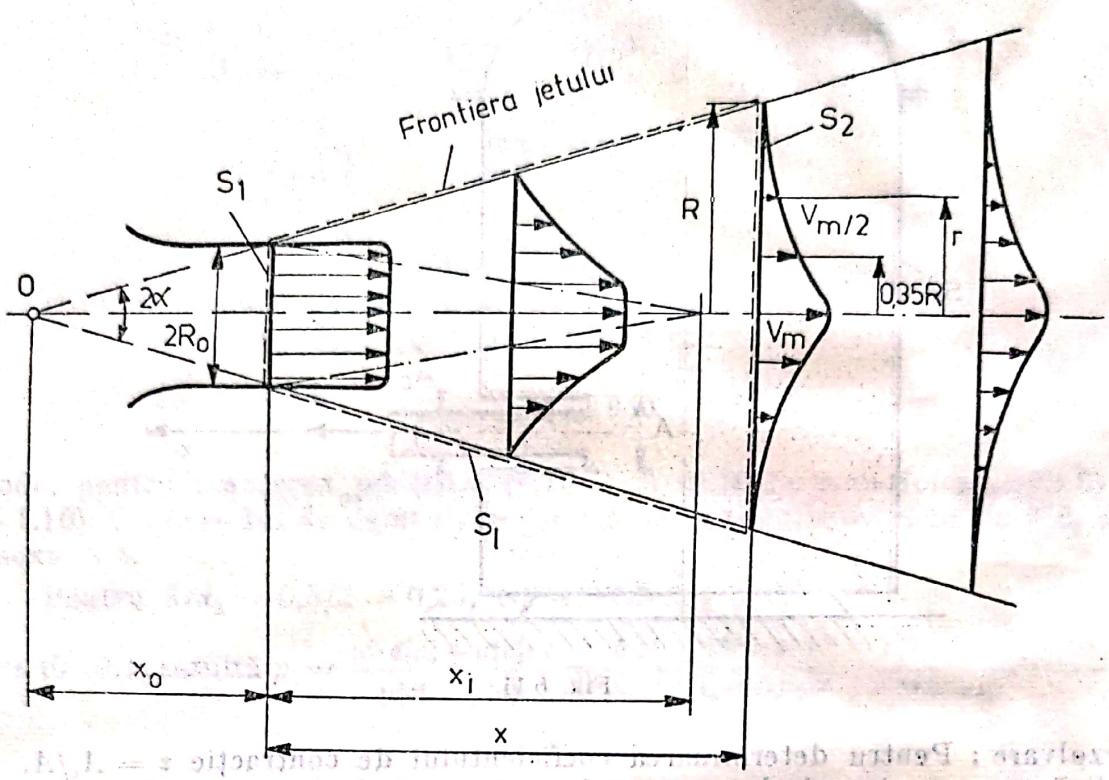


Fig. 6.12.

Rezolvare : În ipoteza mișcării permanente, forța de impuls $\vec{F}_i$ are expresia (6.1.3)

$$\vec{F}_i = \int_S \rho \vec{v} \vec{v} \vec{n} dA.$$

Proiectată pe direcția axei Ox, se obține expresia

$$F_{ix} = \int_S \rho v_x^2 dA = \int_0^R \rho v_x^2 2\pi r dr = \text{ct.} \qquad (6.12.1)$$

Forța de impuls la ieșirea din orificiu are valoarea

$$F_{i0} = \rho \pi R_0^2 V_0^2 = 1\,000 \cdot \pi 0{,}25^2 \cdot 4{,}5^2 = 3{,}97 \text{ kN}, \qquad (6.12.2)$$

unde $$V_0 = \frac{Q}{\pi R_0^2} = 4{,}5 \text{ m/s}.$$

Din lucrarea *, rezultă următoarele date :

— distanța până la frontiera jetului : $R = x \operatorname{tg} \alpha + R_0 = 2{,}5 \cdot \operatorname{tg} 15° + 0{,}25 = 0{,}92$ m ;

— viteza maximă în jet : $v_m = \frac{0{,}96}{0{,}08x/R_0 + 0{,}29} \cdot V_0 = 3{,}96$ m/s.

* Pentru calcule complete ale jeturilor înecate, se recomandă lucrarea : Petre Roman. Introducere în fizica poluării fluidelor. București, Editura Științifică și Enciclopedică, 1980.

Se consideră expresia vitezei de forma :

$$v_x = ar^2 + br + c \qquad (6.12.3)$$

unde a, b, c sînt funcţii de cota x.

Pentru determinarea constantelor a, b, c, se pun următoarele condiţii:

1. $r = 0, \quad v_x = v_m, \quad c = 3{,}96$;
2. $r = 0{,}35R = 0{,}322$ m, $\quad v_x = v_m/2 = 1{,}98$ m/s ;
3. $\int_0^R \rho v_x^2 2\pi r dr = \rho\pi R_0^2 V_0^2$, relaţia de conservare a impulsului.

Se obţine: $0{,}35^2 aR^2 + 0{,}35bR + v_m = v_m/2$;

$$a^2R^6/6 + 2abR^5/5 + (2av_m + b^2)\,R^4/4 + 2v_m b\,R^3/3 + v_m^2 R^2/2 - 4R_0^2V_0^2/8 = 0$$

Rezultă valoarea constantelor a şi b : $a = -2{,}63$, $b = -5{,}33$.
Forţa de impuls pînă la valoarea razei $r = 0{,}35\ R$ are valoarea

$$F_i = \int_0^{0,35R} \rho(-2{,}63r^2 - 5{,}33r + 3{,}96)^2 2\pi r dr = 2\pi\rho 0{,}384 = 2{,}4 \text{ kN}. \qquad (6.12.4)$$

Deci, pe o suprafaţă circulară egală cu $A' = \pi 0{,}35^2 R^2 = 0{,}325$ m^2, situată perpendicular pe direcţia jetului şi cu centrul pe axul orificiului, acţionează 60% din forţa totală de impuls.

Profilul de viteze obţinut este aproximativ, deoarece nu respectă o condiţie la limită, $v_x = 0$ pentru $r = R$; din (6.4.6), rezultă $v_x = 0$ pentru $r = 0{,}58$ m şi nu pentru $r = R = 0{,}92$ m. Ţinînd seama că valoarea vitezei scade foarte rapid cu raza jetului, în realitate vitezele sînt mai mici decît $0{,}15\ v_m$ după $r = R/2$ şi rezultatul obţinut în (6.12.4) este aproape de cel exact.*

Problema 6.13 Să se determine rezistenţa la înaintare a unui corp izolat situat într-un curent de fluid cu viteza la infinit $\vec{V}_\infty$, presiunea p_∞ şi densitatea ρ (fig. 6.13, *b*), în ipoteza unei mişcări plane permanente. Se consideră cunoscută distribuţia de viteze în avalul corpului. (Calculul se face considerînd lungimea corpului unitară).

Rezolvare : Acţiunea fluidului asupra unui corp se reduce la o forţă rezultantă $\vec{F}$ dată de relaţia (6.19.26) şi un moment $\vec{M}$ (fig. 6.13, *a*)

$$\vec{F} = \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T}\vec{n}\,dA = -\int_{\partial\mathcal{D}} p\vec{n}\,dA + \eta \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial\vec{v}}{\partial n}\,dA, \qquad (6.13.1)$$

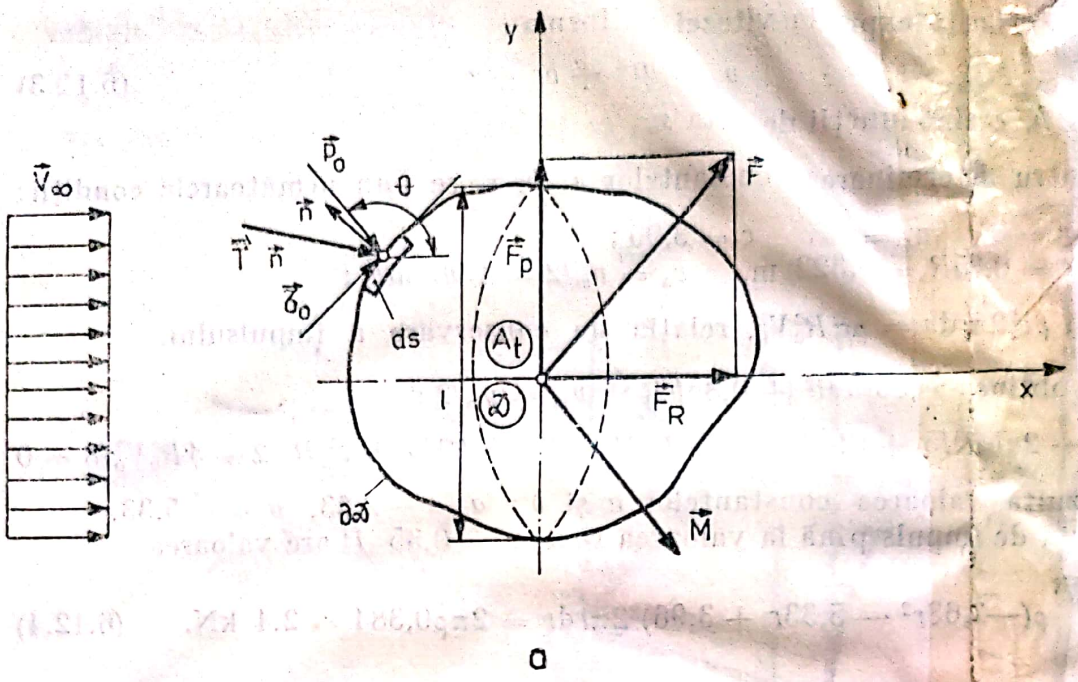
$$\vec{M} = \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{r}\times\vec{T}\vec{n}\,dA. \qquad (6.13.2)$$

Proiectată pe direcţia vitezei curentului $\vec{V}_\infty = \vec{V}$, relaţia (6.13.1) are forma

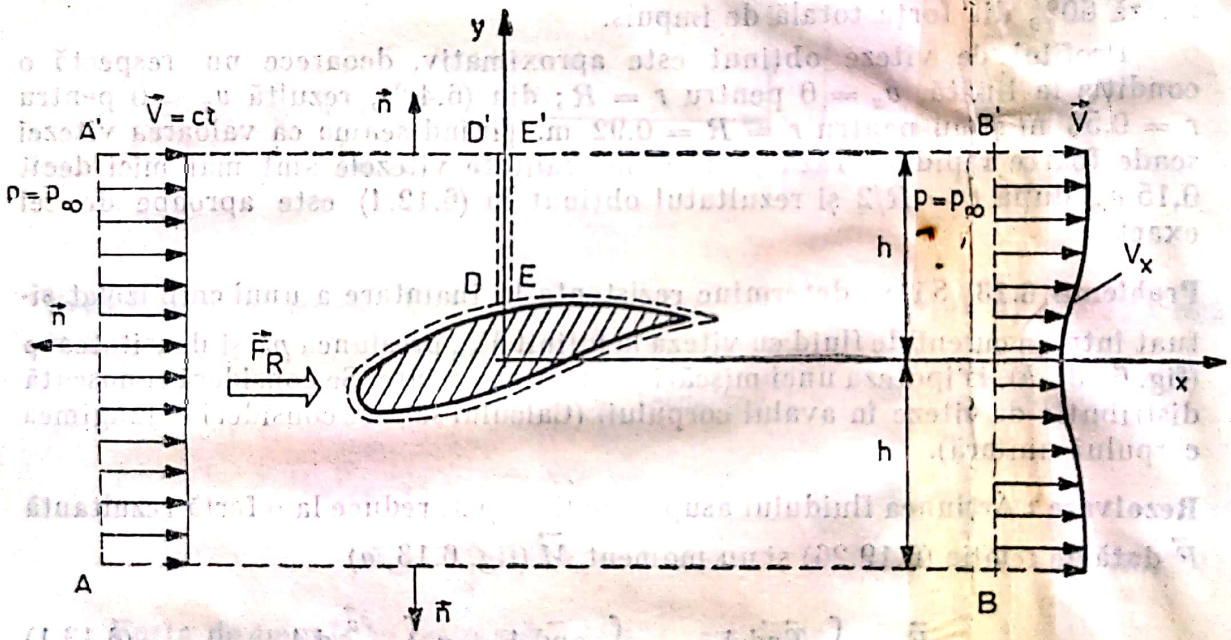
$$F_x = F_R = -\int_{\partial\mathcal{D}} p_0 \cos\theta\,dA + \int_{\partial\mathcal{D}} \tau_0 \sin\theta\,dA, \qquad (6.13.3)$$

unde p_0 şi τ_0 sînt eforturile normale şi tangenţiale pe suprafaţa corpului. Componenta F_R poartă denumirea de rezistenţă la înaintare. Componenta $F_y = F_p$, perpendiculară pe direcţia vitezei, se numeşte forţă portantă.

Scanned with OKEN Scanner



a



b

Fig. 6.13.

(În cazul fluidelor ideale, forţa de rezistenţă este nulă, iar forţa portantă se calculează cu formula Kutta-Jukovski :

$F_p = \rho V_\infty \Gamma$ unde $\Gamma = \int_C \vec{v} d\vec{r}$ reprezintă circulaţia vitezei pe curba C care mărgineşte corpul).

În cazurile practice, relaţiile (6.13.1) şi (6.13.2) se pun sub forma

$$F_R = (1/2) C_r \rho A_t V^2 ; \qquad (6.13.4)$$

$$F_p = (1/2) C_p \rho A_t V^2 ; \qquad (6.13.5)$$

$$M = (1/2) C_m \rho A_t V^2, \qquad (6.14.6)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde mărimile mărimile adimensionale C_r, C_p și C_m reprezintă coeficientul de rezistență la înaintare, coeficientul de portanță și, respectiv, coeficientul de moment. Așa cum s-a precizat și în problema (6.19), acești coeficienți sînt indicați tabelar în funcție de numărul Re caracteristic curgerii. În cazul profilelor aerodinamice, aflate într-un curent de fluid, se trasează curba $C_p = C_p(C_r)$, denumită polara profilului*.

Rezistența la înaintare a corpului din fig. 6.13, b se poate determina prin aplicarea teoremei impulsului**.

Se aplică relația (6.1.3) pentru o mișcare permanentă în domeniul $AA'D'DEE'B'BA$. Se fac următoarele considerente:

— domeniul $AA'B'BA$ se află suficient de departe de corp și se admite că presiunea are aceeași valoare $p = p_\infty = \text{const}$, astfel că rezultanta forțelor de presiune F_p este nulă;

— pe suprafețele AB și $A'B'$, $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$ și forțele de viscozitate sînt nule;

— pe porțiunea DE, în jurul profilului, $\vec{V} = 0$, din condiția de aderență la suprafața solidă;

— pe tăietura $D'D$ și $E'E$, forțele de impuls se anulează;

— se neglijează forța masică.

În aceste condiții, relația (6.1.3) se reduce la expresia

$$\int_{AA'} \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\mathrm{d}A + \int_{BB'} \rho\vec{v}_x(\vec{v}_x\cdot\vec{n})\mathrm{d}A = -\vec{R}. \qquad (6.13.7)$$

Dar $\vec{v}\cdot\vec{n} = -v$ pe AA', $\vec{v}_x\cdot\vec{n} = v_x$ pe BB', $\int_{-h}^{h} v_x\mathrm{d}y = V2h$

din ecuația de continuitate aplicată domeniului, $Q_{AA'} = Q_{BB'}$, deci (6.13.7) devine:

$$R = 2h\rho v^2 - \rho\int_{-h}^{h} v_x^2\mathrm{d}y; \quad R = \int_{-h}^{h} v_x(v - v_x)\mathrm{d}y, \qquad (6.13.8)$$

unde $\vec{v}_x$ reprezintă distribuția pe secțiunea BB' (presupusă cunoscută).

Observație: În acest caz s-a păstrat notația C_r în loc de C_x pentru coeficientul de rezistență la înaintare.

Problema 6.14. Un amestecător format din două bare cilindrice, cu diametrul $d = 30$ mm și lungimea $l = 1$ m, funcționează la turația $n = 150$ rot/min, (fig. 6.14). În bazin se găsește un fluid cu densitatea $\rho = 950$ kg/m³ și viscozitatea cinematică $\nu = 30\cdot10^{-6}$ m²/s. Barele cilindrice verticale sînt montate pe două corniere cu secțiunea pătrată de latură $a = 25$ mm la razele $r_1 = 0{,}25$ m și $r_2 = 0{,}45$ m față de axul de rotație. Să se calculeze puterea mecanică disipată la mișcarea barelor în fluidul din bazin.

Rezolvare: În calculul puterii disipate prin rezistența opusă de fluid, se neglijează efectele de capăt asupra curgerii fluidului în apropierea barelor metalice. Această ipoteză este în concordanță cu realitatea, dacă razele r_1 și r_2 sînt suficient distanțate de pereții vasului, diferența $\Delta r = r_2 - r_1$ fiind mult mai mare decît diametrul barelor d.

* Elie Carafoli și V. N. Constantinescu. Dinamica fluidelor incompresibile. București Editura Academiei, 1981, pag. 323.

** Dan Gh. Ionescu. Introducere în hidraulică. București, Editura Tehnică, 1977. pag. 275.

Scanned with OKEN Scanner

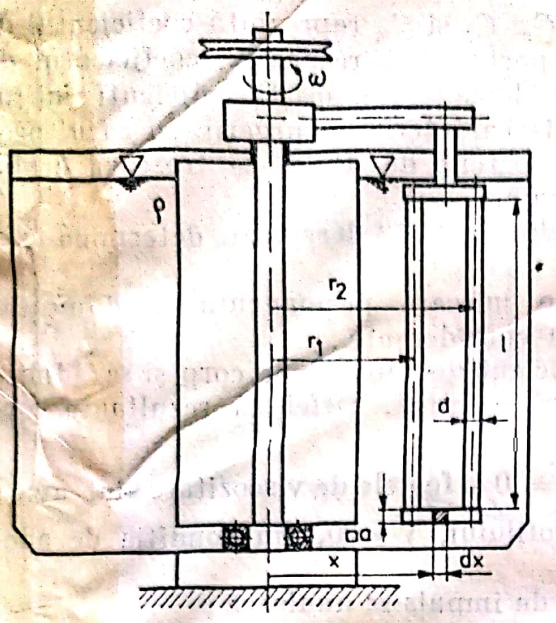


Fig. 6.14.

Forța de rezistență la înaintare este dată de relația (6.13.4):

$$F_R = \frac{C_x}{2}\rho A_t V^2. \qquad (6.14.1)$$

Astfel, puterea disipată are expresia:

$$P_f = F_R V = \frac{C_x}{2}\rho A_t V^3, \qquad (6.14.2)$$

$$P_f = P_1 + P_2 + 2P_a, \qquad (6.14.3)$$

unde P_i, $i = 1, 2$, reprezintă puterea rezultată în mișcarea barelor cilindrice verticale și P_a puterea rezultată în mișcarea cornierelor.

Se obține: $P_1 = \frac{C_{x1}}{2}\rho dl(\omega r_1)^3$;

$$P_2 = \frac{C_{x2}}{2}\rho dl(\omega r_2)^3; \qquad (6.14.4)$$

$$P_a = \int_{r_1}^{r_2} \frac{C_x}{2}\rho a\omega^3 x^3 dx.$$

Coeficienții de rezistență la înaintare se determină din anexa A5, în funcție de numărul **Re**.

$$\mathbf{Re}_1 = \frac{V_1 \cdot d}{\nu} = \frac{0{,}25 \cdot 15{,}7 \cdot 0{,}03}{30 \cdot 10^{-6}} = 3\,925, \quad C_{x1} = 0{,}9;$$

$$\mathbf{Re}_2 = \frac{V_2 d}{\nu} = \frac{0{,}45 \cdot 15{,}7 \cdot 0{,}03}{30 \cdot 10^{-6}} = 7\,065, \quad C_{x2} = 1;$$

$$\mathbf{Re}^a_{min} = \frac{V_1 a}{\nu} = \frac{0{,}25 \cdot 15{,}7 \cdot 0{,}025}{30 \cdot 10^{-6}} = 3\,270, \quad C_{xa} = 1{,}16;$$

unde s-a folosit $\omega = 2\pi n/60 = 15{,}7$ rad/s.

(Pentru citirea coeficienților C_x se folosesc curbele „cilindru infinit" și „placă rectangulară").

Rezultă: $P_1 + P_2 = \frac{950}{2} \cdot 0{,}031 \cdot 1 \cdot 15{,}7^3(0{,}9 \cdot 0{,}25^3 + 1 \cdot 0{,}45^3) = 5{,}8$ kW;

$$P_a = 2\frac{C_x}{2}\rho a\omega^3 \frac{(r_2^4 - r_1^4)}{4} = 2 \cdot \frac{1{,}16}{2} \cdot 950 \cdot 0{,}025 \cdot 15{,}7^3 \cdot \frac{(0{,}45^4 - 0{,}25^4)}{4} = 0{,}98 \text{ kW}.$$

Deci $P_f = 5{,}8 + 1{,}97 = 6{,}78$ kW.

Observație. În calcule s-a considerat că fluidul nu are o mișcare proprie de rotație.

Problema 6.15. Să se calculeze forța de rezistență care acționează asupra unei particule sferice antrenată de un curent de aer orizontal (fig. 6.15), știind că viteza particulei este cu 20% mai mare decît cea a curentului. Se cu-

Scanned with OKEN Scanner

nosc : viteza curentului de aer $V = 30$ m/s, diametrul particulei $d = 250\ \mu$m, densitatea aerului $\rho = 1{,}22$ kg/m^3, viscozitatea cinematică a aerului $\nu = 14{,}8 \cdot 10^{-6}$ m^2/s.

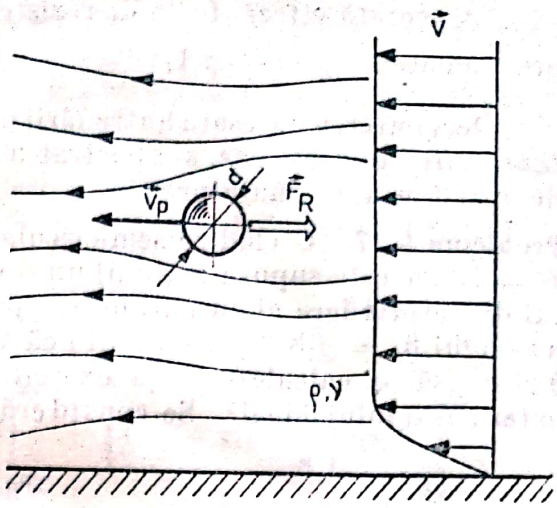


Fig. 6.15.

Rezolvare : Rezistența la înaintare se calculează cu formula (6.13.4)

$$F_R = \frac{C_x}{2} \rho A_t V_r^2,$$

unde V_r reprezintă viteza relativă dintre corp și curentul uniform de aer

$$V_r = V(1{,}2 - 1{,}0) = 6 \text{ m/s}.$$

Coeficientul C_x se determină din anexa A5, în funcție de numărul **Re** caracteristic. Se obține

$$\mathbf{Re} = \frac{V_r d}{\nu} = \frac{0{,}2Vd}{\nu} = \frac{0{,}2 \cdot 30 \cdot 250 \cdot 10^{-6}}{14{,}8 \cdot 10^{-6}} = 100,$$

pentru care

$$C_x = 0{,}6.$$

Rezultă

$$F_R = \frac{0{,}6}{2} \cdot 1{,}22 \frac{\pi 250^2}{4} \cdot 10^{-12} \cdot 6^2 \cong 0{,}6\ \mu\text{N}.$$

Problema 6.16. O navă hidrologică cu masa $m = 2\,000$ kg este susținută de o aripă cu profil hidrodinamic ca în figura 6.16. Să se calculeze viteza de deplasare la care nava este propulsată cu corpuri în întregime ieșit din apă și puterea necesară menținerii acestei viteze. Se cunosc aria transversală a aripii $A_t = 2$ m^2, coeficienții de rezistență la înaintare $C_r = 0{,}02$ și de portanță $C_p = 0{,}8$, densitatea apei $\rho = 1\,030$ kg/m^3 (apa se consideră în repaus și se neglijează frecările cu aerul).

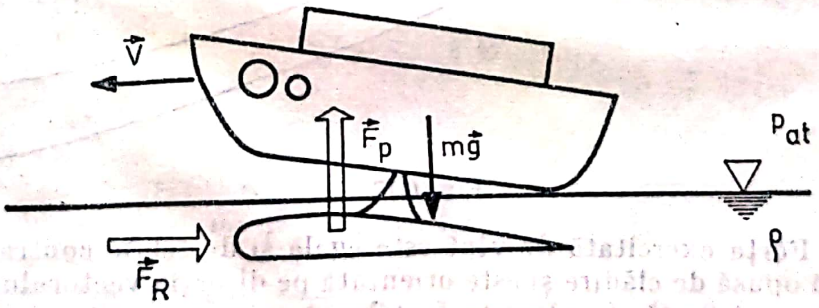


Fig. 6.16.

Rezolvare : Forța de greutate a navei este echilibrată de forța portantă $\vec{F}_p$ dată de formula (6.13.5)

$$mg = F_p; \quad mg = \frac{C_p}{2} \rho A_t V^2.$$

Se obține

$$V = \sqrt{\frac{2mg}{C_p \rho A_t}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2\,000 \cdot 9{,}81}{0{,}8 \cdot 1\,030 \cdot 2}} = 4{,}8 \text{ m/s}.$$

La această viteză, forța de rezistență la înaintare F_r, din formula (6.13.4), are valoarea $F_R = \frac{C_r}{2} \rho A_t V^2 = \frac{0{,}02}{2} \cdot 1\,030 \cdot 2 \cdot 4{,}8^2 = 475$ N.

Deci puterea necesară antrenării navei este $P = F_R V = 475 \cdot 4{,}8 = 2{,}3$ kW.

Observație. În acest caz, s-a păstrat notația C_r în loc de C_x pentru coeficientul de rezistență la înaintare.

Problema 6.17. O clădire semicirculară cu diametrul $D = 10$ m și înălțimea $H = 10$ m este supusă acțiunii unui vînt cu viteza $U = 40$ m/s. Dacă punctul de desprindere al curentului de aer de pe contur (fig. 6.17) se situează la un unghi $\theta_s = \pm 80°$ și se admite că valoarea presiunii este constantă pentru $\theta > \theta_s$, să se calculeze forța exercitată de vînt asupra clădirii. Se admite poteza fluidului ideal*. Se consideră $\rho_{aer} = 1{,}25$ kg/m³.

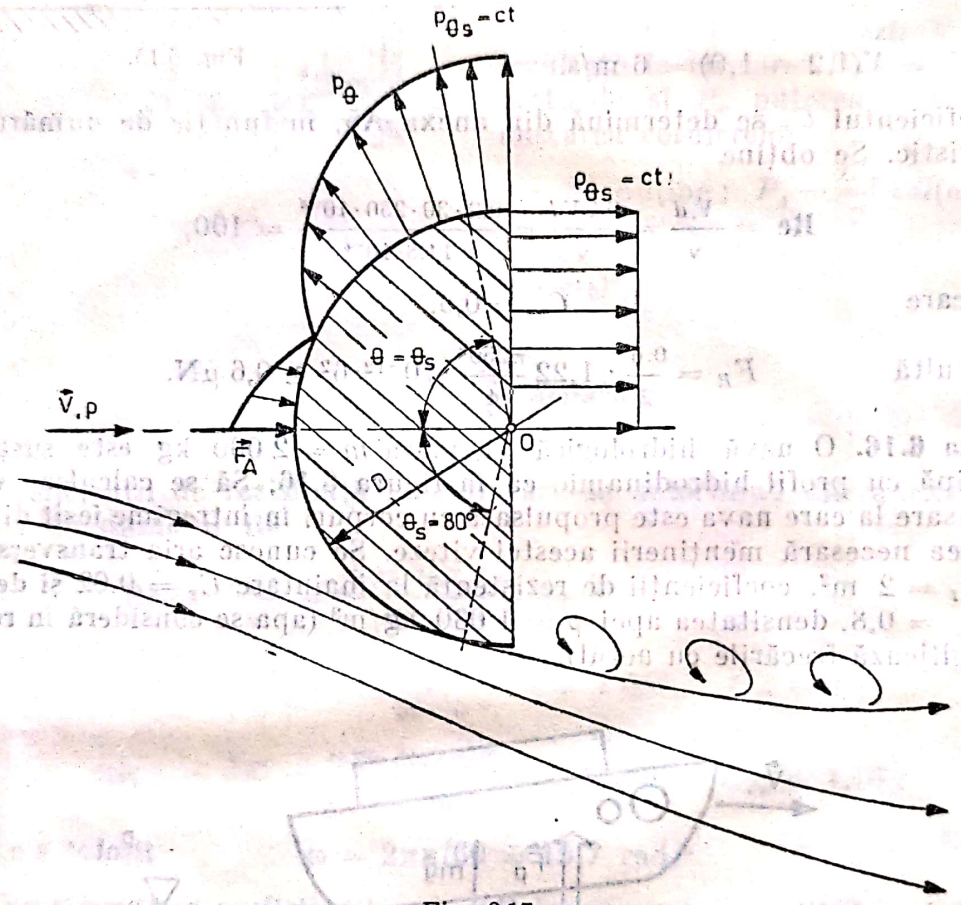


Fig. 6.17.

Rezolvare : Forța exercitată de vînt este egală și de semn contrar cu forța de rezistență opusă de clădire și este orientată pe direcția vectorului viteză U.

Forța de rezistență, în absența forțelor de viscozitate (neglijabile), este rezultatul integrării distribuției forțelor de presiune elementare pe suprafața conturului, proiectate pe direcția curentului la infinit

$$F_A = -F_R = 2 \int_0^{\pi} \frac{\rho U^2}{2} (1 - 4 \sin^2\theta) \cos\theta R H d\theta. \qquad (6.17.1)$$

* Din teoria mișcărilor potențiale plane se cunoaște distribuția presiunii pe contur $p = p_\theta - p_\infty = \rho \frac{U^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta)$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama că de la $\pm\theta_s$ la $\pm\frac{\pi}{2}$ presiunea are o valoare constantă, iar de la $\pm\frac{\pi}{2}$ la π ne găsim pe suprafață plană (aval) a semicilindrului, din (6.17.1) se scrie

$$F_R = \rho\frac{U^2}{2}2RH\left[\int_0^{\theta_s}(1-4\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta + \int_{\theta_s}^{\pi/2}(1-4\sin^2\theta_s)\cos\theta d\theta + \right.$$

$$\left. + (1-4)\sin^2\theta_s)\right] =$$

$$= 1{,}25\cdot\frac{40^2}{2}\cdot 2\cdot 5\cdot 10\left[\left(\sin\theta - \frac{4}{3}\sin^3\theta\right)\Bigg|_0^{4\pi/9} + \left(1-4\sin^2\frac{4\pi}{9}\right)\sin\theta\Bigg|_{4\pi/9}^{\pi/2} + \right.$$

$$\left. + \left(1-4\sin^2\frac{4\pi}{9}\right)\right] \cong 321{,}16 \text{ kN}.$$

Se definește coeficientul de rezistență al clădirii,

$$C_r = \frac{F_A}{\rho\frac{U^2}{2}D\cdot H} = \frac{321\,160\cdot 2}{1{,}25\cdot 40^2\cdot 10\cdot 10} \cong 3{,}21.$$

Problema 6.18. O navă cu rotor Flettner are un rotor cu diametrul de 2 m și o înălțime de 5 m și se deplasează cu o viteză $U = 6$ m/s în direcția forței rezultante pe cilindru (fig. 6.18, *a*). Coeficientul de rezistență C_r al navei calculat pe aria udată $A = 100$ m² este $C_r = 3{,}5\cdot 10^{-3}$, iar forța de rezistență la înaintare opusă rotorului este egală cu jumătate din forța de portanță. Viteza absolută a vîntului este $W = 12$ m/s. Să se determine viteza de rotație necesară rotorului pentru deplasarea navei cu viteza U.

Se cunosc : $\rho_{apă} = 1\,000$ kg/m³ ; $\rho_{aer} = 1{,}22$ kg/m³.

Rezolvare : Forța portantă a cilindrului aflat în curentul cu viteza W, cu circulație în jurul său (efectul Magnus), este dată de rezultatul teoremei Kutta-Jukovski :

$$F_p = \rho_{aer}\Gamma W, \qquad (6.18.1)$$

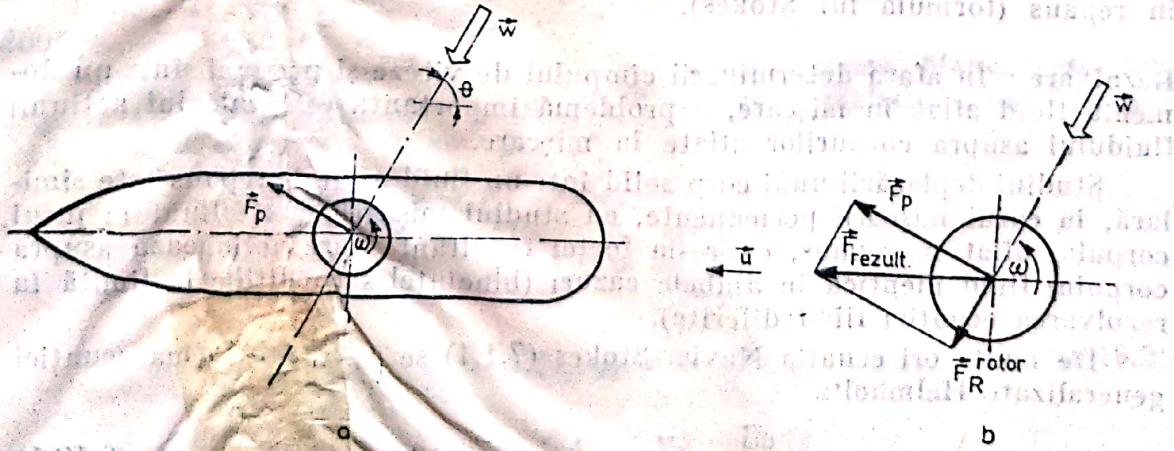


Fig. 6.18.

unde Γ este circulația în jurul profilului, iar W este viteza curentului de translație a fluidului (vîntul).

Circulația Γ este rezultatul rotirii cilindrului cu viteza unghiulară ω. Mișcarea generată este hidrodinamic similară cu mișcarea potențială a vîrtejului liber pentru care viteza punctuală pe liniile de curent, constituite de cercuri concentrice, este invers proporțională cu raza r

$$vr = \text{constant}. \tag{6.18.2}$$

Ca urmare, circulația vitezei pe conturul circular de rază r_0 este

$$\Gamma = 2\pi r_0 v = 2\pi r_0 \omega r_0 = \frac{\pi}{2}\omega d_0^2. \tag{6.18.3}$$

Rezultă forța portantă $F_p = \rho_{aer}\frac{\pi}{2}\omega d_0^2 W = 92\cdot\omega$.

Din diagrama forțelor (vezi fig. 6.18, *b*), se calculează forța de propulsie rezultantă

$$F_{prop} = \sqrt{F_p^2 + \left(\frac{F_p}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}F_p.$$

Dacă deplasarea navei se face cu viteză constantă, forța de propulsie este egală cu forța de rezistență opusă navei la înaintarea în apă

$$F_{prop} = F_R^{navă} = C_r^{navă} A\ \rho_{apă}\ U^2/2 = 3{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 100\cdot 1\,000\cdot 36/2 = 6\,300\ \text{N}.$$

Rezultă viteza unghiulară a cilindrului, necesară pentru deplasarea navei cu viteza U

$$\omega = \frac{2\cdot 6\,300}{92\sqrt{5}} = 61{,}25\ \text{rad}.$$

și viteza de rotație $$n = \frac{\omega 60}{2\pi} = 585\ \text{rot/min}.$$

Problema 6.19. Să se determine expresia forței de rezistență la înaintare care acționează asupra unei sfere de rază $r = R$ care se deplasează lent și uniform cu viteza $\vec{V}_0$ într-un fluid infinit, cu viscozitatea dinamică η, aflat în repaus (formula lui Stokes).

Rezolvare : În afara determinării cîmpului de viteze și presiunii într-un domeniu fluid aflat în mișcare, o problemă importantă este calculul acțiunii fluidului asupra corpurilor aflate în mișcare.

Studiul deplasării unui corp solid într-un fluid aflat în repaus este similară, în cazul mișcării permanente, cu studiul mișcării unui fluid în jurul corpului aflat în repaus, expresia forței rezultante care acționează asupra corpului fiind identică în ambele cazuri (bineînțeles condițiile la limită în rezolvarea ecuației fiind diferite).

De multe ori ecuația Navier-Stokes (7.1.1) se pune sub forma ecuației generalizate Helmholtz

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} - (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v} - \nu\Delta\vec{\omega} = 0, \tag{6.19.1}$$

Scanned with OKEN Scanner

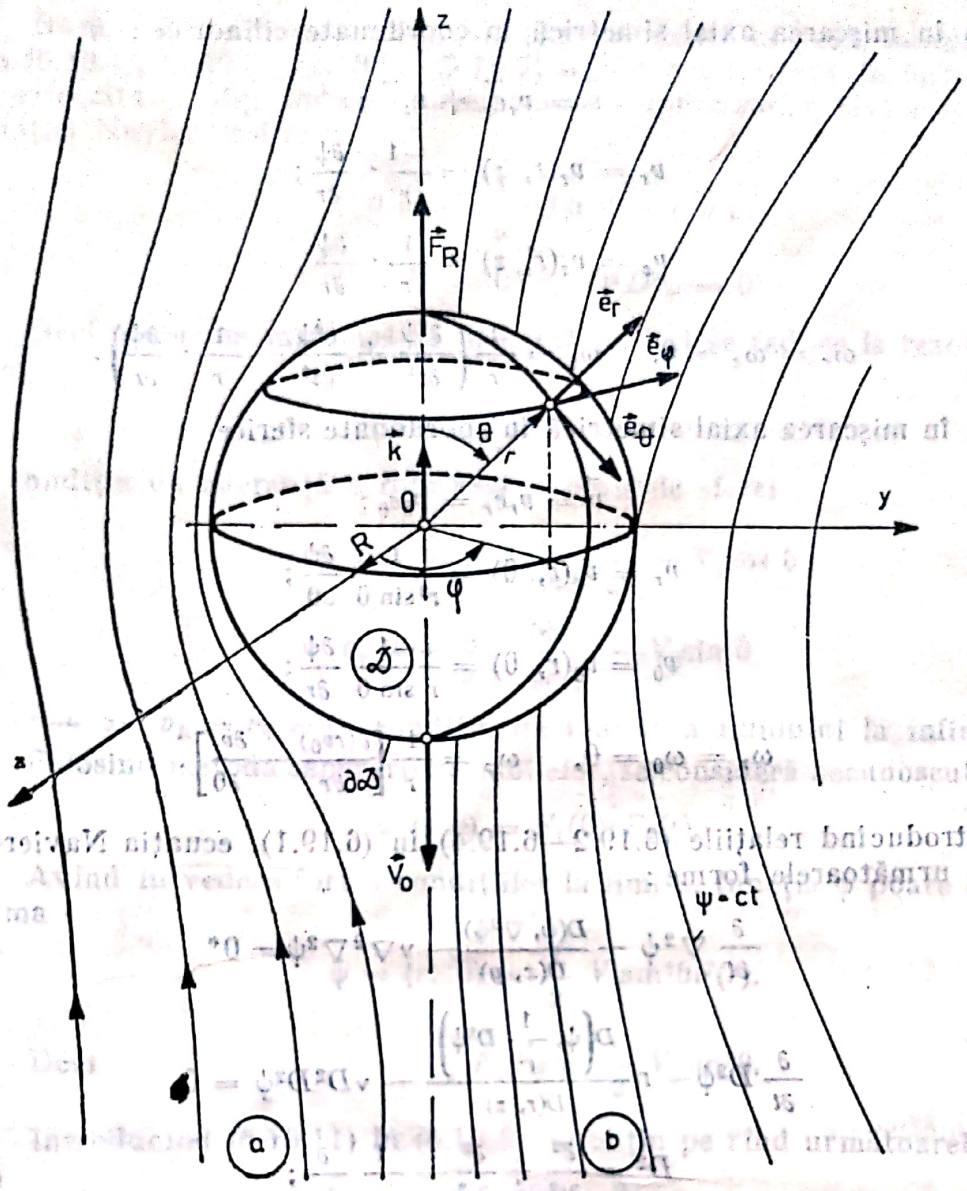


Fig. 6.19.

unde $\vec{\omega}$ reprezintă vectorul vîrtej definit de (7.1.15).

În unele cazuri practice, mişcarea fluidului se poate reduce numai la două componente spaţiale ale vitezei.

În acest caz, mişcarea poartă denumirea de mişcare plană, respectiv mişcare axial simetrică, rezolvarea ecuaţiei (6.19.1) realizîndu-se, prin introducerea funcţiei de curent ψ, cu relaţiile:

1) în mişcarea plană $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$

$$v_x = v_x(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad v_y = v_y(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \tag{6.19.2}$$

$$\omega_x = \omega_y = 0, \qquad \omega_z = -\nabla^2\psi$$

2) în mișcarea axial simetrică în coordonate cilindrice :

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_z\vec{e}_z ;$$

$$v_r = v_r(r, z) = \frac{-1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} ; \qquad (6.19.3)$$

$$v_z = v_z(r, z) = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} ,$$

$$\omega_r = \omega_z = 0, \quad \omega_\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}\right).$$

3) în mișcarea axial simetrică în coordonate sferice

$$\vec{v} = v_r\vec{e}_r = v_0\vec{e}_\theta ;$$

$$v_r = v_r(r, \theta) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} ;$$

$$v_\theta = v_\theta(r, \theta) = \frac{-1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} ; \qquad (6.19.4)$$

$$\omega_r = \omega_\theta = 0, \quad \omega_\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right].$$

Introducînd relațiile (6.19.2—6.19.4) în (6.19.1), ecuația Navier-Stokes capătă următoarele forme :

1) $$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi - \frac{D(\psi, \nabla^2\psi)}{D(x, y)} - \nu\nabla^2\nabla^2\psi = 0^* \qquad (6.19.5)$$

2) $$\frac{\partial}{\partial t}D^2\psi - r\frac{D\left(\psi, \frac{1}{r^2}D^2\psi\right)}{D(r, z)} - \nu D^2D^2\psi = 0,$$

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} ; \qquad (6.19.6)$$

3) $$\frac{\partial}{\partial t}D^2\psi - \sin^2\theta\,\frac{D\left(\psi, \frac{1}{r^2\sin^2\theta}D^2\psi\right)}{D(r, \cos\theta)} - \nu D^2D^2\psi = 0,$$

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{-1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \qquad (6.19.7)$$

unde $\frac{D(\psi, \bullet)}{D(\bullet, \bullet)}$ reprezintă determinantul funcțional caracteristic.

De remarcat că, prin introducerea funcției de curent ψ, ecuația vectorială (6.19.1) s-a redus la o ecuație scalară, crescînd însă de două ori ordinul de derivare al necunoscutei. Folosind funcția de curent, ecuația de continuitate este verificată identic, iar presiunea este o funcție armonică, $\nabla^2 p = 0$, care se reduce prin introducerea vectorului vîrtej.

* În cazul mișcării permanente, o rezolvare numerică prin metoda diferențelor finite s-a dat în lucrarea : D. Dumitrescu și M. Cazacu. Theoretische und experimentelle Betrachtungen uber die Strömung zäher Flüssigkeiten um eine Platte bei kleinen und mittleren Reynoldszahlen. ZAMM, 1970.

Dacă corpul are o mișcare lentă și permanentă în fluid, termenii inerțiali din (6.19.1), (6.19.5), (6.19.6), (6.19.7) se pot neglija față de forțele specifice de viscozitate, obținîndu-se forma numită *aproximația Stokes* a ecuației de ecuației Navier-Stokes

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v}\,; \tag{6.19.8}$$

$$\nabla^2\nabla^2\psi = 0^*\,; \quad D^2D^2\psi = 0.$$

Deci problema matematică în cazul studiat se reduce la rezolvarea ecuației

$$D^2D^2\psi = 0,$$

cu condiția de aderență a fluidului la peretele sferei

$$r = R, \quad v_R = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = V_0\cos\theta\,; \tag{6.19.9}$$

$$v_\theta = \frac{-1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} = -V_0\sin\theta$$

$r \to \infty$, $v_R = v_\theta = 0$, condiția de reapus a fluidului la infinit.

Folosind metoda separării variabilelor, se consideră necunoscuta de forma

$$\psi(r, \theta) = F_1(\theta)\cdot F_2(r). \tag{6.19.10}$$

Avînd în vedere forma condițiilor la limită, funcția ψ poate fi pusă sub forma

$$\psi = (r, \theta) = \frac{1}{2}V_0\sin^2\theta F(r). \tag{6.19.11}$$

Deci $$F_1(\theta) = \frac{1}{2}V_0\sin^2\theta.$$

Introducînd (6.19.11) în (6.19.8), se obțin pe rînd următoarele expresii:

$$f(r) = F'' - \frac{2}{r^2}F\,; \tag{6.19.12}$$

$$D^2D^2\psi = f'' - \frac{2}{r^2}f = 0, \tag{6.19.13}$$

unde s-a ținut seama de (6.19.7).

Astfel ecuația cu derivate parțiale (6.19.8) s-a transformat într-o ecuație diferențială ordinară. Ecuația (6.19.13) este o ecuație liniară omogenă de ordinul doi cu soluția generală

$$f = C_1f_1 + C_2f_2, \tag{6.19.14}$$

unde f_1 și f_2 sînt două soluții particulare.

Rezultă

$$f = C_1r^2 + \frac{C_2}{r} \tag{6.19.15}$$

---

* O soluție analitică a ecuației este dată în lucrarea: D. Ionescu. Metoda funcțiilor analitice în hidrodinamica lichidelor viscoase. St. cerc. mec. apl., Acad. P.R.R., 1963, 14/1.

Introducînd (6.19.15) în (6.19.12), se obţine

$$F'' - \frac{2}{r^2} F = C_1 r^2 + \frac{C_2}{r}, \tag{6.19.16}$$

o ecuaţie liniară neomogenă de ordinul doi. Soluţia generală a ecuaţiei (6.19.17) este egală cu suma dintre soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale omogene corespunzătoare şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene care se obţine prin metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange.

Se obţine

$$F = \frac{C_3}{10} r^4 - \frac{C_4}{2} r + C_1 r^2 + \frac{C_2}{r}. \tag{6.19.17}$$

Pentru determinarea constantelor, se introduce (6.19.17) în (6.19.11) şi se pun condiţiile la limită (6.19.9). În final, rezultă expresia funcţiei de curent şi a vitezelor :

$$\psi = V_0 \left(\frac{R^3}{4r} - \frac{3}{4} Rr \right) \sin^2\theta ; \tag{6.19.18}$$

$$v_r = V_0 \left(\frac{3}{2} \frac{R}{r} - \frac{R^3}{2r^3} \right) \cos\theta ;$$

$$v_\theta = -V_0 \left(\frac{3}{4} \frac{R}{r} + \frac{R^3}{4r^3} \right) \sin\theta. \tag{6.19.19}$$

Spectrul curgerii este trasat în figura 6.19, *b*.

Dacă se consideră problema curgerii lente a unui fluid vîscos în jurul unei sfere imobile, problema se rezolvă similar, condiţiile la limită fiind următoarele :

$$r = R ; \quad v_r = v_\theta = 0 ; \tag{6.19.20}$$

$$r \to \infty \quad v_r = V_0 \cos\theta, \quad v_\theta = -V_0 \sin\theta.$$

Se obţin următoarele expresii pentru funcţia de curent şi distribuţia de viteze :

$$\psi(r, \theta) = V_0 \left(\frac{R^3}{4r} - \frac{3}{4} Rr + r^2 \right) \sin^2\theta ;$$

$$v_r = V_0 \left(\frac{R^3}{2r^3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{r} + 1 \right) \cos\theta ; \tag{6.19.21}$$

$$v_\theta = V_0 \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{R}{r} + \frac{R^3}{4r^3} - 1 \right) \sin\theta.$$

Spectrul curgerii este trasat în figura 6.19, *a*.

Expresia forţei de rezistenţă la înaintare se obţine prin integrarea forţelor elementare care acţionează pe suprafaţa sferei.

Presiunea se determină din ecuaţiile Navier-Stokes în coordonate sferice (6.19.22) în aproximaţia Stokes pentru curgere axial simetrică în absenţa forţelor masice (care se neglijează faţă de forţele de presiune şi de viscozitate)

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} +$$

$$+ \nu \left(\nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right);$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta}{r} = f_\theta - \frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} +$$

$$+ \nu\left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right); \qquad (6.19.22)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi \operatorname{ctg}\theta}{r} = f_\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi} +$$

$$+ \nu\left(\Delta^2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\right);$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r} = 0,$$

unde s-a notat $\nabla^2 = \Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) +$

$$+ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Dacă se transformă (6.19.21) în coordonate carteziene: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ şi se introduce în (6.19.22). Se obţine*

$$u = -\frac{3}{4}V_0\frac{R}{r^3}\cdot xz\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right) \qquad (6.19.23)$$

$$v = -\frac{3}{4}V_0\frac{R}{r^3}\cdot yz\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$w = V_0\left[1-\frac{3}{4}\frac{Rz^2}{r^3}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)-\frac{1}{4}\frac{R}{r}\left(3+\frac{R^2}{r^3}\right)\right]$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{3\eta R V_0}{r^2}\cos\theta \qquad (6.19.24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{3\eta R V_0}{2r^2}\sin\theta.$$

Distribuţia de presiune fiind dată de relaţia

$$p = p_\infty - \frac{3\eta R V_0}{2r^2}\cos\theta, \qquad (6.19.25)$$

unde p_∞ este presiunea constantă de la infinit.

Forţa de rezistenţă la înaintare F_R se calculează cu relaţia

$$\vec{F} = \int_{\partial\mathcal{D}} \vec{T}\cdot\vec{n}\,dA\,;\; F_R = \vec{k}\cdot\vec{F}\,;\; \vec{V} = -V_0\vec{k}, \qquad (6.19.26)$$

unde tensorul tensiunilor are expresia (7.1.2).

Eforturile au următoarele expresii în coordonate carteziene

$$T_{33} = -p_\infty + \frac{3}{2}\frac{\eta R^3 V_0 z}{r^5}\left[3+\frac{z^2}{R^2}\left(3-5\frac{R^2}{r^2}\right)\right];$$

$$T_{13} = \frac{3}{2}\frac{\eta R^3 V_0 x}{r^5}\left(1+\frac{3z^2}{R^2}-\frac{5z^2}{r^2}\right). \qquad (6.19.27)$$

* W. E. Langlois. Slow Viscous flow. The Macmillan Company, New York, 1964.

Se consideră un punct aflat la intersecția sferei cu planul $y = 0$. În acest punct, (6.19.27) devine :

$$T_{33} = -p_\infty + \frac{3}{2}\frac{\eta V_0}{R}(3 - 2\cos^2\theta)\cos\theta;$$
$$T_{13} = \frac{3}{2}\frac{\eta V_0}{R}(1 - 2\cos^2\theta)\sin\theta, \tag{6.19.28}$$

cu $x = R\sin\theta$, $y = 0$, $z = R\cos\theta$.

Normala la suprafața sferei în acest punct are componentele :

$$n_x = \sin\theta; \quad n_y = 0; \quad n_z = \cos\theta. \tag{6.19.29}$$

Ținînd seama de axele de simetrie și de relațiile (6.19.28), (6.19.29), expresia (6.19.26) se reduce la

$$F_R = \int_{\partial\mathcal{D}} (T_{13}\sin\theta + T_{33}\cos\theta)\mathrm{d}A = \int\left(-p_\infty\cos\theta + \frac{3\eta V_0}{2R}\right)\mathrm{d}A,$$

$$F_R = \frac{3\eta V_0}{2R}\int_{\partial\mathcal{D}}\mathrm{d}A = \frac{3\eta V_0}{2R}4\pi R^2. \tag{6.19.30}$$

Deci forța de rezistență care acționează sferei este orientată în direcție contrară vitezei $\vec{V}_0$ și are expresia

$$F_R = 6\pi\eta R V_0. \tag{6.19.31}$$

La această formulă se poate ajunge și pe altă cale, plecînd de la expresia funcției de disipație

$$\Phi = \frac{9\eta}{4}\left(\frac{RV_0}{r^2}\right)^2\left[3\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^2\cos^2\theta + \left(\frac{R^2}{r^2}\right)^2\sin^2\theta\right]. \tag{6.19.32}$$

Puterea disipată $\int_{\mathcal{D}}\Phi\mathrm{d}\mathcal{V}$ este egală cu produsul dintre forța de rezistență și viteză. Se obține

$$F_R\cdot V_0 = \int_{\mathcal{D}}\Phi\mathrm{d}\mathcal{V} = \frac{9\eta R^2V_0^2}{4}\int_R^\infty\frac{1}{r^4}\int_0^\pi\left[3\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)^2\cos^2\theta + \left(\frac{R^2}{r^2}\right)^2\sin^2\theta\right]\cdot 2\pi r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = 6\pi\eta R V_0^2. \tag{6.19.33}$$

Dacă se egalează (6.19.31), cu formula rezistenței la înaintare dată de Newton (6.13.4), se obține coeficientul de rezistență la înaintare al sferei la C_x

$$6\pi\eta R V_0 = \frac{C_x}{2}\rho\pi R^2V_0^2, \tag{6.19.34}$$

$$C_x = \frac{12\eta}{\rho R V_0} = \frac{24}{\mathrm{Re}},$$

$$C_x = \frac{24}{\mathrm{Re}}, \quad \mathrm{Re} = \frac{V_0\cdot 2R}{\nu}. \tag{6.19.35}$$

Relaţiile (6.19.31) şi (6.19.35) sînt valabile numai pentru mişcări laminare lente $\mathbf{Re} < 1$. Rezultatele mai apropiate de datele experimentale pentru $\mathbf{Re} < 1{,}5$ se obţin folosind expresia dată de Oseen

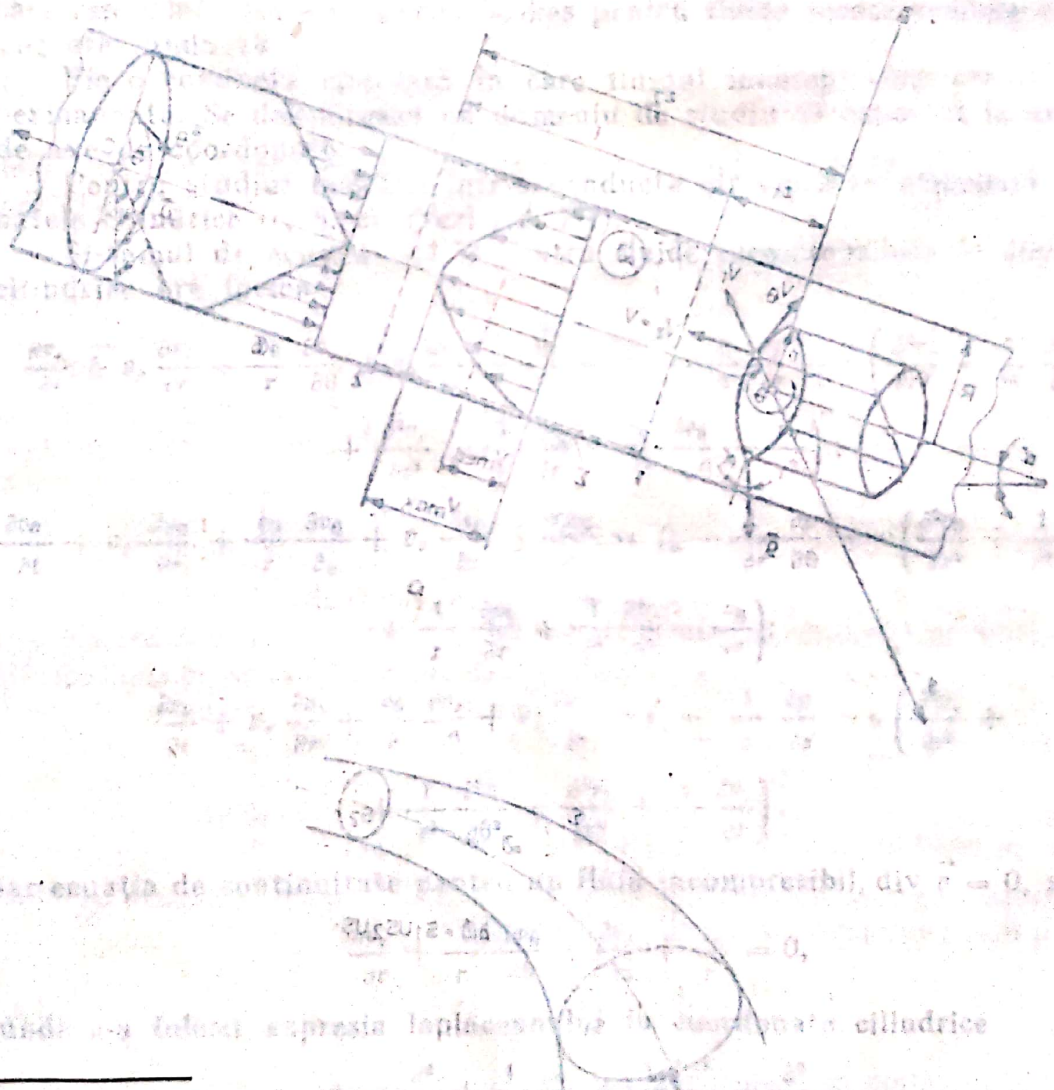
$$F_R \cong 6\pi\eta R V_0\left(1+\frac{3}{16}\mathbf{Re}\right), \text{ cu } C_x^* = \frac{25}{\mathbf{Re}}\left(1+\frac{3\mathbf{Re}}{16}-\frac{19\,\mathbf{Re}^2}{1\,280}+\frac{71\,\mathbf{Re}^3}{20\,480}+\ldots\right). \tag{6.19.36}$$

Tot pentru mişcări foarte lente, $\mathbf{Re} < 1$, s-a obţinut coeficientul de rezistenţă la înaintare pentru un cilindru infinit

$$C_x^{**} = \frac{8\pi}{\mathbf{Re}\left[1-2\ln\left(\frac{1}{8}\gamma\mathbf{Re}\right)\right]}, \tag{6.19.37}$$

unde $\gamma = 1{,}7811$.

În general, coeficientul de rezistenţă la înaintare este funcţie de numărul **Re** şi de forma corpului. În Anexa A5 se prezintă variaţia lui C_x în funcţie de numărul **Re** pentru diferite corpuri.



* G. Birkhoff and E. H. Zarantonello. Jets, wakes and cavities. Academic Press Inc., New York, 1957, pag. 267.

** T. Oroveanu. Mecanica fluidelor viscoase. Bucureşti, Editura Academiei R.S.R., 1967.

7

MIŞCĂRI LAMINARE ÎN INSTALAŢII INDUSTRIALE

Problema 7.1. Să se determine distribuţia de viteze în mişcarea laminară şi permanentă a unui lichid incompresibil într-o conductă circulară şi să se calculeze energia disipată şi căderea de presiune pe unitatea de lungime a conductei (mişcarea Hagen-Poiseuille).

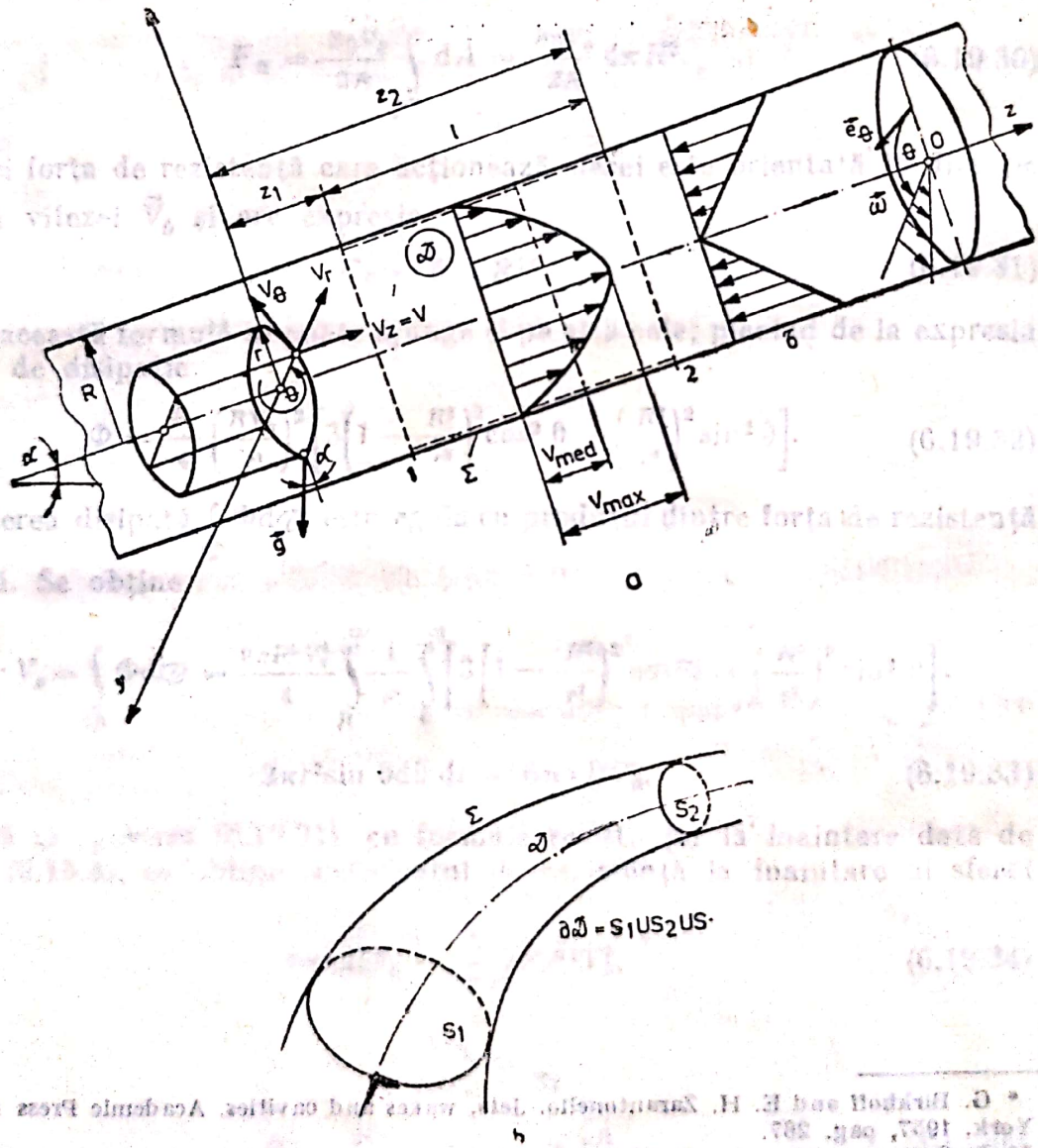


Fig. 7.1.

Rezolvare: Ecuaţia de mişcare a unui mediu continuu are expresia dată de Cauchy

$$\vec{a} = \vec{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{\vec{T}}^{*}, \tag{7.1.1}$$

unde $\vec{a}$ reprezintă cîmpul acceleraţiei în domeniul studiat; $\vec{f}$ — forţa masică unitară; ρ — densitatea fluidului; $\vec{\vec{T}}$ — tensorul tensiunilor.

În cazul în care relaţia constitutivă este $\vec{\vec{T}} = -p\vec{\vec{I}} + 2\eta\vec{\vec{D}}$ (7.1.2)

cu p — presiunea; η — viscozitatea dinamică a fluidului; $\vec{\vec{D}}$ — tensorul vitezelor de deformaţie, $\vec{\vec{I}}$ — tensorul unitate, ecuaţia (7.1.1) devine

$$\vec{a} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{v}, \tag{7.1.3}$$

care reprezintă ecuaţia Navier-Stokes pentru fluide incompresibile aflate în mişcare laminară.

Fie o conductă circulară în care fluidul incompresibil are o mişcare permanentă. Se delimitează un domeniu de studiu $\mathcal{D}$ raportat la un sistem de axe de coordonate.

Pentru studiul mişcării într-o conductă circulară se utilizează coordonatele cilindrice (r, θ, z), (vezi fig. 7.1).

Sistemul de ecuaţii (7.1.3) pentru fluide incompresibile în coordonate cilindrice are forma

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = f_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right);$$
$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} = f_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right); \tag{7.1.4}$$
$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right),$$

iar ecuaţia de continuitate pentru un fluid incompresibil, $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, se scrie

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0, \tag{7.1.5}$$

unde s-a folosit expresia laplaceanului în coordonate cilindrice

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{7.1.6}$$

* Caius Iacob. Mecanica teoretică. Bucureşti, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1980.

În ipotezele făcute (fluid incompresibil în mișcare permanentă), tuburile de curent sînt cilindri concentrici cu frontieră solidă ($v_r = v_\theta = 0$, $v_z = v$), deci sistemul de ecuații (7.1.4) se reduce la

$$0 = \rho f_r - \frac{\partial p}{\partial r};$$

$$0 = \rho f_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}; \qquad (7.1.7)$$

$$0 = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

Se scrie expresia forței masice în funcție de unghiul de înclinare al conductei față de orizontală : $f_r = -g\cos\alpha\cos\theta$, $f_\theta = g\cos\alpha\sin\theta$, $f_z = g\sin\alpha$.

Din (7.1.7), rezultă distribuția de presiuni

$$p = -\rho g r\cos\alpha\cos\theta + \varphi(z). \qquad (7.1.8)$$

Deci pe direcția $x = r\cos\theta$, presiunea are o distribuție hidrostatică. Rezultă

$$\eta\left(\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\right) = \frac{-\Delta p}{l} - \rho g\sin\alpha, \qquad (7.1.9)$$

unde s-a ținut seama că funcția $\partial p/\partial z$ este o constantă, deoarece toți termenii din ecuația (7.1.9) sînt independenți de z, $\partial p/\partial z = -\Delta p/l$, $\Delta p = p_1 - p_2$, $l = z_2 - z_1$.

Ecuația (7.1.9) se integrează de două ori și se obține

$$\frac{1}{r}d\left(r\frac{dv}{dr}\right) = \frac{-\Delta p}{\eta l} = \frac{\rho g}{\eta}\sin\alpha;$$

$$r\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta l}r^2 - \frac{r^2}{2\eta}\rho g\sin\alpha + C_1;$$

$$v = \frac{1}{\eta}\left(-\frac{\Delta p}{4l}r^2 - \frac{r^2}{4}\rho g\sin\alpha + C_1\ln r + C_2\right).$$

Constantele C_1 și C_2 se determină punînd condițiile :

1) aderența fluidului la suprafața solidă ;

2) condiția fizică ca viteza să aibă o valoare finită în axul conductei ;

$$r = R, \quad v = 0 \quad C_2 = \left(\frac{\Delta p}{4\eta l} + \frac{\rho g\sin\alpha}{4}\right)R^2;$$

$$r = 0, \quad v = \text{valoarea finită}, \quad C_1 = 0.$$

Rezultă expresia distribuției de viteză într-o mișcare laminară și permentă într-o conductă circulară de rază R.

$$v = \frac{1}{4\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g\sin\alpha\right)(R^2 - r^2). \qquad (7.1.10)$$

Viteza maximă se găsește în axa conductei, pentru $r = 0$

$$v_{max} = \frac{R^2}{4\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g\sin\alpha\right). \qquad (7.1.11)$$

Scanned with OKEN Scanner

Debitul transportat se obține prin integrarea distribuției de viteză pe aria conductei

$$Q = \int_0^R v 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin\alpha\right), \tag{7.1.12}$$

iar viteza medie are expresia $V = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin\alpha\right)$. (7.1.13)

Tensiunea tangențială de frecare vîscoasă are o variație liniară cu raza r, avînd valoarea maximă la perete

$$\tau = \eta \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin\alpha\right) r, \tag{7.1.14}$$

valabilă pentru unghiuri α mici.

Vectorul vîrtej definit de $\vec{\omega} = 1/2 \text{ rot } \vec{v}$ se calculează cu relația

$$\omega = \frac{1}{2r}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & v \end{vmatrix} = \frac{1}{4\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin\alpha\right) r\vec{e}_\theta. \tag{7.1.15}$$

Deci vîrtejul este nul în axa conductei și maxim la perete, distribuția fiind liniară cu raza.

Pentru studiul energetic al mișcării fluidului în conductă, se utilizează teoremele energiei cinetice și a energiei totale a fluidului în mișcare*.

Teorema energiei cinetice arată că într-un fluid vîscos incompresibil, aflat în mișcare laminară, derivata în raport cu timpul a energiei cinetice a unui volum material este egală cu suma puterilor dezvoltate de forțele aplicate volumului material și a unui termen negativ, care reprezintă interacțiunea dintre eforturile unitare și vitezele de deformare în interiorul volumului material

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{v})^2 d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \vec{f}\vec{v}\, d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{D}(t)} (\vec{\vec{T}}\cdot\vec{v})\vec{n}\, dA - \int_{\mathcal{D}(t)} \Phi d\mathcal{V}, \tag{7.1.16}$$

unde Φ poartă denumirea de *funcția de disipație* și reprezintă puterea dezvoltată de forțele de viscozitate pe unitatea de volum.

În conformitate cu primul principiu al termodinamicii, derivata în raport cu timpul a energiei totale a volumului material din domeniul $\mathcal{D}$ în momentul t, egală cu suma energiei interne și a energiei cinetice a volumului material, este egală cu puterea dezvoltată de forțele exterioare aplicate volumului material plus căldura primită din exterior în unitatea de timp prin suprafața care închide volumul material

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}(t)} \rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \vec{f}\vec{v}\, d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{D}(t)} (\vec{\vec{T}}\cdot\vec{v})\vec{n}\, dA + \int_{\partial\mathcal{D}(t)} \vec{q}\vec{n}\, dA \tag{7.1.17}$$

Ținînd seama de (7.1.16), rezultă

$$\int_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{de}{dt} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}(t)} \Phi\, d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{D}(t)} \text{div } \vec{q}\, d\mathcal{V} \tag{7.1.18}$$

* A. Fortier. Mécanique des fluides et transferts de chaleur et de masse. Ed. Masson, 1975.

Scanned with OKEN Scanner

și aplicînd lema integralei nule se obține

$$\rho \frac{de}{dt} = \Phi + \operatorname{div} \vec{q}. \tag{7.1.19}$$

Pentru studiul problemelor tehnice, este utilă aplicarea relațiilor (7.1.16) și (7.1.17) unui tub de curent care poate fi asimilat cu o curgere internă, limitată de frontiere solide, deoarece fluxul vitezei prin suprafața care limitează tubul este nul (fig. 7.1, *b*).

Ținînd seama de expresia forței masice unitare $\vec{f}$ și a tensorului tensiunilor $\vec{\vec{T}}$, rezultă

$$\int_{S_2} \left(p + \rho gz + \rho \frac{v^2}{2}\right) v_n \, dA - \int_{S_1} \left(p + \rho gz + \rho \frac{v^2}{2}\right) v_n \, dA =$$

$$= \int_{S_1 \cup S_2} (\vec{\vec{T}} \vec{v}) \vec{n} \, dA - \int_{\mathcal{D}} \Phi \, d\mathcal{V} + W, \tag{7.1.20}$$

$$\int_{S_2} \rho e v_n \, dA - \int_{S_1} \rho e v_n \, dA = \int_{\mathcal{D}} \Phi \, d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{D}} \vec{q} \vec{n} \, dA. \tag{7.1.21}$$

Se constată că suma termenilor $(\vec{\vec{T}} \cdot \vec{v}) \vec{n} \, dA$ pe $S_1 \cup S_2$ este întotdeauna neglijabilă față de integrala funcției de disipație și rezultă

$$\int_{S_2} \left(p + \rho gz + \rho \frac{v^2}{2}\right) v_n \, dA - \int_{S_1} \left(p + \rho gz + \rho \frac{v^2}{2}\right) v_n \, dA = \int_{\mathcal{D}} \Phi d\mathcal{V} + W, \tag{7.1.22}$$

unde W reprezintă căldura furnizată de eventualele suprafețe solide din interiorul tubului de curent.

Notînd cu $p_t = p + \rho gz + \rho \frac{v^2}{2}$ presiunea totală locală și cu

$$P = \frac{\int_S p_t v_n dA}{Q},$$

unde Q este debitul volumic, se scrie

$$Q(P_2 - P_1) = -\int_{\mathcal{D}} \Phi \, d\mathcal{V} + W. \tag{7.1.23}$$

Pierderea de sarcină între secțiunile S_1 și S_2 este prin definiție egală cu

$$P_1 - P_2 = \frac{\int_{\mathcal{D}} \Phi d\mathcal{V}}{Q}.$$

De obicei presiunile sînt exprimate sub formă de înălțime coloană lichid, astfel că pierderea de sarcină hidraulică se scrie

$$h_r = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{\int_{\mathcal{D}} \Phi d\mathcal{V}}{\rho g Q}. \tag{7.1.24}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul mișcării laminare și permanente într-o conductă, rezultă

$$\Phi = \eta\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{1}{4\eta}\left(\frac{\Delta p}{l} - \rho g \sin\alpha\right)^2 r^2 = \frac{16\eta VQ}{\pi R^4} r^2,$$

unde s-a ținut seama de relația geometrică $r^2 = x^2 + y^2$ și

$$h_{r1-2} = \frac{1}{\rho g Q}\int_{-l/2}^{l/2} \mathrm{d}z \int_0^R \frac{16\eta VQ}{\pi R^4} r^2 2\pi r \,\mathrm{d}r = \frac{8\eta l V}{\rho g R^2}. \qquad (7.1.25)$$

Rezutatul se pune sub forma

$$h_{r1-2} = \lambda \frac{l}{D}\frac{V^2}{2g} = \frac{64}{\mathrm{Re}}\frac{l}{D}\frac{V^2}{2g}, \qquad (7.1.26)$$

unde s-a notat $D = 2R$, $\mathrm{Re} = \frac{VD}{\nu}$.

Coeficientul λ poartă denumirea de coeficientul de pierderi de sarcină al lui Darcy. Valoarea $\lambda = 64/\mathrm{Re}$ este valabilă numai pentru mișcări laminare, $\mathrm{Re} < 2\,300$; pentru $\mathrm{Re} > 2\,300$, λ se determină experimental.

Pierderea de presiune pe unitatea de lungime de conductă se calculează din (7.1.23)

$$\frac{\Delta p}{l} = \rho g\left(\frac{h_{r1-2}}{l} + \sin\alpha\right), \qquad (7.1.27)$$

în cazul $W = 0$.

Problema 7.2. Într-o instalație de depunere a izolației pe un cablu circular* cu raza $r_c = 20$ mm (fig. 7.2), acesta se trage cu viteza constantă $V_c = 0{,}05$ m/s coaxial cu un cilindru fix cu raza $R = 24$ mm, antrenînd izolația aflată în stare fluidă cu viscozitatea dinamică $\eta = 42{,}5$ cP pe o lungime $l = 1$ m. Să se determine debitul de fluid translatat între rezervoarele A și B în următoarele cazuri:

1) $p_A = p_B$ și 2) $p = p_A - p_B = 0{,}01$ MPa. Se cunoaște densitatea izolației fluide $\rho = 850$ kg/m^3.

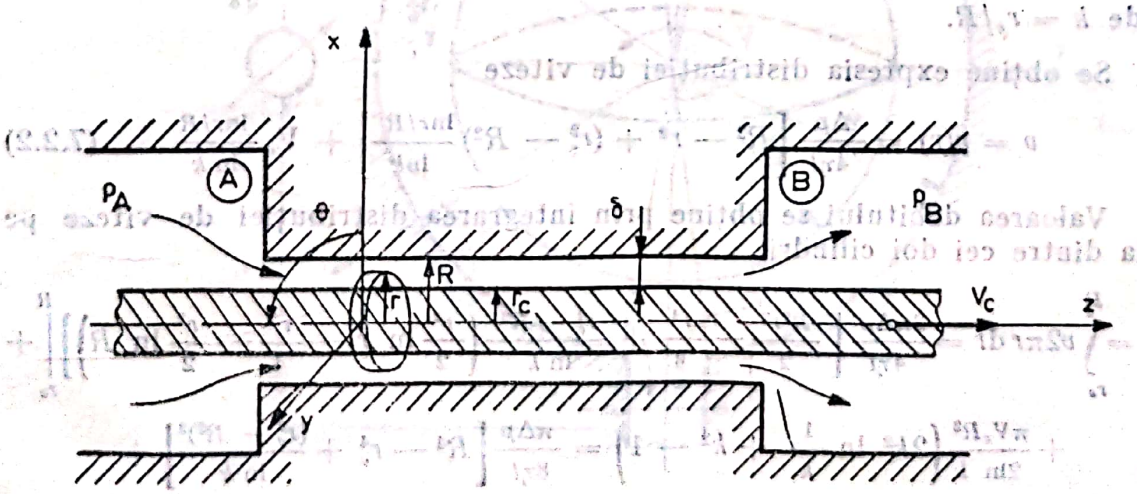


Fig. 7.2.

* S. B. Paton, ș.a. Processing of thermoplastic materials. Ed. Reinhold, 1959.

Rezolvare : Pentru a determina regimul de mişcare al fluidului între cei doi cilindri coaxiali, se calculează valoarea numărului Re dat de expresia

$$\mathrm{Re} = V\delta/\nu = V(R - r_c)\rho/\eta = 0{,}05(0{,}024 - 0{,}020)\,850/0{,}0425 = 4,$$

Mişcarea fiind laminară, ecuaţiile de mişcare şi ecuaţia de continuitate (vezi problema 7.1) se reduc în cazul studiat, la

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$$
$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \qquad (7.2.1)$$

unde s-a neglijat forţa masică a fluidului datorită distanţei mici δ şi s-a ţinut seama că $v_r = v_\theta = 0$.

Cu notaţia $\partial p/\partial z = -\Delta p/l$ (vezi problema 7.1), relaţia (7.2.1) devine

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{-\Delta p}{\eta l}; \quad v = \frac{-\Delta p r^2}{4\eta l} + C_1 \ln r + C_2,$$

condiţiile la limită fiind :

$$r = r_c,\ v = V_c;$$
$$r = R,\ v = 0.$$

Rezultă

$$V_c = -\frac{\Delta p}{l}\frac{r_c}{4\eta} + C_1 \ln r_c + C_2;$$
$$0 = -\frac{\Delta p}{l}\frac{R^2}{4\eta} + C_1 \ln R + C_2;$$
$$C_1 = (r_c^2 - R^2)\frac{\Delta p}{4\eta l}\cdot\frac{1}{\ln k} + \frac{V_c}{\ln k};$$
$$C_2 = \left[R^2 - (r_c^2 - R^2)\frac{\ln R}{\ln k}\right]\frac{\Delta p}{4\eta l} - V_c\frac{\ln R}{\ln k},$$

unde $k = r_c/R$.

Se obţine expresia distribuţiei de viteze

$$v = v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left[R^2 - r^2 + (r_c^2 - R^2)\frac{\ln r/R}{\ln k}\right] + V_c\frac{\ln r/R}{\ln k}. \qquad (7.2.2)$$

Valoarea debitului se obţine prin integrarea distribuţiei de viteze pe aria dintre cei doi cilindri

$$Q = \int_{r_c}^{R} v 2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi\Delta p}{4\eta l}\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} + \frac{r_c^2 - R^2}{\ln k}\left(\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\ln R\right)\right]\Bigg|_{r_c}^{R} +$$
$$+ \frac{\pi V_c R^2}{2\ln k}\left(2k^2 \ln\frac{1}{k} + k^2 - 1\right) = \frac{\pi\Delta p}{8\eta l}\left[R^4 - r_c^4 + \frac{(r_c^2 - R^2)^2}{\ln k}\right] +$$
$$+ \frac{\pi V_c R^2}{2\ln k}\left(2k^2 \ln\frac{1}{k} + k^2 - 1\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

În primul caz, $p_A = p_B$,

$$Q_1 = \frac{\pi \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}024^2}{2 \ln 0{,}833}[2 \cdot 0{,}833^2 \ln(1/0{,}833) + 0{,}833^2 - 1] = 1{,}33 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s} =$$

$$= 46{,}7 \text{ l/h}.$$

Pentru $\Delta p = 0{,}01$ MPa, cu $\frac{\pi \Delta p}{8 \eta l} = 9{,}24 \cdot 10^4$, se obține valoarea

$$Q = 9{,}24 \cdot 10^4 \left[0{,}024^4 - 0{,}02^4 + \frac{(0{,}02^2 - 0{,}024^2)^2}{\ln \frac{0{,}02}{0{,}024}} \right] + 1{,}33 \cdot 10^{-5} =$$

$$= 1{,}87 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 674 \text{ l/h} \qquad (7.2.3)$$

Problema 7.3. Un fluid de ungere cu viscozitatea dinamică $\eta = 42{,}5$ cP se deplasează uniform între două sfere concentrice* cu razele $R_1 = 0{,}09$ m și $R_2 = 0{,}1$ m (fig. 7.3). În ipoteza unei fante δ suficient de mică pentru a asigura o curgere laminară, să se determine debitul scurs între cele două sfere, cunoscînd căderea de presiune $\Delta p = 0{,}01$ MPa.

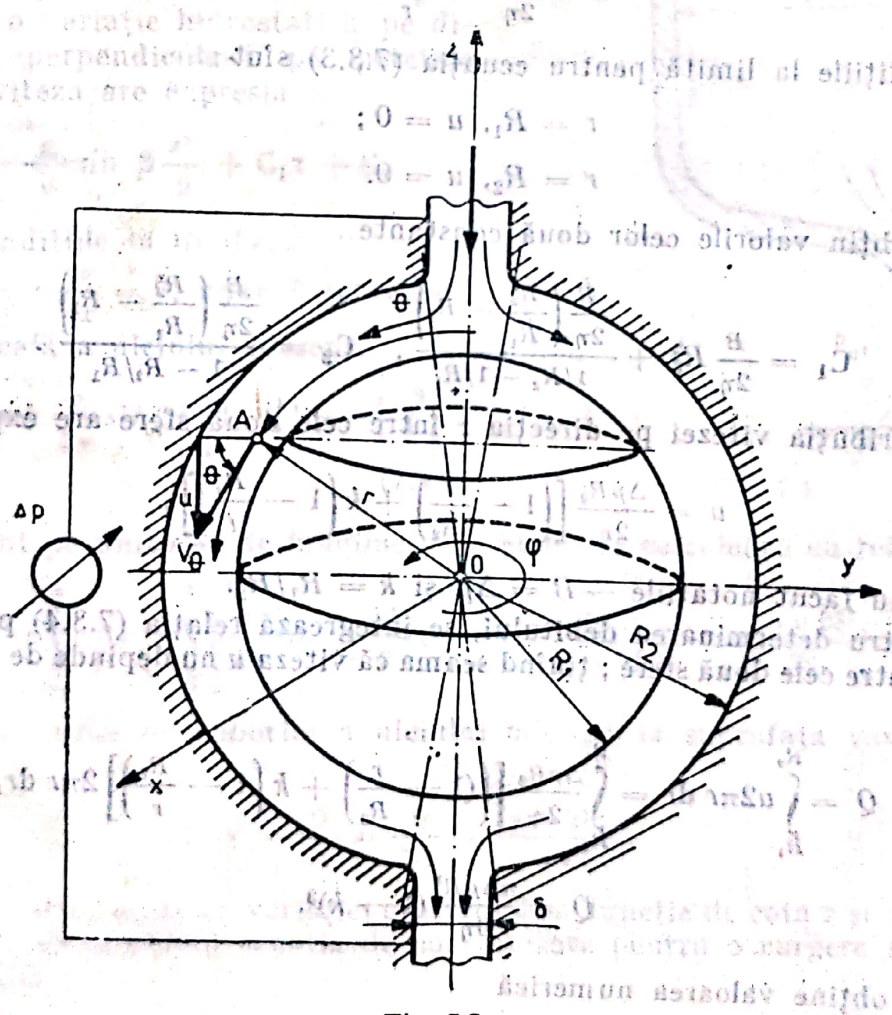


Fig. 7.3.

* B. Bird, W. Stewart, E. Lightfoot. Transport Phenomena Ed. J. Wiley 1960.

Rezolvare : Mişcarea fluidului între cele două sfere este descrisă de ecuaţiile Navier-Stokes scrise în coordonate sferice (6.19.22). Se consideră $v_\varphi = v_r = 0$, mişcarea fiind simetrică faţă de coordonate φ şi $v = v_\theta$. Se obţine

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left[\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)\right]; \qquad (7.3.1)$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta \sin\theta) = 0.$$

Din ecuaţia de continuitate, rezultă $u = v_\theta \sin\theta = \text{const.}$ pe direcţia θ, unde u reprezintă proiecţia vitezei pe direcţia axei Oz. Ţinînd seama că mişcarea fluidului este lentă, se poate neglija termenul $v_\theta/r^2 \sin^2\theta$ faţă de gradientul vitezei pe direcţia razei r (domeniul studiat exclude unghiurile θ foarte mici pentru care $\sin\theta \cong 0$).

Cu notaţia $B = \frac{\partial p}{\partial \theta}\sin\theta$, ecuaţia (7.3.1) devine

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = \frac{B}{\eta r}; \qquad (7.3.2)$$

$$u = \frac{B}{2\eta}r - \frac{C_1}{r} + C_2. \qquad (7.3.3)$$

Condiţiile la limită pentru ecuaţia (7.3.3) sînt :

$$r = R_1,\ u = 0;$$

$$r = R_2,\ u = 0.$$

Se obţin valorile celor două constante

$$C_1 = \frac{B}{2\eta}R_2^2 + \frac{\frac{B}{2\eta}\left(\frac{R_2^2}{R_1} - R_1\right)}{1/R_2 - 1/R_1}, \qquad C_2 = \frac{\frac{B}{2\eta}\left(\frac{R_2^2}{R_1} - R_1\right)}{1 - R_2/R_1}.$$

Distribuţia vitezei pe direcţia z între cele două sfere are expresia

$$u = \frac{\Delta p R_2}{2\eta}\left[\left(1 - \frac{r}{R_2}\right) + k\left(1 - \frac{R_2}{r}\right)\right], \qquad (7.3.4)$$

unde s-au făcut notaţiile $-B = \Delta p$ şi $k = R_1/R_2$.

Pentru determinarea debitului, se integrează relaţia (7.3.4) pe aria cuprinsă între cele două sfere ; ţinînd seama că viteza u nu depinde de unghiul θ, rezultă

$$Q = \int_{R_1}^{R_2} u 2\pi r\, dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\Delta p R_2}{2\eta}\left[\left(1 - \frac{r}{R_2}\right) + k\left(1 - \frac{R_2}{r}\right)\right] 2\pi r\, dr, \qquad (7.3.5)$$

$$Q = \frac{\pi \Delta p R_2^3}{6\eta}(1 - k)^3.$$

Se obţine valoarea numerică

$$Q = \frac{\pi \cdot 10^4 \cdot 0{,}1^3}{6 \cdot 0{,}0425}(1 - 0{,}9)^3 = 3{,}9 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3/\text{s} = 1{,}4\ \text{m}^3/\text{h}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Problema 7.4. Într-un rezervor de rază $R = 2$ m (fig. 7.4), se găsește ulei cu viscozitatea cinematică $\nu = 20$ cSt și densitatea $\rho = 820$ kg/m³. Să se determine cantitatea de ulei care rămîne aderentă la peretele vasului, dacă, în timpul $t = 20$ s, nivelul uleiului din rezervor scade cu $\Delta H = 25$ mm.

Rezolvare : Pentru calculul grosimii fluidului care rămîne pe peretele vasului, se consideră cazul curgerii laminare, la presiune atmosferică sub acțiunea greutății proprii, pe o suprafață înclinată cu unghiul β față de orizontală.

Ecuațiile de mișcare Navier-Stokes în direcțiile Ox și Oz se reduc, în acest caz, la

$$0 = g\cos\beta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$
$$0 = g\sin\beta + \nu\frac{d^2v}{dx^2} \qquad (7.4.1)$$

unde $v = v_z$ este componenta vitezei pe direcții Oz paralelă cu suprafața solidă.

Din relațiile (7.4.1), rezultă că presiunea are o variație hidrostatică pe direcția Ox, perpendiculară pe peretele solid, iar viteza are expresia

$$v = -\frac{g}{\nu}\sin\beta\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$

Cu condițiile la limită, $x=0$, $v=0$ și $x = \delta$, $\tau = \eta\frac{dv}{dx} = 0$, unde δ reprezintă grosime locală a uleiului aderent,

se obține $v = \frac{g}{2\nu}\sin\beta\delta^2\left[1 - \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^2\right]$. (7.4.2)

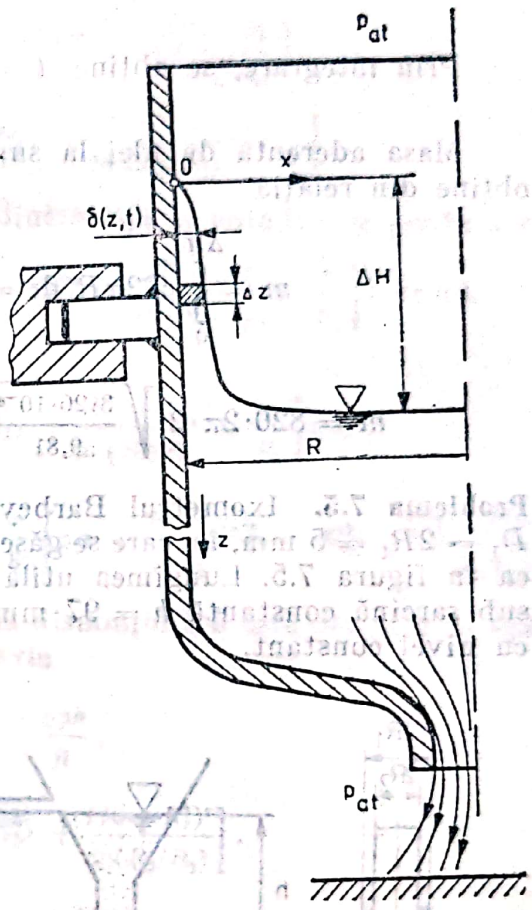


Fig. 7.4.

Debitul pe unitatea de lungime a peretelui se calculează cu relația

$$Q = \int_0^\delta v\,dx = \int_0^\delta\left(\frac{g}{2\nu}\sin\beta\frac{x^2}{2} + \frac{g}{\nu}\sin\beta\delta x\right)dx = \frac{g\sin\beta\delta^3}{3\nu}. \qquad (7.4.3)$$

Viteza medie de coborîre a uleiului aderent la suprafața vasului are valoarea

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\delta\cdot 1} = \frac{g\sin\beta\delta^2}{3\nu}. \qquad (7.4.4)$$

Pentru determinarea variației grosimii δ în funcție de cota z și timpul t, $\delta = \delta(z, t)$, se consideră ecuația de continuitate pentru o curgere în regim nepermanent

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho A\vec{v}) = 0, \qquad (7.4.5)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\delta v) = 0, \quad \text{cu} \frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{\partial \delta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = -V\frac{\partial \delta}{\partial z};$$

rezultă $$\frac{\partial \delta}{\partial t} + V\frac{\partial \delta}{\partial z} = 0. \tag{7.4.6}$$

Pentru $\beta = 90°$, ecuația (7.4.6) devine $\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{g\delta^2}{3\nu}\frac{\partial \delta}{\partial z} = 0$, $dt = \frac{dz}{\frac{g\delta^2}{3\nu}}$

Prin integrare, se obține $t = \frac{3\nu}{g\delta^2}z$ și $\delta = \sqrt{\frac{3\nu}{g}\frac{z}{t}}$. (7.4.7)

Masa aderentă de ulei la suprafața solidă, după timpul $t = 20$ s, se obține din relația

$$m = \int_0^{\Delta H} \rho\delta 2\pi R\, dz = \rho 2\pi R \sqrt{\frac{3\nu}{g}}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{0,025} z^{1/2}\, dz,$$

$$m = 820\cdot 2\pi\cdot 2\sqrt{\frac{3\cdot 20\cdot 10^{-6}}{9,81}}\cdot\frac{1}{\sqrt{20}}\cdot\frac{2}{3}\cdot 0,025^{3/2} = 0,015 \text{ kg}.$$

Problema 7.5. Ixometrul Barbey se compune dintr-un tub cu diametrul $D_1 = 2R_1 = 5$ mm, în care se găsește o tijă cu diametrul $D_2 = 2R_2 = 4$ mm ca în figura 7.5. Lungimea utilă este $l = 200$ mm. Tubul este alimentat sub sarcină constantă $h = 97$ mm printr-un tub vertical dintr-un rezervor cu nivel constant.

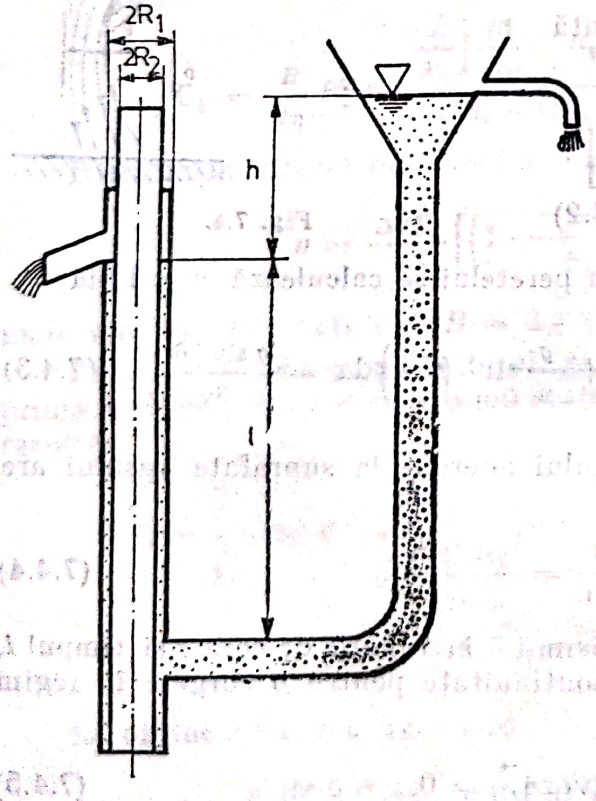


Fig. 7.5.

Fluiditatea Barbey f este volumul de lichid (în ml), care curge în timp de o oră. Se cere:

1) să se determine repartiția vitezei $v(r)$ în spațiul inelar aflat între tub și tije;
2) să se determine expresia debitului volumic curs;
3) să se arate că, între fluiditate și viscozitatea dinamică, este o relație de forma $\eta = K\rho/f$, în care K este o constantă a aparatului;
4) să se determine valoarea constantei K.

Rezolvare: 1) Dacă se consideră mișcarea din spațiul inelar între cilindru și tijă, expresia vitezei este (vezi problema 7.2)

$$v_z = \frac{1}{4\eta}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)r^2 + C_1 \ln r + C_2, \tag{7.5.1}$$

unde s-a considerat Oz axa cilindrului și tijei.

Determinarea constantelor C_1 și C_2 se face din condițiile la limită proprii domeniului și anume :

pentru $r = R_1,\ v_z = 0$;

pentru $r = R_2,\ v_z = 0.$

Cu aceasta se obține $C_1 = \frac{1}{4\eta}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln(R_2/R_1)}$;

$$C_2 = \frac{1}{4\eta}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\left[(r^2 - R_1^2) + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln(R_2/R_1)}\right],$$

respectiv $v_z = \frac{1}{4\eta}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\left[(r^2 - R_1^2) + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln (R_2/R_1)}\ln\frac{r}{R}\right].$

2) Debitul care curge prin spațiul dintre tijă și cilindru se poate scrie

$$Q = \int_A v_z\, dA = \frac{1}{4\eta}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\int_A\left[(r^2 - R_1^2) + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln (R_2/R_1)}\ln\frac{r}{R_1}\right] r\, dr\, d\theta,$$

deci $Q = \frac{\pi}{2\eta}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\int_{R_1}^{R_2}\left[(r^2 - R_1^2) + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\ln (R^2/R_1)}\ln\frac{r}{R_1}\right] r\, dr.$

Efectuînd integrala rezultă $Q = -\frac{\pi}{8\eta}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\left[(R_1^4 - R_2^4) + \frac{(R_1^2 - R_2^2)^2}{\ln(R_2/R_1)}\right].$

Dacă se consideră că întreaga sarcină disponibilă h este disipată în spațiul inelar, între tub și tijă, se poate scrie

$$\rho g + \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\rho g h}{jl},$$

iar debitul devine $Q = \frac{\pi\rho g h}{8\eta l}\left[(R_1^4 - R_2^4) + \frac{(R_1^2 - R_2^2)^2}{\ln(R_2/R_1)}\right].$

3) Prin definiție fluiditatea Barbey f este

$$f = 3\,600\cdot 10^6 Q = 3{,}6\cdot 10^9\,\frac{\pi\rho g h}{8\eta l}\left[(R_1^4 - R_2^4) + \frac{(R_1^2 - R_2^2)^2}{\ln(R_2/R_1)}\right].$$

Dacă se notează constanta aparatului $K = 3{,}6\cdot 10^9 + \frac{\pi g h}{8}\left[(R_1^4 - R_2^4) + \frac{(R_1^2 - R_2^2)^2}{\ln(R_2/R_1)}\right],$

fluiditatea Barbey devine $f = K\rho/\eta.$

4) În cazul considerat, constanta aparatului este

$$K = 3{,}6\cdot 10^9\,\frac{\pi\cdot 9{,}81\cdot 0{,}097}{8\cdot 0{,}2}\left[(0{,}0025^4 - 0{,}002^4) + \frac{(0{,}0025^2 - 0{,}002^2)^2}{\ln(2/2{,}5)}\right],$$

adică $K = 2{,}53\cdot 10^{-3}.$

Deci fluiditatea este $f = 2{,}53\cdot 10^{-3}\ \rho/\eta.$

Scanned with OKEN Scanner

Problema 7.6. Pistonul unui amortizor hidraulic este prevăzut cu un orificiu circular cu diametrul d, figura 7.6. Dacă tija pistonului este acționată de forța $F = 10$ N, să se determine diametrul d, astfel încît pistonul să coboare cu viteza $V_p = 0{,}1$ m/s. Se cunosc : diametrul cilindrului $D = 75$ mm, jocul dintre piston și cilindru $\delta = 0{,}01$ mm, lungimea pistonului $l = 50$ mm, viscozitatea uleiului $\eta = 0{,}1$ Pa s, densitatea uleiului $\rho = 875$ kg/m³. Care este viteza minimă de coborîre a pistonului pentru încărcarea dată ?

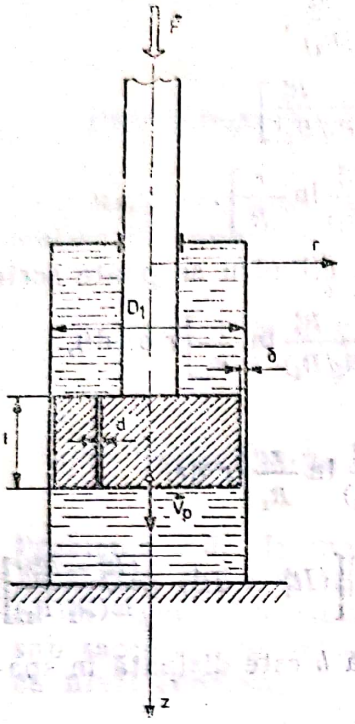


Fig. 7.6.

Rezolvare : Datorită forței aplicate, pistonul va disloca un debit de ulei Q, atît prin orificiul cu diametrul d, cît și prin spațiul dintre piston și cilindru. Astfel, expresia debitului Q, folosind relațiile (7.1.12) și (7.2.3), este următoarea :

$$Q = \frac{\pi d^4}{128\eta}\cdot\frac{\Delta p}{l} + \frac{\pi\Delta p}{8\eta l}\left[R_1^4 - R_2^4 + \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln k}\right] + \frac{\pi V_p R_1^2}{2\ln k}\left(2k^2\ln\frac{1}{k} + k^2 - 1\right), \qquad (7.6.1)$$

unde $R_1 = D/2$, $R_2 = R_1 - \delta$, $k = R_1/R_2$.

Gradientul de presiune din (7.6.1) apare datorită acțiunii forței F. Rezultă

$$F = \Delta p\pi R_2^2. \qquad (7.6.2)$$

Relația (7.6.2) este valabilă numai pentru o mișcare lentă, în care forțele inerțiale sînt neglijate. Dacă pistonul coboară cu viteza V_p, debitul Q este egal cu raportul dintre volumul dislocat de piston în unitatea de timp

$$Q = V_p\pi R_2^2. \qquad (7.6.3)$$

Relațiile (7.6.2) și (7.6.3) se introduc în (7.6.1). Se obține

$$\pi R_2^2 V_p = \frac{\pi d^4}{128\,\eta}\cdot\frac{F}{\pi R_2^2 l} + \frac{\pi F}{8\eta\pi R_2^2 l}\left[R_1^4 - R_2^4 + \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln k}\right] + \frac{\pi V_p R_1^2}{2\ln k}\left(2k^2\ln\frac{1}{k} + k^2 - 1\right).$$

Rezultă dependența vitezei pistonului funcție de forța aplicată

$$V_p = \frac{\varkappa_1 d^4 + \varkappa_2}{\varkappa_3}\cdot F, \qquad (7.6.4)$$

în care $\varkappa_1 = \dfrac{1}{128\eta\pi R_2^4 l} = \dfrac{1}{128\cdot 0{,}1\pi 0{,}03749^4\cdot 0{,}05} = 2{,}517\cdot 10^5\ [\mathrm{Nm^3\ s}]^{-1}$;

$$\varkappa_2 = \frac{1}{8\eta\pi R_2^4 l}\left(R_1^4 - R_2^4 + \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln k}\right) = \frac{1}{8\cdot 0{,}1\cdot\pi\cdot 0{,}03749^4\cdot 0{,}05}\left(0{,}0375^4 - 0{,}03749^4 + \frac{(0{,}03749^2 - 0{,}0375^2)^2}{\ln 0{,}9997}\right) = 7{,}74\cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m/Ns}];$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\varkappa_3 = 1 - \frac{R_1^2}{2R_2^2 \ln k}\left(2k^2 \ln\frac{1}{k} + k^2 - 1\right) = 1 -$$

$$- \frac{0{,}0375^2}{2 \cdot 0{,}03749^2 \ln 0{,}9997}\left(2 \cdot 0{,}9997^2 \ln\frac{1}{0{,}9997} + 0{,}9997^2 - 1\right) = 0{,}9999.$$

Din (7.6.4), se obține mărimea diametrului d,

$$d = \sqrt[4]{\frac{\varkappa_3 V_p - \varkappa_2 F}{\varkappa_1 F}} = \sqrt[4]{\frac{0{,}9999 \cdot 0{,}1 - 7{,}74 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{2{,}517 \cdot 10^5 \cdot 10}} = 10 \text{ mm}.$$

Viteza minimă pe care o are pistonul pentru încărcarea dată se obține din condiția $d = 0$

$$V_p = \frac{\varkappa_2 F}{\varkappa_3} = \frac{7{,}74 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{0{,}9999} = 0{,}077 \text{ m/s}.$$

Calculul efectuat este valabil numai în cazul mișcării laminare a uleiului prin orificiul de diametrul d.

Viteza medie prin orificiu este dată de (7.1.13)

$$V = \frac{d^2}{32\eta}\frac{F}{\pi R_2^2 l} = \frac{0{,}01^2}{32 \cdot 0{,}1} \cdot \frac{10}{\pi 0{,}03749^2 \cdot 0{,}05} = 1{,}41 \text{ m/s}.$$

Numărul **Re** este $\mathbf{Re} = \frac{Vd\rho}{\eta} = \frac{1{,}41 \cdot 0{,}01 \cdot 875}{0{,}1} = 124 < 2\,300.$

Problema 7.7. Amortizorul hidraulic din figura 7.7 este alcătuit dintr-un cilindru cu diametrul $D = 50$ mm, în care se poate deplasa un piston cu lungimea $l = 50$ mm. Etanșeitatea între cilindru și piston este presupusă perfectă și se neglijează forțele de frecare din suprafața de contact a cilindrului cu pistonul.

Pistonul este prevăzut cu două orificii, cu diametrul $d = 2{,}5$ mm, prin care curge uleiul, cu densitatea $\rho = 900$ kg/m³ și viscozitatea dinamică $\eta = 0{,}5$ Pa s, conținut în cilindru. Forța aplicată amortizorului este $F = 500$ N și se presupune că intensitatea ei este constantă în timp. Se cere:

1) să se calculeze viteza pistonului;
2) să se calculeze numărul Reynolds al mișcării și să se arate că mișcarea este laminară;
3) să se calculeze coeficientul lui Darcy λ în tubul cilindrice și pierderea de presiune între fețele pistonului.

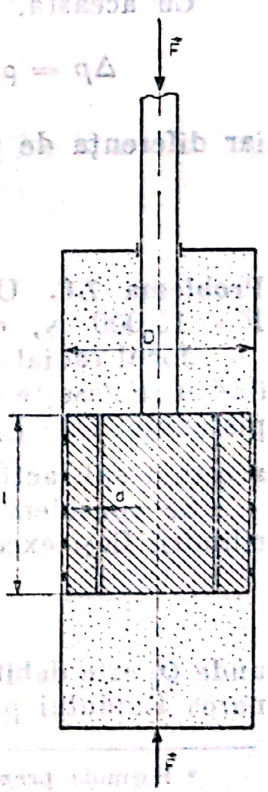


Fig. 7.7.

Rezolvare: 1) Se consideră mișcarea laminară în orificiile de diametru d. În acest caz, expresia debitului și a vitezei medii prin orificiu sînt

$$Q = -\frac{\pi d^4}{128\,\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z},$$

respectiv

$$V = \frac{-d^2}{32\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z},$$

în care s-a considerat axa Oz, axa de simetrie a orificiului.

Scanned with OKEN Scanner

Variația presiunii între fețele pistonului este produsă de aplicarea forței $\vec{F}$ pe amortizor, astfel încît se poate scrie

$$\frac{dp}{dz} \cong \frac{\Delta p}{\Delta z} = -\frac{F}{Al} = -\frac{4F}{\pi D^2 l},$$

deci viteza medie în orificiu se poate scrie $V = \frac{d^2F}{8\pi\eta D^2 l} =$

$$= \frac{(2{,}5\cdot 10^{-3})^2 \cdot 500}{8\pi 0{,}5(50\cdot 10^{-3})^2 \cdot 0{,}05} \cong 2 \text{ m/s}.$$

Scriind ecuația continuității, se observă că debitul care trece prin cele două orificii este debitul dezlocuit de piston. Dacă viteza acestuia este V_1, se poate scrie

$$\frac{\pi D^2}{4} V_1 = 2\frac{\pi d^2}{4} V,$$

de unde $V_1 = \frac{d^4F}{4\pi\eta D^4 l} = \frac{(2{,}5\cdot 10^{-3})^4 \cdot 500}{4\pi 0{,}5(50\cdot 10^{-3})^4 0{,}05} = 0{,}01$ m/s.

2) Cu viteza medie prin orificiu V, determinată anterior, se poate calcula numărul Reynolds al mișcării

$$\mathbf{Re} = VD/\nu = VD\rho/\eta = 2\cdot 2{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 900/0{,}5 = 9,$$

deci mișcarea este laminară.

3) Pentru mișcarea laminară, coeficientul lui Darcy este

$$\lambda = 64/\mathbf{Re} = 64/9 = 7{,}11.$$

Cu aceasta, pierderea de presiune este

$$\Delta p = \rho g h_r = \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{V^2}{2} = 7{,}11 \frac{0{,}05}{0{,}0025} \cdot 900 \frac{2^2}{2} = 255 \text{ kPa},$$

iar diferența de presiune produsă de forța F este

$$\Delta p = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi D^2} = \frac{4\cdot 500}{\pi \cdot 0{,}05^2} = 255 \text{ kPa}.$$

Problema 7.8. Un piston cu diametrul $D = 100$ mm, acționat de forța $F = 15\,000$ N, culisează într-un cilindru, figura 7.8.

Jocul radial dintre pistonul mobil și cilindrul fix este $\delta = 2$ μm. În cilindru se găsește ulei cu viscozitatea dinamică $\eta = 0{,}05$ Pas. Dacă lungimea pistonului este $l = 100$ mm, să se determine viteza maximă de coborîre a acestuia sub acțiunea forței $\vec{F}$.

Se consideră cunoscută relația care exprimă debitul scurs între doi cilindrii ficși excentrici sub acțiunea unei diferențe de presiune $\Delta p/l$

$$Q = Q_0\left(1 + \frac{3e^2}{2(R_1 - R_2)^2}\right), *$$

unde Q_0 este debitul pentru excentricitate zero (în calcul se neglijează antrenarea fluidului produsă de pistonul în mișcare).

---

* Formula prezentată este aproximarea soluției analitice exacte din Happel, J. Low Reynolds hydrodynamics. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1965.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare : Curgerea uleiului are loc sub o diferență de presiune egală cu

$$\Delta p = \frac{4F}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 15\,000}{\pi \cdot 0{,}1^2} \cong 1{,}9 \text{ MPa}.$$

Debitul Q_0 se calculează cu formula (7.2.3)

$$Q_0 = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l}\left[R_1^4 - R_2^4 - \frac{(R_1^2 - R_2^2)^2}{\ln(R_1/R_2)}\right] =$$

$$= \frac{\pi 1{,}9 \cdot 10^6}{8 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}1} \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-12} = 3{,}7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Viteza de coborîre maximă rezultă din ecuația de continuitate

$$Q = Q_0\left(1 + \frac{3}{2} \cdot 1\right) = V\frac{\pi D^2}{4}.$$

Se obține $V = \frac{5}{2} Q_0 \frac{4}{\pi D^2} = \frac{5}{2} 3{,}7 \cdot 10^{-5} \frac{4}{\pi 0{,}1^2} \cong 12$ mm/s.

(Viteza de coborîre în cazul cilindrilor concentrici este $V_0 = 4{,}8$ mm/s).

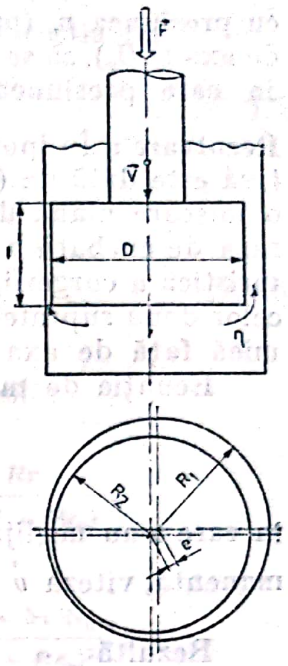


Fig. 7.8.

Problema 7.9. Într-o instalație de preparare a pastelor industriale, se realizează transferul pastei de celuloză din rezervorul A în rezervorul B, utilizînd doi cilindri identici de rază $R = 0{,}8$ m care se rotesc cu vitezele unghiulare $\omega_1 = 2$ rad/s și $\omega_2 = 3{,}5$ rad/s (fig. 7.9). Datorită aderenței pastei la cilindri, ea este antrenată printr-un spațiu de grosime $e_0 = 3$ mm și lățime $l = 1$ m. Dacă presiunea în secțiunea minimă dintre cei doi cilindri este egală

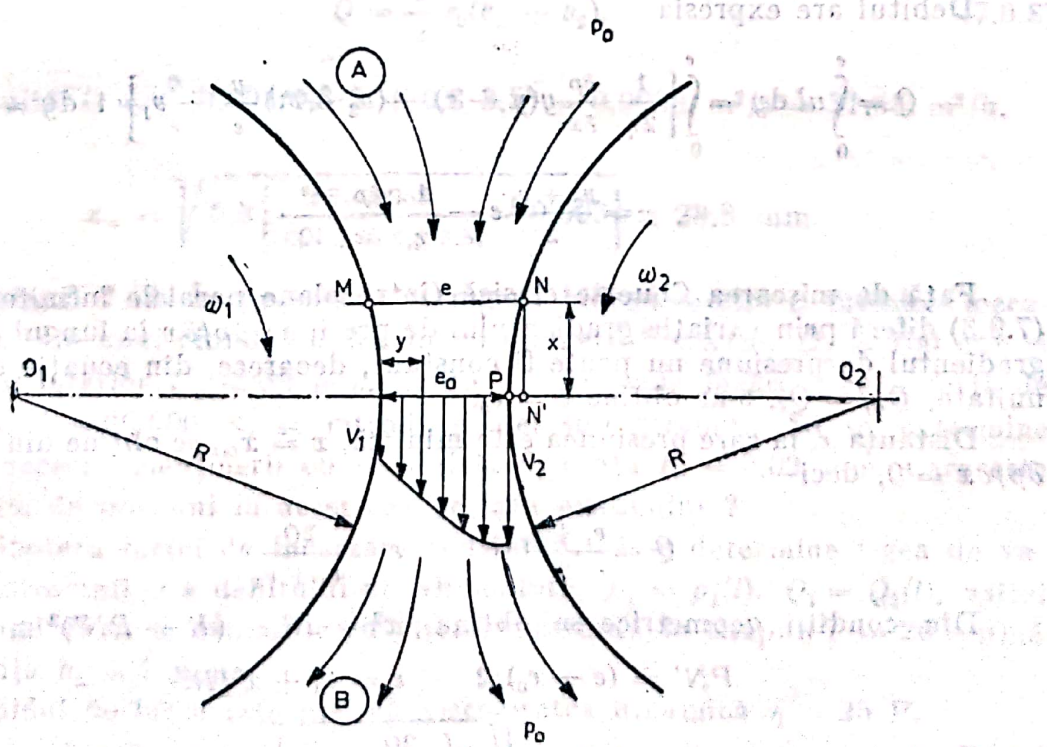


Fig. 7.9.

cu presiunea p_0 (presiunea fluidului din rezervorul A la distanța $x = R$ față de axa O_1O_2), să se determine valoarea debitului transportat și poziția secțiuni în care presiunea are valoarea minimă.

Rezolvare : În ipoteza comportării newtoniene a fluidului (ecuația constitutivă este dată de (7.1.2)), mișcarea între cei doi cilindri poate fi considerată o mișcare plană de tip Couette cu gradient de presiune (se ține seama că raza de curbură a celor doi cilindri este mult mai mare decît lățimea caracteristică a curgerii, e). În această ipoteză simplificatoare, a neglijării curburii celor două suprafețe, relațiile de calcul sînt valabile numai la o distanță x mică față de axa O_1O_2.

Ecuația de mișcare (7.1.3) în coordonate carteziene devine

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{7.9.1}$$

în care s-au neglijat forțele masice, mișcarea s-a considerat laminară și permanentă, viteza $\vec{v}$ reducîndu-se la o singură componentă $u = u(y)$.

Rezultă
$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$u = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2.$$

Condițiile la limită sînt : $y = 0$, $u = v_1$; $y = e$, $u = v_2$, v_1 și v_2 fiind vitezele periferice ale cilindrilor.

Se obține o distribuție de viteze parabolică dată de relația

$$u = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y(y - e) + (v_2 - v_1)\frac{y}{e} + v_1. \tag{7.9.2}$$

Debitul are expresia

$$Q = \int_0^e ul\,dy = \int_0^e \left[\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y(y - e) + (v_2 - v_1)\frac{y}{e} + v_1\right]\cdot 1\cdot dy =$$

$$= \frac{v_2 + v_1}{2}e - \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{e^3}{12}. \tag{7.9.3}$$

Față de mișcarea Couette clasică (între plane paralele infinite), relația (7.9.3) diferă prin variația gradientului de presiune $\partial p/\partial x$ în lungul axei Ox ; gradientul de presiune nu poate fi constant, deoarece, din ecuația de continuitate, $Q_{e_0} = Q_e$, s-ar obține $e = e_0$.

Distanța x, la care presiunea este minimă, $x = x_m$, se obține din condiția $\partial p/\partial x = 0$, deci

$$Q = \frac{v_1 + v_2}{2}\cdot e \qquad e = \frac{2Q}{v_1 + v_2}.$$

Din condiții geometrice se obține $x^2 = R^2 - (R - PN')^2 \cong 2R\cdot PN'$

$$PN' = (e - e_0)/2 \qquad e = e_0 + x^2/R.$$

Deci
$$x_m = \sqrt{R\left(\frac{2Q}{v_1 + v_2} - e_0\right)}. \tag{7.9.4}$$

Dacă se admite o distribuție liniară a presiunii pe direcția Ox,

$$p = p_0 + \frac{dp}{dx} \cdot dx ; \tag{7.9.5}$$

din (7.9.3), se obține

$$p = p_0 + 6\eta(v_1 + v_2)\int_0^x \frac{dx}{c^2} - 12\eta Q \int_0^x \frac{dx}{c^3}. \tag{7.9.6}$$

Integralele din relația (7.9.6) au următoarele expresii :

$$I_1 = \int_0^x \frac{dx}{(e_0 + x^2/R)^2} = \frac{R}{2e_0\sqrt{Re_0}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{Re_0}} + \frac{Rx}{2e_0(x^2 + Re_0)};$$

$$I_2 = \int_0^x \frac{dx}{e_0 + x^2/R} = \frac{3\sqrt{Re_0}}{8e_0^3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{Re_0}} + \frac{R}{e_0^2} \frac{3x^3 + 5xRe_0}{8(x^2 + Re_0)^2}.$$

Pentru $x = 0$, se respectă condiția $p = p_0$, deoarece $I_1 = I_2 = 0$. Condiția ca la o distanță suficient de mare de axa O_1O_2, $p = p_0$, se poate asocia cu condiția matematică la limită

$$x \to \infty, \quad p = p_0. \tag{7.9.7}$$

Se obține $$6\eta(v_1 + v_2)\frac{R}{2e_0\sqrt{Re_0}}\frac{\pi}{2} - 12\eta Q \frac{3\sqrt{Re_0}}{8e_0^3}\frac{\pi}{2} = 0.$$

$$Q = \frac{2}{3} e_0(v_1 + v_2). \tag{7.9.8}$$

Rezultă $Q = \frac{2}{3} 0{,}003(0{,}8 \cdot 2 + 0{,}8 \cdot 3{,}5) = 0{,}0088$ m³/s $= 31{,}68$ m³/h,

$$x_m = \sqrt{0{,}8\left[\frac{2 \cdot 0{,}0088}{(0{,}8 \cdot 2 + 0{,}8 \cdot 3{,}5)} - 0{,}003\right]} \cong 28{,}3 \text{ mm}.$$

Problema 7.10. În procedeul extragerii hidrodinamice a pieselor mecanice*, pe fața unui cilindru hidraulic cu diametrul exterior $D_1 = 100$ mm și diametrul interior $D_2 = 50$ mm, figura 7.10, ce este încărcat cu o forță de mărimea $F = 20\,000$ N, se introduce ulei sub presiune. Să se determine debitul necesar menținerii cilindrului la distanța $h_0 = 0{,}02$ mm. Care este distribuția de presiuni în acest caz pe fața pistonului ?

În ipoteza forței de încărcare constantă, să se determine legea de variație a presiunii și a debitului de alimentare, $p_1 = p_1(t)$, $Q_1 = Q_1(t)$, astfel încît cilindrul să se deplaseze cu viteză constantă în timpul $T = 20$ s pînă la distanța $h_1 = 1$ mm.

Lichidul de lucru este ulei cu viscozitatea dinamică $\eta = 25$ P.

* R. Comolet. Mécanique expérimentale des fluides. Vol. II, Ed. Masson, 1979.

Scanned with OKEN Scanner

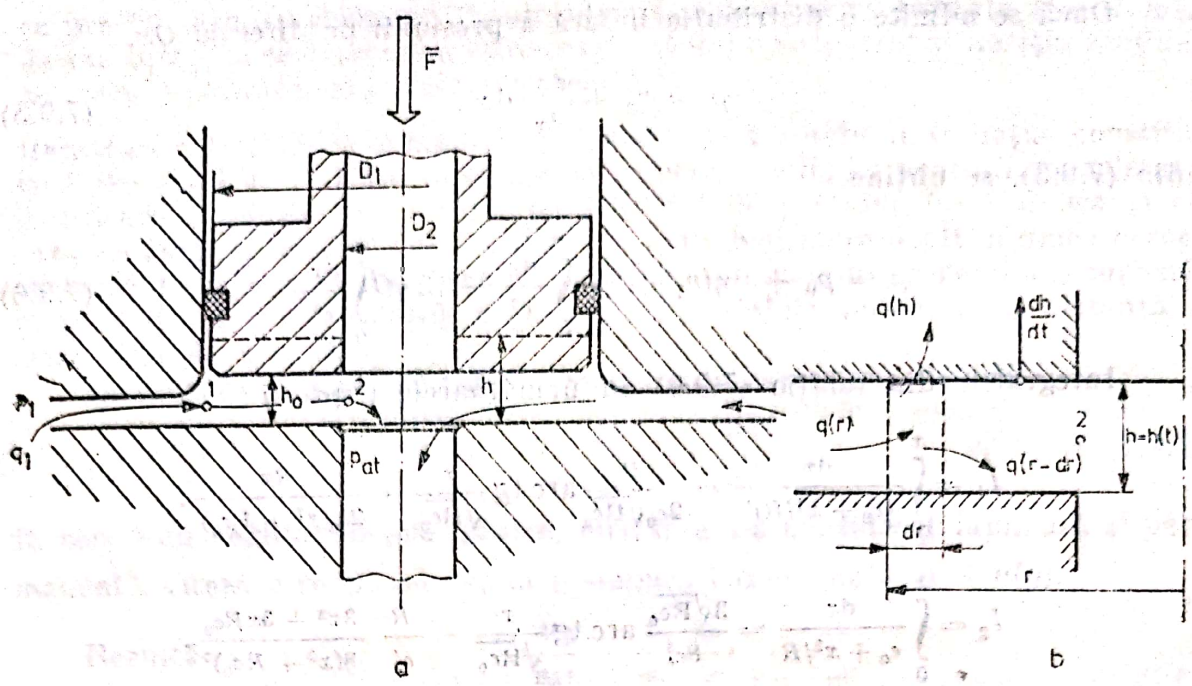


Fig. 7.10.

Rezolvare : În cazul studiat, mişcarea fluidului în spaţiul h_0 se consideră de tip Poiseuille, descrisă de ecuaţia (7.9.2). Debitul se calculează din expresia (7.9.3.), $v_1 = v_2 = 0$.

$$Q = -\frac{1}{\eta}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\,\frac{h^3}{12}\,2\pi r. \tag{7.10.1}$$

Distribuţia presiunii este dată de relaţia

$$p(r) = \int_{r_2}^{r} \frac{6\eta Q}{\pi r h^3}\,\mathrm{d}r = \frac{6\eta Q}{\pi h^3}\,\ln\frac{r}{r_2}, \tag{7.10.2}$$

în care s-a folosit expresia vitezei medii

$$V = \frac{Q}{2\pi r h} = \frac{h^2}{12\eta}\left|\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right|. \tag{7.10.3}$$

Presiunea de alimentare p_1^0 şi debitul corespunzător Q_0 au expresiile

$$p_1^0 = \frac{6\eta Q_0}{\pi h_0^3}\ln\beta, \qquad Q_0 = \frac{\pi h_0^3 p_1^0}{6\eta \ln\beta}, \tag{7.10.4}$$

unde $\beta = r_1/r_2$.

Forţa de încărcare $\vec{F}$ este echilibrată de forţa de presiune rezultată prin integrarea relaţiei (7.10.2) pe suprafaţa pistonului :

$$F = \int_{r_2}^{r_1} 2\pi r p\,\mathrm{d}r = \frac{12\eta Q_0}{h_0^3}\,r_2^2 \int_1^{\beta} x \ln x\,\mathrm{d}x, \tag{7.10.5}$$

cu $x = r/r_2$. Integrînd prin părţi, (7.10.5) capătă forma

$$F = \frac{6\eta Q_0}{h_0^3}\,r_2^2\left(\beta^2\ln\beta - \frac{\beta^2-1}{2}\right) = \frac{\pi r_2^2}{\ln\beta}\,p_1^0\left(\beta^2\ln\beta - \frac{\beta^2-1}{2}\right). \tag{7.10.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

Valoarea debitului și a presiunii de alimentare sînt

$$Q_0 = \frac{h_0^3 F}{6\eta r_2^2(\beta^2 \ln \beta - (\beta^2 - 1)/2)} = \frac{0{,}00002^3 \cdot 20\,000}{6 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}025^2(4 \cdot \ln 2 - (4-1)/2)} = 48{,}27 \frac{\text{cm}^3}{\text{h}};$$

$$p_1^0 = \frac{\ln \beta \cdot F}{\pi r_2^2(\beta^2 \ln \beta - (\beta^2 - 1)/2)} = \frac{\ln 2 \cdot 20\,000}{\pi \cdot 0{,}025^2 \cdot 1{,}27} = 5{,}5 \text{ MPa}.$$

La o valoare a presiunii de alimentare $p_1 > p_1^0$, pistonul se deplasează cu viteza dh/dt. În acest caz, ecuația de continuitate are forma (vezi fig. 7.10, *b*)

$$Q(r) = Q(h) + Q(r - dr),$$

$$Q(r) - Q(r - dr) = [\pi r^2 - \pi(r - dr)^2]dh/dt, \tag{7.10.7}$$

$$\partial Q/\partial r \cong 2\pi r\, dh/dt. \tag{7.10.8}$$

Dacă se exprimă debitul $Q(r)$ în funcție de debitul la ieșire Q_2, ecuația (7.10.7) devine

$$Q(r) = Q_2 + \pi(r^2 - r_2^2)\, dh/dt. \tag{7.10.9}$$

Din (7.10.3) și (7.10.9), rezultă gradientul de presiune în funcție de viteza pistonului

$$\frac{dp}{dr} = \frac{6\eta}{\pi r h^3}\left(Q_2 + \pi(r^2 - r_2^2)\frac{dh}{dt}\right). \tag{7.10.10}$$

Variația presiunii și presiunea de alimentare se obțin prin integrarea relației (7.10.10)

$$p(r) = \int_{r_2}^{r} \frac{dp}{dr}\, dr = \frac{6\eta}{h^3}\left[\left(\frac{Q_2}{\pi} - r_2^2\frac{dh}{dt}\right)\ln\frac{r}{r_2} + \frac{dh}{dt}\left(\frac{(r^2 - r_2^2)}{2}\right)\right];$$

$$p_1 = \frac{6\eta}{h^3}\left[\left(\frac{Q_2}{\pi} - r_2^2\frac{dh}{dt}\right)\ln\beta + \frac{dh}{dt}r_2^2\left(\frac{\beta_2^2 - 1}{2}\right)\right]. \tag{7.10.11}$$

Forța de presiune rezultantă este

$$F_p = \int_{r_2}^{r_1} 2\pi r p(r)\, dr = 2\pi r_2^2 \int_1^\beta \frac{6\eta}{h^3} x\left[\left(\frac{Q_2}{\pi} - r_2^2\frac{dh}{dt}\right)\ln x + \frac{dh}{dt}r_2^2\frac{x^3 - 1}{2}\right]dx =$$

$$= \frac{6\pi r_2^2\eta}{h^3}\left(\frac{Q_2}{\pi} - r_2^2\frac{dh}{dt}\right)\left(\beta^2 \ln\beta - \frac{\beta^2 - 1}{2}\right) + \frac{3\pi r_2^4\eta}{2h^3}\frac{dh}{dt}(\beta^2 - 1)^2. \tag{7.10.12}$$

În ipoteza unei deplasări foarte lente a pistonului, forțele inerțiale se pot neglija și ecuația de echilibru este dată de relația

$$\vec{F}_p = \vec{F}_0.$$

Astfel, din (7.10.6), (7.10.9), (7.10.11) și (7.10.12), se obțin valorile debitului și presiunii

$$Q_2 = \pi r_2^2\frac{dh}{dt} + \frac{\pi}{\ln\beta}\left[\frac{p_1 h^3}{6\eta} - \frac{r_2^2}{2}(\beta^2 - 1)\frac{dh}{dt}\right]; \tag{7.10.13}$$

$$\frac{6\pi r_2^2\eta}{h^3}\left\{\pi r_2^2\frac{dh}{dt} + \frac{1}{\ln\beta}\left[\frac{p_1 h^3}{6\eta} - \frac{r_2^2}{2}(\beta^2 - 1)\frac{dh}{dt}\right] - r_2^2\frac{dh}{dt}\right\} +$$

$$+ \frac{3}{2}\frac{\pi r_2^4}{h^3}\eta\frac{(\beta^2 - 1)^2\, dh/dt}{\beta^2 \ln\beta - (\beta^2 - 1)/2} - \frac{\pi p_1^0 r_2^2}{\ln\beta} = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

din care se obține presiunea

$$p_1 = p_1^0 + \frac{3\eta r_2^2}{h^3}\frac{dh}{dt} f(\beta), \qquad (7.10.14)$$

unde $$f(\beta) = (\beta^2 - 1)\left(1 - \frac{(\beta^2 - 1)\ln\beta}{2\beta^2\ln\beta - (\beta^2 - 1)}\right) =$$

$$= (4 - 1)\left[1 - \frac{(4 - 1)\ln 2}{2 \cdot 4\ln 2 - (4 - 1)}\right] = 0{,}548,$$

$$Q_1 = \pi r_1^2 \frac{dh}{dt} + \frac{\pi h^3}{6\eta\ln\beta} p_1 - \frac{\pi r_2^2}{2}\frac{(\beta^2 - 1)}{\ln\beta}\frac{dh}{dt}, \qquad (7.10.15)$$

$$Q_1 = \pi r_2^2\left[\beta^2 + \frac{f(\beta)}{2\ln\beta}\cdot\frac{p_1}{p_1 - p_1^0} - \frac{\beta^2 - 1}{2\ln\beta}\right]\frac{dh}{dt}.$$

Condiția de deplasare a pistonului este ca viteza să fie constantă, iar, la timpul $t = T = 20$ s, cota $h = h_1 = 1$ mm.

Rezultă $$h = h_0 + Vt, \qquad dh/dt = (h_1 - h_0)/T \qquad (7.10.16)$$

$$V = (h_1 - h_0)/T = (0{,}001 - 0{,}00002)/20 = 0{,}049 \text{ mm/s}.$$

Cu (7.10.16) introdus în (7.10.14) și (7.10.15), se obțin legile de variație în timp a presiunii și debitului de alimentare

$$p_1 = p_1^0 + \frac{3\eta r_2^2}{(h_0 + Vt)^3}\cdot Vf(\beta) = 5{,}5 + \frac{3 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}025^2 \cdot 0{,}000049}{(0{,}00002 + 0{,}000049 \cdot t)^3}\cdot 0{,}548 \cdot 10^{-6},$$

$$p_1 = 5{,}5 + 125{,}8/(2 + 4{,}9\ t)^3 \text{ MPa}. \qquad (7.10.17)$$

$$Q_1 = \pi r_2^2\left[\beta^2 + \frac{f(\beta)}{2\ln\beta}\cdot\frac{p_1}{p_1 - p_1^0} - \frac{\beta^2 - 1}{2\ln\beta}\right]V =$$

$$= \pi 0{,}025^2\left[4 + \frac{0{,}548}{2\ln 2}\cdot\frac{5{,}5 + 125{,}8/(2 + 4{,}9t)^3}{125{,}8/(2 + 4{,}9t)^3} - \frac{4 - 1}{2\ln 2}\right]0{,}000049. \qquad (7.10.18)$$

$$Q = 1{,}76 \cdot 10^{-7} + 3{,}02 \cdot 10^{-10}[5{,}5(2 + 4{,}9\ t)^3 + 125{,}8] \text{ m}^3/\text{s}.$$

Pentru poziția finală, se găsesc valorile

$$p_1 = 5{,}5 + 125{,}8/(2 + 4{,}9 \cdot 20)^3 \cong 5{,}5 \text{ MPa};$$

$$Q_1 = 1{,}76 \cdot 10^{-7} + 3{,}02 \cdot 10^{-10}[5.5(2 + 4{,}9 \cdot 20)^3 + 125{,}8] = 1{,}66 \text{ l/s}.$$

Deci, pentru asigurarea deplasării pistonului cu o viteză constantă, presiunea de alimentare trebuie menținută practic constantă, iar debitul trebuie să aibă o creștere exponențială dată de legea

$$Q = C_1 + C_2(C_3 + t)^3.$$

În obținerea acestui rezultat, neglijarea forțelor inerțiale a redus problema la un regim cvasistaționar. Astfel, valoarea numerică obținută se poate găsi imediat din relația (7.10.4).

Rezultatul (7.10.17) ne arată că influența pierderilor de sarcină, deci a forțelor de viscozitate, este mică comparativ cu forțele de presiune. Modelul prezentat își pierde valabilitatea în cazul în care h are același ordin de mărime cu r_2 sau în cazul deplasării mai rapide a pistonului.

Scanned with OKEN Scanner

Problema 7.11. Un piston diferențial cu raza $R = 10$ mm coboară sub acțiunea greutății proprii $G = 1{,}5$ N (fig. 7.11), dezlocuind, printr-o fantă cu înălțimea $h_0 = 0{,}5$ mm, o cantitate de fluid care are viscozitatea dinamică $\eta = 90$ cP. Să se determine legea de variație a grosimii h a fluidului funcție de timp și să se calculeze durata necesară pentru ca pistonul să ajungă la distanța $h_m = 30$ μm față de peretele solid fix. (Se presupune că în momentul inițial al coborîrii, pistonul se află la distanța h_0).

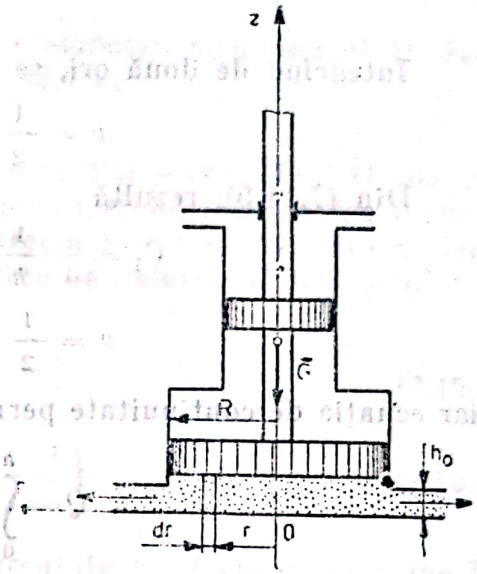


Fig. 7.11.

Rezolvare : În ipoteza unei deplasări lente a pistonului, viteza fluidului în direcția z este neglijabilă față de componenta vitezei pe direcția razei r. Mișcarea fiind axial-simetrică, iar forțele masice neglijabile, sistemul de ecuații Navier-Stokes în coordonate cilindrice (7.1.4), (7.1.5) și ecuația de continuitate (7.1.6) iau forma

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2}\right), \qquad (7.11.1)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0. \qquad (7.11.2)$$

În stabilirea relațiilor (7.11.1) și (7.11.2), s-au folosit următoarele ipoteze simplificatoare

$$p = p(r),$$

$$v_r = v_r(r, z), \quad \frac{\partial v_r}{\partial t} = 0, \qquad (7.11.3)$$

$$v_\theta = v_z = 0, \; f_r = f_\theta = f_z = 0.$$

Din expresia (7.11.2) a ecuației de continuitate, rezultă că viteza de deplasare a fluidului are forma

$$v_r = v = \frac{C}{r},$$

unde C este o constantă care depinde de înălțimea h (respectiv de poziția pistonului pe axa z) $C = C(h)$.

Ecuația (7.11.1) devine

$$\rho\frac{v^2}{r} + \eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{dp}{dr}. \qquad (7.11.4)$$

Pentru o valoare fixă a razei r, ecuația (7.11.4) este o ecuație diferențială cu condițiile la limită

$$z = 0, \; v = 0$$

$$z = h, \; v = -dh/dt, \text{ viteza de coborîre a pistonului} \qquad (7.11.5)$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{1}{\nu}\frac{v^2}{r} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dr}. \qquad (7.11.6)$$

Rezolvarea ecuației (7.11.6) cu condițiile la limită (7.11.5) se poate face printr-o procedură numerică iterativă (tip Runge-Kutta). O rezolvare analitică aproximativă se prezintă în cele ce urmează :

În ipoteza neglijării forțelor de inerție, relația (7.11.6) are forma ecuației diferențiale, care descrie mișcarea Hagen-Poiseuille

$$\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dr}. \tag{7.11.7}$$

Integrînd de două ori, se obține

$$v = \frac{1}{2}\frac{dp}{dr}z^2 + C_1z. + C_2. \tag{7.11.8}$$

Din (7.11.5), rezultă

$$C_1 = -\frac{1}{h}\frac{dh}{dt} - \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dr}h,\ C_2 = 0,$$

$$v = \frac{1}{2}\frac{dp}{dr}z(z-h) - \frac{z}{h}\frac{dh}{dt}, \tag{7.11.9}$$

iar ecuația de continuitate permite calculul debitului

$$Q = \int_0^h v2\pi r dz = -\pi r^2\frac{dh}{dt}. \tag{7.11.10}$$

Din (7.11.9) și (7.11.10), rezultă expresia gradientului de presiune după raza r a pistonului

$$\frac{dp}{dr} = \frac{6\eta}{h^3}(r-h)\frac{dh}{dt}. \tag{7.11.11}$$

Cu condiția la limită $r = R$, $p = 0$ (se lucrează cu presiunea relativă), se obține

$$p = \frac{6\eta}{h^3}\frac{dh}{dt}\left(\frac{r^2}{2} - rh\right) + C\,;\quad C = \frac{6\eta}{h^3}\frac{dh}{dt}\left(Rh - \frac{R^2}{2}\right);$$

$$p = \frac{6\eta}{h^3}\frac{dh}{dt}\left[h(R-r) + \frac{1}{2}(r^2 - R^2)\right].$$

Presupunînd că mișcarea de coborîre a pistonului se realizează cu viteză constantă, $dh/dt = const.$, forța de presiune P trebuie să fie egală cu forța de greutate G.

Rezultă
$$P = \int_0^R p2\pi r dr = \frac{6\pi\eta R^3}{h^3}\frac{dh}{dt}\left(\frac{h}{3} - \frac{R}{4}\right) = G,$$

$$\frac{dh}{dt}\left[\frac{1}{3h^2} - \frac{R}{4h^3}\right] = \frac{G}{6\pi\eta R^3}. \tag{7.11.12}$$

Ecuația diferențială (7.11.12) se integrează de-a lungul lui h, între h_0 și h_m, și pentru timpul t, între 0 și t_m.

$$t_m = \frac{3\pi\eta R^4}{4G}\left[\left(\frac{1}{h_m^2} - \frac{1}{h_0^2}\right) - \frac{8}{3R}\left(\frac{1}{h_m} - \frac{1}{h_0}\right)\right].$$

Astfel, se obține timpul de coborîre a pistonului

$$t_m = \frac{3\pi 9\cdot 0{,}01^4}{4\cdot 1{,}5}\left[\left(\frac{1}{(30\cdot 10^{-6})^2} - \frac{1}{(0{,}5\cdot 10^{-3})^2}\right) - \frac{8}{3\cdot 0{,}01}\left(\frac{1}{30\cdot 10^{-6}} - \frac{1}{0{,}5\cdot 10^{-3}}\right)\right] = 155\ \text{s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Problema 7.12. Pentru etalonarea manometrelor de înaltă presiune, se folosește o presă hidraulică, figura 7.12, formată dintr-un piston cu diametrul $d = 20$ mm, care culisează într-un alezaj cu diametrul $D_1 = 20{,}050$ mm și $D_2 = 20{,}020$ mm. Pistonul este încărcat cu o greutate $\vec{F}_g$ care dă naștere unei presiuni p_0 în fluidul din camera pistonului.

Datorită jocului h dintre piston și cilindru, se scurge în atmosferă un debit de fluid q.

Să se determine presiunea p_0 la care se etalonează manometrul M, dacă masa cu care se încarcă pistonul este $m = 192{,}7$ kg.

Se cunosc : $\eta = 1$ P, $l = 100$ mm.

Rezolvare : Avînd în vedere că diferența dintre diametrele D_1 și D_2 ale alezajului este mică, se poate considera că mișcarea uleiului între piston și alezaj este o mișcare laminară între două plane paralele aflate la distanța h. Deci distribuția de viteze și debitul scurs sînt date de relațiile (7.9.2) și (7.9.3), $V_1 = V_2 = 0$.

$$v = -\frac{dp}{dx}\frac{y(h-y)}{2\eta}; \tag{7.12.1}$$

$$q = -\frac{dp}{dx}\frac{\pi d h^3}{12\eta}\left(1 + \frac{h}{d}\right). \tag{7.12.2}$$

Asupra pistonului acționează forța de greutate $\vec{F}_g$, forța de presiune $\vec{F}_p$ și forța de frecare $\vec{F}_f$ datorită efortului tangențial.

Rezultă
$$\vec{F}_g = \vec{F}_p + \vec{F}_f. \tag{7.12.3}$$

Efortul tangențial τ este definit de relația

$$\tau = \eta\frac{dv}{dy}\bigg|_{y=0} = \eta\left[\frac{dp}{dx}\frac{(h-2y)}{2\eta}\right]_{y=0} = -\frac{dp}{dx}\frac{h}{2}. \tag{7.12.4}$$

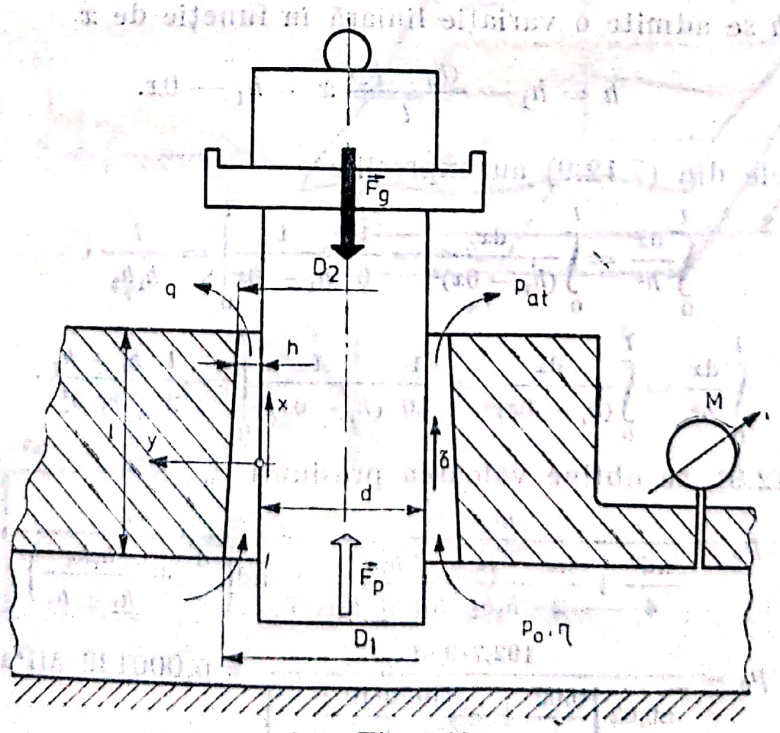


Fig. 7.12.

Din (7.12.2), gradientul de presiune rezultă

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{12\eta q}{\pi d h^3}, \tag{7.12.5}$$

unde s-a neglijat termenul $h/d \ll 1$.

Expresia forței de frecare este

$$F_f = \int_S \tau dA = \int_0^l \frac{12\eta q}{\pi d h^3} \frac{h}{2} \pi d dx = 6\eta q \int_0^l \frac{dx}{h^2}. \tag{7.12.6}$$

Dacă presiunea relativă din cameră este p_0, din (7.12.2) se obține

$$dp = -\frac{12\eta q}{\pi d h^3} dx; \qquad p_0 = \frac{12\eta q}{\pi d} \int_0^l \frac{dx}{h^3}.$$

Deci valoarea debitului scurs este $q = \frac{\pi d p_0}{12\eta} \cdot \frac{1}{\int_0^l dx/h^3}$. (7.12.7)

Din (7.12.6) și (7.12.7) rezultă $F_f = \frac{\pi d p_0}{2} \cdot \frac{\int_0^l dx/h^2}{\int_0^l dx/h^3}$. (7.12.8)

Relația de echilibru a forțelor (7.12.3) capătă forma

$$mg = \frac{\pi d^2}{4} p_0 + \frac{\pi d p_0}{2} \frac{\int_0^l dx/h^2}{\int_0^l dx/h^3}. \tag{7.12.9}$$

Pentru h se admite o variație liniară în funcție de x

$$h = h_1 - \frac{(h_1 - h_2)}{l} x = h_1 - \theta x. \tag{7.12.10}$$

Integralele din (7.12.9) au expresiile

$$\int_0^l \frac{dx}{h^2} = \int_0^l \frac{dx}{(h_1 - \theta x)^2} = \frac{1}{\theta} \frac{1}{h_1 - \theta x}\Big|_0^l = \frac{l}{h_1 h_2},$$

$$\int_0^l \frac{dx}{h^3} = \int_0^l \frac{dx}{(h_1 - \theta x)^3} = \frac{1}{2\theta} \frac{1}{(h_1 - \theta x)^2}\Big|_0^l = \frac{l}{2} \frac{h_1 + h_2}{h_1^2 \cdot h_2^2}.$$

Din (7.12.9), se obține valoarea presiunii p_0

$$p_0 = \frac{mg}{\frac{\pi d^2}{4} + \frac{\pi d}{2} \frac{l}{h_1 h_2} \frac{2h_1^2 h_2^2}{l(h_1 + h_2)}} = \frac{mg}{\pi d\left(\frac{d}{4} + \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}\right)}, \tag{7.12.11}$$

$$p_0 = \frac{192{,}7 \cdot 9{,}81}{\pi 0{,}02\left(\frac{0{,}02}{4} + \frac{50 \cdot 20 \cdot 10^{-12}}{(50 + 20) \cdot 10^{-6}}\right)} = 6{,}000146 \text{ MPa},$$

Scanned with OKEN Scanner

iar debitul scurs rezultă

$$q = \frac{\pi d p_0}{12\eta} \frac{1}{\frac{l}{2} \cdot \frac{h_1 + h_2}{h_1^3 h_2^3}} = \frac{\pi 0{,}02 \cdot 6 \cdot 10^6}{12 \cdot 0{,}1} \frac{(50 \cdot 20 \cdot 10^{-12})^2}{0{,}05(50 + 20) \cdot 10^{-6}} = 0{,}089 \text{ cm}^3/\text{s}$$

Din relaţia (7.12.11), rezultă că presiunea p_0 nu este funcţie decît de caracteristicile geometrice ale instalaţiei şi, în principal, de precizia de prelucrare a alezajului, eroarea faţă de un calcul simplificat al presiunii $p_0 = mg/(\pi d^2/4)$ fiind dată de mărimea jocurilor. În cazul exemplului numeric din problemă, eroarea are valoarea

$$\varepsilon = \frac{6{,}000146 - 6{,}0172888}{6{,}000146} \cdot 100 = -0{,}28\%.$$

Pentru presele de etalonat manometre la presiuni mari, $p_0 > 50$ MPa, trebuie să se ţină seama de două fenomene care apar suplimentar : deformarea tijei pistonului şi variaţia viscozităţii fluidului cu presiunea. În aceste condiţii, relaţiile (7.12.6), (7.12.7) şi (7.12.8) nu mai sînt valabile, sub integrală intrînd d şi η, ale căror variaţii cu presiunea pe lungimea l trebuiesc cunoscute.

Avînd în vedere că relaţiile $d = d(x)$ şi $\eta = \eta(x)$ se determină dificil, soluţia practică este de a mări precizia de prelucrare a pistonului şi alezajului, astfel încît ponderea acestor termeni să fie neglijabilă.

Problema 7.13. Să se determine repartiţia presiunii pe talpa patinei lagărului din figura 7.13 şi sarcina F_y pe care o poate suporta patina, dacă viteza de deplasare a suprafeţei de sprijin este $V_0 = 3$ m/s, lăţimea acesteia este

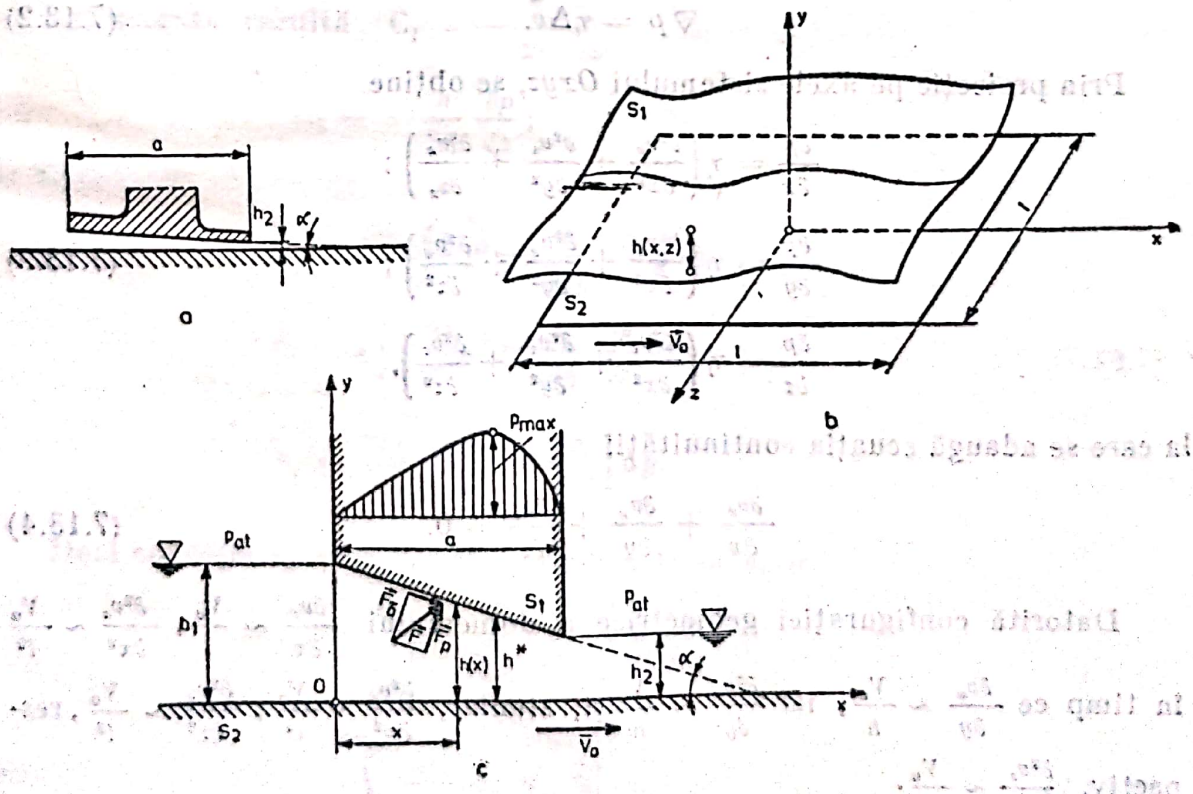


Fig. 7.13.

$a = 60$ mm, grosimea minimă a filmului de lubrifiant este $h_2 = 0{,}2$ mm, unghiul de fixare a patinei este $\alpha = 0{,}2°$, lățimea patinei perpendiculară pe desen este $B = 150$ mm, iar viscozitatea uleiului din lagăr este $\eta = 0{,}8$ P.

Rezolvare : Pentru rezolvarea problemei lagărului axial, este necesar să se găsească o soluție a ecuațiilor de mișcare (Navier-Stokes) pentru un model de curgere asemănător lagărului.

Se consideră că lubrifiantul ocupă domeniul $\mathcal{D}$ limitat de suprafețele S_1 și S_2, distanțate cu $h(x, z)$. Curbura suprafețelor este mică, astfel încît una dintre ele (de exemplu S_2) poate fi considerată plană, iar cealaltă distanțată cu $h\ (x, z)$ de precedenta (fig. 7.13, *b*).

Suprafața S_2 are o mișcare de translație în propriul plan cu viteza $\vec{V}_0 = V_0\vec{i} = \overrightarrow{const.}$ Se presupune că $h(x, z)$ variază lent cu x și z, astfel încît se poate admite că, în domeniul $\mathcal{D}$, liniile de curent au forme apropiate de drepte paralele cu axa Ox.

Datorită spațiului mic, $h \cong 10^{-3}$ m, față de $l = 1$ m, forțele convective de inerție sînt mici și se pot neglija : $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = 0$; considerînd mișcarea permanentă, ecuația de mișcare este

$$\vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{v} = 0. \tag{7.13.1}$$

Relația (7.13.1) este ecuația lui Stokes în regim permanent.

Ecuația (7.13.1) se poate simplifica. Astfel, $|\vec{f}| \ll \frac{1}{\rho}\nabla p$ și se poate considera $\vec{f} \cong 0$, deci se obține

$$\nabla p = \eta\Delta\vec{v}. \tag{7.13.2}$$

Prin proiecție pe axele sistemului $Oxyz$, se obține

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= \eta\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z_x}\right);\\
\frac{\partial p}{\partial y} &= \eta\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right);\\
\frac{\partial p}{\partial z} &= \eta\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right),
\end{aligned} \tag{7.13.3}$$

la care se adaugă ecuația continuității

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{7.13.4}$$

Datorită configurației geometrice a domeniului $\frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{V_0}{l}$, $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{V_0}{l^2}$ în timp ce $\frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{V_0}{h}$, iar $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \frac{V_0}{h^2}$ și, similar, $\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \sim \frac{V_0}{l^2}$; $\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \sim \frac{V_0}{l^2}$, respectiv, $\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \sim \frac{V_0}{h^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci derivatele vitezelor v_x și v_z în raport cu variabila x, respectiv z, sînt mult mai mici decît cele în raport cu variabila y și deci se pot neglija, astfel încît, din ecuațiile (7.13.3) și (7.13.4), rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} &+ \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \tag{7.13.5}$$

Din ecuația a doua rezultă că presiunea $p(x, z)$ nu este funcție de variabila y și, integrînd, rezultă

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2 \\ v_z &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + C_3 y + C_4 \\ v_y &= -\int_0^y \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dy + C_5. \end{aligned} \tag{7.13.6}$$

Constantele C_1, C_2, C_3, C_4 și C_5 se determină din condiții la limite:
A. pe suprafața mobilă, $y = 0$, pentru care $v_x = V_0$, $v_y = v_z = 0$;
B. pe suprafața fixă, $y = h(x, z)$, pentru care $v_x = v_y = v_z = 0$.

Cu aceasta rezultă $C_1 = -\frac{h}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{V_0}{h}$; $C_2 = 0$;

$$C_3 = -\frac{h}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z}; \quad C_4 = 0; \quad C_5 = 0,$$

iar vitezele au expresiile

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 - \frac{h}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y - \frac{V_0}{h} y + V_0 \\ v_z &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 - \frac{h}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z} y \\ v_y &= -\int_0^y \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dy. \end{aligned} \tag{7.13.7}$$

Deci condiția $v_y = 0$, pentru $y = h(x, z)$, se scrie

$$\int_0^{h(x,z)} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dy = 0,$$

sau

$$\int_0^{h(x,z)} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \int_0^{h(x,z)} \frac{\partial v_z}{\partial z} dy = 0. \tag{7.13.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci derivatele vitezelor v_x şi v_z în raport cu variabila x, respectiv z, sînt mult mai mici decît cele în raport cu variabila y şi deci se pot neglija, astfel încît, din ecuaţiile (7.13.3) şi (7.13.4), rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} &+ \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \tag{7.13.5}$$

Din ecuaţia a doua rezultă că presiunea $p(x, z)$ nu este funcţie de variabila y şi, integrînd, rezultă

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2 \\ v_z &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + C_3 y + C_4 \\ v_y &= -\int_0^y \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dy + C_5. \end{aligned} \tag{7.13.6}$$

Constantele C_1, C_2, C_3, C_4 şi C_5 se determină din condiţii la limite:
A. pe suprafaţa mobilă, $y = 0$, pentru care $v_x = V_0$, $v_y = v_z = 0$;
B. pe suprafaţa fixă, $y = h(x, z)$, pentru care $v_x = v_y = v_z = 0$.

Cu aceasta rezultă $C_1 = -\frac{h}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{V_0}{h}$; $C_2 = 0$;

$$C_3 = -\frac{h}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z}; \quad C_4 = 0; \quad C_5 = 0,$$

iar vitezele au expresiile

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 - \frac{h}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y - \frac{V_0}{h} y + V_0 \\ v_z &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 - \frac{h}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z} y \\ v_y &= -\int_0^y \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dy. \end{aligned} \tag{7.13.7}$$

Deci condiţia $v_y = 0$, pentru $y = h(x, z)$, se scrie

$$\int_0^{h(x,\,z)} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dy = 0,$$

sau

$$\int_0^{h(x,\,z)} \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \int_0^{h(x,\,z)} \frac{\partial v_z}{\partial z} dy = 0. \tag{7.13.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru o integrală cu limite variabile, se poate scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(x,\,z)} v_x dy = \int_0^{h(x,\,z)} \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dy + [v_x]_{y=h}\frac{\partial h}{\partial x} = \int_0^{h(x,\,z)} \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dy,$$

respectiv $$\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{h(x,\,z)} v_z dy = \int_0^{h(x,\,z)} \frac{\partial v_z}{\partial z}\,dy + [v_z]_{y=h}\frac{\partial h}{\partial z} = \int_0^{h(x,\,z)} \frac{\partial v_z}{\partial z}\,dy.$$

Cu aceasta, relaţia (7.13.8) devine

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(x,\,z)} v_x dy + \frac{\partial}{\partial z}\int_0^{h(x,\,z)} v_z dy = 0. \tag{7.13.9}$$

Ţinînd seama de expresiile vitezelor v_x şi v_z din relaţia (7.13.7), relaţia (7.13.9) devine

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right] = 6\eta V_0\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{7.13.10}$$

Relaţia (7.13.10) se numeşte relaţia lui Reynolds pentru lubrificaţie. Geometria lagărului fiind dată, se cunoaşte $h = h(x, z)$ şi, din relaţia (7.13.10), se determină presiunea şi, prin integrare, forţa din lagăr.

Pentru cazul considerat, se admite un palier plan format din două plăci plane, infinite în lungul axei Oz. Placa inferioară orizontală are viteza $\vec{V}_0$, dirijată în lungul axei Ox, iar placa superioară, înclinată cu unghiul α faţă de prima, este fixă. Mişcarea lichidului între suprafeţele solide este identică în toate planele paralele cu xOy, deci mişcarea este plană, adică $v_z = 0$ şi $\frac{\partial}{\partial z} = 0$.

Cu aceasta, ecuaţia lui Reynolds (7.13.10) devine

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 6\eta V_0\frac{\partial h}{\partial x} \tag{7.13.11}$$

şi, integrînd în raport variabila x, rezultă

$$h^3\frac{\partial p}{\partial x} = 6\eta V_0 h + C_1. \tag{7.13.12}$$

Condiţiile la limite pentru presiune sînt:

A. pentru $x = 0$, $p = p_{at}$ respectiv

B. pentru $x = a$, $p = p_{at}$. (7.13.13)

Rezultă că, între $x = 0$ şi $x = a$, presiunea are un maxim ($\partial p/\partial_x = 0$). Fie h^* grosimea stratului de ulei în dreptul valorii maxime a presiunii. Cu aceasta, relaţia (7.13.12) devine

$$C_1 = -6\eta V_0 h^*$$

şi deci $$\frac{dp}{dx} = 6\eta V_0\left(\frac{1}{h^2} - \frac{h^*}{h^3}\right). \tag{7.13.14}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru integrarea relației (7.13.14), se face schimbarea variabilei x în variabila h, legătura fiind dată de geometria lagărului

$$h = h_1 - \frac{h_1 - h_2}{a} x,$$

de unde $$\mathrm{d}h = -\frac{h_1 - h_2}{a}\,\mathrm{d}x$$

și, înlocuind în relația (7.13.14), se obține

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = -\frac{6\eta a V_0}{h_1 - h_2}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{h^*}{h^3}\right). \qquad (7.13.15)$$

Prin integrare, rezultă

$$p = \frac{6\eta a V_0}{h_1 - h_2}\,\frac{1}{h}\left(1 - \frac{h^*}{2h}\right) + C_2. \qquad (7.13.16)$$

Pentru determinarea constantelor h^* și C_2, se folosesc condițiile la limite (7.13.13), scrise sub forma

A. $h = h_1 (x = 0)$, $p = p_{at}$;

B. $h = h_2 (x = a)$, $p = p_{at}$

și rezultă $$h^* = 2\,\frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \quad \text{și} \quad C_2 = p_{at} - \frac{6\eta a V_0}{h_1 - h_2}\,\frac{1}{h_1}\left(1 - \frac{h_2}{h_1 + h_2}\right),$$

respectiv presiunea în filmul de ulei are expresia

$$p = p_{at} + \frac{6\eta a V_0}{h_1 - h_2}\left[\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1} - \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_1^2}\right)\right]. \qquad (7.13.17)$$

Forțele care apar în lagăr au expresiile

$$F_p = \int_0^a (p - p_{at}) \cdot 1\,\mathrm{d}x; \qquad F_f = \int_0^a \tau \cdot 1\,\mathrm{d}x,$$

în care s-a considerat lungimea palierului $B = 1$, iar valoarea tensiunii tangențiale este $\tau = \eta(\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}y)_{y=h}$. Se obțin expresiile:

$$F_p = \frac{6\eta a^2 V_0}{h_2^2 (k-1)^2}\left[\ln k - 2\,\frac{k-1}{k+1}\right]; \qquad (7.13.18)$$

$$F_f = \frac{2\eta a V_0}{h_2 (k-1)}\left[3\,\frac{k-1}{k+1} - \ln k\right], \text{ cu } k = h_1/h_2. \qquad (7.13.19)$$

Pentru un palier cu lungimea B, considerînd fenomenul plan, expresiile forțelor de presiune și de viscozitate sînt

$$F_p = \frac{6\eta a^2 V_0 B}{h_2^2 (k-1)^2}\left[\ln k - 2\,\frac{k-1}{k+1}\right];$$

$$F_f = \frac{2\eta a V_0 B}{h_2 (k-1)}\left[3\,\frac{k-1}{k+1} - \ln k\right].$$

În cazul considerat, se obține (cu $h_1 = h_2 + a \operatorname{tg} \alpha = 0{,}4$ mm)

$$F_p = \frac{6 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}06^2 \cdot 3 \cdot 0{,}15}{0{,}2^2 \cdot 10^{-6} (2-1)^2}\left[\ln 2 - 2\,\frac{2-1}{2+1}\right] = 514{,}8 \text{ N};$$

$$F_f = \frac{2 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}06 \cdot 3 \cdot 0{,}15}{0{,}2 (2-1) \cdot 10^{-3}}\left[3\,\frac{2-1}{2+1} - \ln 2\right] = 6{,}6 \text{ N}.$$

Deci $$F = \sqrt{F_p^2 + F_f^2} = \sqrt{514{,}8^2 + 6{,}6^2} = 514{,}8 \text{ N}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Forţa portantă a lagărului este

$$F_y = F \cos \alpha = 514{,}8 \cdot \cos 0{,}2 = 514{,}8 \quad \text{N}.$$

În problema 7.14, se revine asupra influenţei lungimii finite a palierului.

Problema 7.14. Să se determine pentru lagărul axial din figura 7.14 forţa portantă şi forţa de frecare în filmul de lubrifiant prin integrarea directă a sistemului de ecuaţii Navier-Stokes.

Se cunosc : diametrele $D_1 = 1{,}6$ m şi $D_2 = 2{,}5$ m, numărul de segmente $m = 11$ (vezi fig. 7.14, *b*), înălţimile $h_1 = 120\ \mu$m şi $h_2 = 55\ \mu$m (vezi fig. 7. 14, *a*), turaţia lagărului $n = 150$ rot/min, viscozitatea lubrifiantului $\eta = 0{,}025$ Pa s (procesul se consideră izoterm).

Rezolvare : Pentru studiu, se consideră un segment de lagăr axial, în care curgerea este unidimensională ($v = v_\theta$). Spaţiul în care are loc mişcarea lubrifiantului, fiind foarte mic în comparaţie cu celelalte mărimi caracteristice ale lagărului axial, se consideră că mişcarea este laminară, termenul inerţial din (7.1.3) fiind neglijabil faţă de forţele de viscozitate şi de presiune.

În aceste ipoteze, ecuaţiile de mişcare Navier-Stokes (în coordonate cilindrice) se reduc la ecuaţia

$$0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right), \tag{7.14.1}$$

iar ecuaţia de continuitate devine

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0. \tag{7.14.2}$$

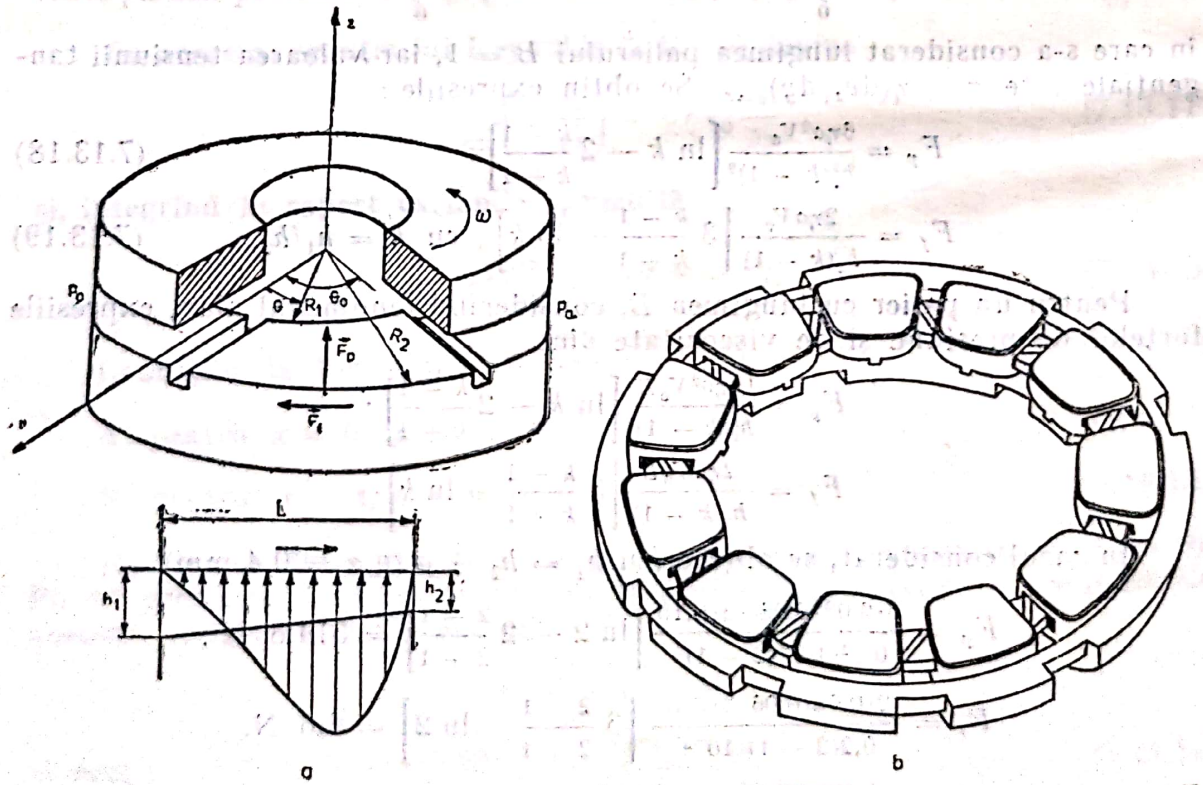


Fig. 7.14.

În stabilirea formelor (7.14.1) şi (7.14.2), s-a considerat mişcarea permanentă, fluidul incompresibil, şi s-au neglijat forţele masice.

Pentru rezolvarea ecuaţiei (7.14.1), se aplică metoda separării variabilelor. Se consideră funcţia necunoscută de forma

$$v_\theta = r\omega \cdot F(\theta, r, z), \tag{7.14.3}$$

cu condiţiile la limită

$$z = 0,\ F(\theta, r, 0) = 1\ ;\ z = h,\ F(\theta, r, h) = 0. \tag{7.14.4}$$

Din (7.14.3) şi (7.14.1), se obţine ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2 \omega \eta} \frac{\partial p}{\partial \theta}. \tag{7.14.5}$$

Integrînd succesiv ecuaţia (7.14.5) şi aplicînd apoi condiţiile la limită (7.14.4), se obţine expresia funcţiei

$$F = \frac{1}{\omega \eta} \frac{1}{2r^2} \frac{\partial p}{\partial \theta} z(z - h) + 1 - \frac{z}{h}$$

şi, în final, din (7.14.3), distribuţia de viteze

$$v_\theta = \frac{1}{2\eta r} \frac{\partial p}{\partial \theta} z(z - h) + r\omega \left(\frac{h - z}{h}\right). \tag{7.14.6}$$

Considerînd variaţia cotei h pe lungimea L de forma

$$h = h_1 - \frac{h_1 - h_2}{\theta_0} \theta$$

şi expresiile derivatelor

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{-(h_1 - h_2)}{\theta_0} \frac{\partial p}{\partial h}; \quad \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = \frac{(h_1 - h_2)^2}{\theta_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial h^2} \text{ şi,}$$

înlocuind (7.14.6) în (7.14.2), se obţine ecuaţia diferenţială

$$\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}h^2} z(z - h) - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} z - \frac{2\eta r^2 \omega \theta_0}{h^2 (h_1 - h_2)} z = 0. \tag{7.14.7}$$

În ipoteza că presiunea este constantă pe direcţia axei z, se integrează relaţia (7.14.7) de la $z = 0$ la $z = h$.

În final, se obţine ecuaţia diferenţială

$$\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}h^2} + 3 \frac{1}{h} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} + \frac{6\eta \omega r^2 \theta_0}{h_1 - h_2} \frac{1}{h^3} = 0. \tag{7.14.8}$$

Ecuaţia (7.14.8) este de tip Ricatti, care se rezolvă astfel: se notează $y = \mathrm{d}p/\mathrm{d}h$ şi se caută soluţia de forma $y = y_0 + t$, unde y_0 este o soluţie particulară a ecuaţiei

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}h} + 3y \frac{1}{h} + k \frac{1}{h^3} = 0, \tag{7.14.9}$$

în care s-a folosit notaţia $k = \dfrac{6\eta \omega r^2 \theta_0}{h_1 - h_2}$,

iar t este o funcţie care urmează a fi determinată din (7.14.8).

Scanned with OKEN Scanner

Cu $y_0 = -k/h^2$, se obține, din (7.14.8), ecuația diferențială

$$\frac{dt}{t} = -3\frac{dh}{h} \quad \text{cu soluția } t = C_1 h^{-3}. \text{ Deci}$$

$$\frac{dp}{dh} = \frac{C_1}{h^3} - k\frac{1}{h^2}, \tag{7.14.10}$$

cu condițiile la limită

$$h = h_1,\ p = p_0;\ h = h_2,\ p = p_0.$$

Prin integrarea ecuației (7.14.10), se obține

$$p = \frac{-C_1}{2h^2} + k\frac{1}{h} + C_2;$$

$$C_1 = 2k\frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}; \qquad C_2 = p_0 + k\frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} + \frac{k}{h_2},$$

și, în final, distribuția de presiune

$$p = p_0 + \frac{6\eta\omega r^2\theta_0}{h_1 - h_2}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1 + h_2} - \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}\frac{1}{h^2}\right). \tag{7.14.11}$$

Expresia forței portante este

$$F_p^0 = \int_0^{\theta_0}\int_{R_1}^{R_2}(p - p_0)r\,dr\,d\theta = -\frac{6\eta\omega\theta_0^2}{(h_1 - h_2)^2}\int_{h_1}^{h_2}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1 + h_2} - \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}\frac{1}{h^2}\right)dh\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr =$$

$$= \frac{6\eta\omega\theta_0^2(R_2^4 - R_1^4)}{4(h_1 - h_2)^2}\left[\ln\frac{h_1}{h_2} - \frac{2(h_1 - h_2)}{h_1 + h_2}\right]. \tag{7.14.12}$$

Efortul tangențial de frecare are expresia

$$\tau = -\eta\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)_{z=h} = \eta\frac{r\omega}{h} + \frac{(h_1 - h_2)h}{2\theta_0}\frac{\partial p}{\partial h}, \tag{7.14.13}$$

iar forța de frecare este

$$F_f^0 = \int_0^{\theta_0}\int_{R_1}^{R_2}\tau r\,dr\,d\theta = \frac{-\theta_0}{h_1 - h_2}\int_{h_1}^{h_2}\int_{R_1}^{R_2}\left[\frac{\eta r\omega}{h} + 3\omega r\eta\left(\frac{-1}{h} + \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2}\cdot\frac{1}{h^2}\right)\right]dr\,dh, \tag{7.14.14}$$

$$F_f^0 = \frac{\eta\theta_0\omega}{h_1 - h_2}\left(\ln\frac{h_1}{h_2} + 3\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}\right)(R_2^2 - R_1^2).$$

Înlocuind în (7.14.9) și (7.14.11) datele numerice cu $\theta_0 = 2\pi/m \cong 0{,}57$, se obține

$$F_p^0 = 3{,}4 \text{ MN și } F_f^0 = 3{,}13 \text{ kN}.$$

În realitate, fenomenul curgerii filmului de lubrifiant este mult mai complex, atît datorită curgerilor secundare care apar pe direcția radială, cît și disipării de energie care duce la scăderea viscozității uleiului prin încălzirea acestuia. Pentru a ține seama de efectul curgerilor radiale, rezultatele teoretice sînt corectate de coeficienți experimentali funcție de raportul B/L și $\alpha = h_1/h_2$, unde $B = R_2 - R_1$ și $L = (R_1 + R_2)/2\cdot\theta_0$.

$$F_p = \eta_p F_p^0,\ F_f = \eta_F F_f^0.$$

Valorile coeficienților η_p și η_F sînt trecute în tabelele următoare*:

Valorile η_p

a \ B/L	1/4	1/2	1	2	4	∞
1,5	0,0545	0,175	0,425	0,685	0,84	1
2	0,058	0,18	0,435	0,69	0,84	1
5	0,085	0,235	0,49	0,725	0,867	1

Valorile η_F

a \ B/L	1/4	1/2	1	2	4	∞
1,5	0,96	0,97	0,98	0,99	0,995	1
2	0,905	0,915	0,94	0,97	0,985	1
5	0,69	0,74	0,825	0,905	0,95	1

Problema 7.15. Un agregat cu arbore vertical, cu sarcina axială $F_a = 460$ kN, este susținut de un pivot hidrostatic cu diametrul $D = 2r_a = 400$ mm, care are un buzunar cu diametrul $d = 2r_1 = 100$ mm, ca în figura 7.15. Știind că uleiul care se folosește la lagăr are viscozitatea dinamică $\eta = 30 \cdot 10^{-3}$ Pa s, iar turația agregatului este $n = 200$ rot/min ($\omega = 20{,}9$ s^{-1}), se cere:

1) să se determine presiunea p_1 necesară pentru alimentarea lagărului;

2) să se determine debitul care trebuie pompat, dacă grosimea filmului de ulei din lagăr variază de la $h_1 = 20$ μm la $h_2 = 250$ μm;

3) să se determine puterea necesară pentru pomparea uleiului și puterea necesară pentru învingerea forțelor de viscozitate din lagăr;

4) să se determine grosimea filmului de ulei, astfel încît puterea consumată, pentru pomparea uleiului și pentru învingerea forțelor de viscozitate, să fie minimă.

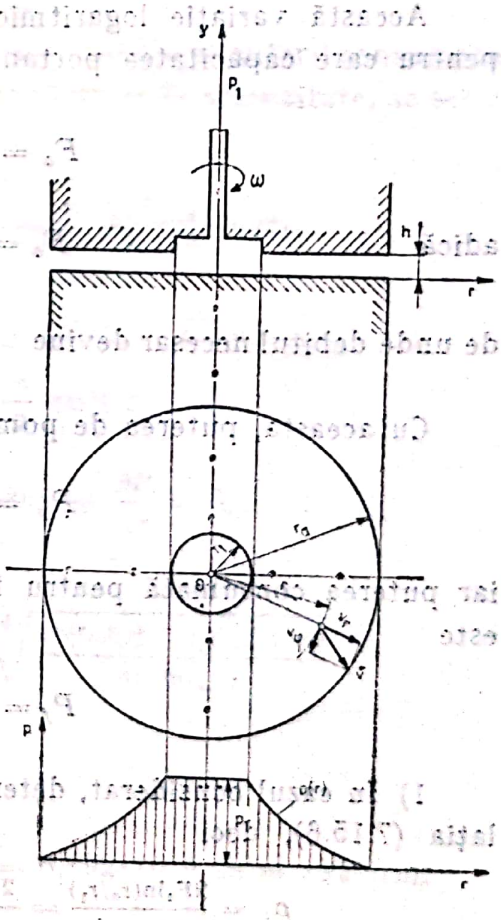


Fig. 7.15.

Rezolvare: În cazul pivoților circulari, ecuația lui Reynolds pentru lubrificație (7.13.10) are forma

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{h}{\eta}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial r}\right)=6r\omega\frac{\partial h}{\partial\theta}. \qquad (7.15.1)$$

* Fréne, J. Paliers hydrodynamiques. Mecanique, Materiaux, Electricite, 1981.

Scanned with OKEN Scanner

Procedînd ca în cazul palierului plan, se obţine*

$$v_r = -\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial r}(h-y)y, \tag{7.15.2}$$

respectiv debitul prin lagăr $Q = \int_0^h 2\pi r v_r \mathrm{d}y = -\frac{\pi r}{\eta}\frac{\partial p}{\partial r}\frac{h^3}{6}$, (7.15.3)

de unde se poate obţine variaţia presiunii în lagăr $\mathrm{d}p = -\frac{6\eta Q}{\pi l^3}\frac{\mathrm{d}r}{r}$,

respectiv $$p = \frac{6\eta Q}{\pi h^3}\ln\frac{r_a}{r}. \tag{7.15.4}$$

În buzunarul hidrostatic, presiunea este

$$p_1 = \frac{6\eta Q}{\pi h^3}\ln\frac{r_a}{r_1}.$$

Se observă că variaţia presiunii în lungul razei este

$$p = p_1\frac{\ln(r_a/r)}{\ln(r_a/r_1)}. \tag{7.15.5}$$

Această variaţie logaritmică poate fi înlocuită cu o variaţie liniară, pentru care capacitatea portantă a lagărului este

$$F_a = \pi r_1^2 p_1 + \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r p \mathrm{d}r,$$

adică $$F_a = \frac{\pi}{2}\frac{r_a^2 - r_1^2}{\ln(r_a/r_1)}p_1, \tag{7.15.6}$$

de unde debitul necesar devine $$Q = \frac{F_a h^3}{3\eta(r_a^2 - r_1^2)}. \tag{7.15.7}$$

Cu aceasta, puterea de pompare este $P_p = Qp_1$, deci

$$P_p = \frac{2}{3\pi}\frac{F_a^2 h^3 \ln(r_a/r_1)}{(r_a^2 - r_1^2)^2}, \tag{7.15.8}$$

iar puterea consumată pentru învingerea forţelor de viscozitate din lagăr este

$$P_f = \frac{\pi}{2}\frac{\eta\omega^2}{h}(r_a^4 - r_1^4). \tag{7.15.9}$$

1) În cazul considerat, determinarea presiunii p_1 necesare se face cu relaţia (7.15.6), deci

$$p_1 = \frac{2F_a\ln(r_a/r_1)}{(r_a^2 - r_1^2)} = \frac{2\cdot 460\cdot 10^3\ln(200/50)}{(0{,}2^2 - 0{,}05^2)} = 10{,}825 \text{ MPa}.$$

* Şt. Stanciu, ş.a. Sisteme hidrostatice portante, Bucureşti, Editura Tehnică, 1985

Scanned with OKEN Scanner

2) Pentru determinarea debitului necesar în lagăr, se foloseşte relaţia (7.15.7), adică

$$Q = \frac{F_a h^3}{3\eta(r_a^2 - r_1^2)} = \frac{460 \cdot 10^3}{3 \cdot 30 \cdot 10^{-3}(0{,}02^2 - 0{,}05^2)} \cdot h^3 = 136{,}3 \cdot 10^6 \cdot h^3 \ \text{m}^3/\text{s}.$$

Deci, pentru $h_1 = 20\ \mu\text{m}$, rezultă $Q_1 = 1{,}09 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3/\text{s}$, respectiv, pentru $h_2 = 250\ \mu\text{m}$, rezultă $Q_2 = 2{,}13 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}$.

3) Puterea necesară pentru pomparea uleiului are expresia (7.15.8), deci

$$P_p = \frac{2}{3\pi} \frac{F_a^2 h^3 \ln(r_a/r_1)}{\eta(r_a^2 - r_1^2)^2} = \frac{2}{3\pi} \frac{(460 \cdot 10^3)^2 \ln(200/50)}{30 \cdot 10^{-3}(0{,}2^2 - 0{,}05^2)^2} \cdot h^3 = 260{,}75 \cdot 10^{12} h^3,$$

adică, pentru $h_1 = 20\ \mu\text{m}$, rezultă $P_{p1} = 2{,}1\ \text{W}$, respectiv, pentru $h_2 = 250\ \mu\text{m}$, rezultă $P_{p2} = 4{,}074\ \text{kW}$.

Puterea disipată de forţele de viscozitate din lagăr are expresia (7.15.9)

$$P_f = \frac{\pi}{2} \frac{\eta\omega^2}{h}(r_a^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{2} \frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot 20{,}9^2}{h}(0{,}2^4 - 0{,}05^4) = \frac{0{,}772}{h},$$

deci, în cazul considerat, pentru $h_1 = 20\ \mu\text{m}$, rezultă $P_{f1} = 3{,}86\ \text{kW}$, iar pentru $h_2 = 250\ \mu\text{m}$, rezultă $P_{f2} = 3{,}09\ \text{kW}$.

4) Pentru a se optimiza lagărul, din punct de vedere al puterii consumate pentru pomparea uleiului şi pentru învingerea forţelor de viscozitate, se scrie puterea totală din relaţiile (7.15.8) şi (7.15.9) şi rezultă

$$P = P_p + P_f = \frac{2}{3\pi} \frac{F_a h^3 \ln(r_a/r_1)}{\eta(r_a^2 - r_1^2)^2} + \frac{\pi}{2} \frac{\eta\omega^2}{h}(r_a^4 - r_1^4),$$

relaţie de forma $P = Ah^3 + B/h$, în care

$$A = \frac{2}{3\pi} \frac{F_a \ln(r_a/r_1)}{\eta(r_a^2 - r_1^2)^2} \quad \text{şi} \quad B = \frac{\pi}{2}\eta\omega^2(r_a^4 - r_1^4).$$

Valoarea optimă se obţine rezolvînd ecuaţia $\frac{\partial P}{\partial h} = 0$,

deci $$h = \sqrt[4]{\frac{B}{3A}} = \sqrt[4]{\frac{\frac{\pi}{2}\eta\omega^2(r_a^4 - r_1^4)}{\frac{2}{\pi}\frac{F_a \ln(r_a/r_1)}{\eta(r_a^2 - r_1^2)^2}}} = \sqrt[4]{\frac{\pi^2\eta^2\omega^2(r_a^2 - r_1^2)^3(r_a^2 + r_1^2)}{4F_a \ln r_a/r_1}}.$$

De unde

$$h = \sqrt[4]{\frac{\pi^2 0{,}03^2 \cdot 20{,}9^2(0{,}2^2 - 0{,}05^2)^3(0{,}2^2 + 0{,}05^2)}{4 \cdot 460 \ln(200/50)}} = 0{,}192 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = 192\ \mu\text{m}.$$

Problema 7.16. Să se determine parametrii geometrici şi funcţionali ai unui lagăr hidrodinamic radial cu alunecare, dacă se cunosc : diametrul arbo-

Scanned with OKEN Scanner

relui $D = 60$ mm, turația arborelui $n = 2\,000$ rot/min, sarcina $P = 20\,000$ N, viscozitatea lubrifiantului $\eta = 0{,}03$ Pa s. Mișcarea fluidului se consideră laminară, iar procesul izoterm. Cum este influențată funcționarea lagărului în cazul unei abateri de paralelism dintre axa arborelui și a cuzinetului?

Rezolvare : Integrarea analitică a ecuației Reynolds (7.13.10), pentru lagărul radial, necesită un calcul laborios, ce este prezentat complet în lucrările de specialitate* (se obține distribuția de viteze și presiuni în filmul de lubrifiant,

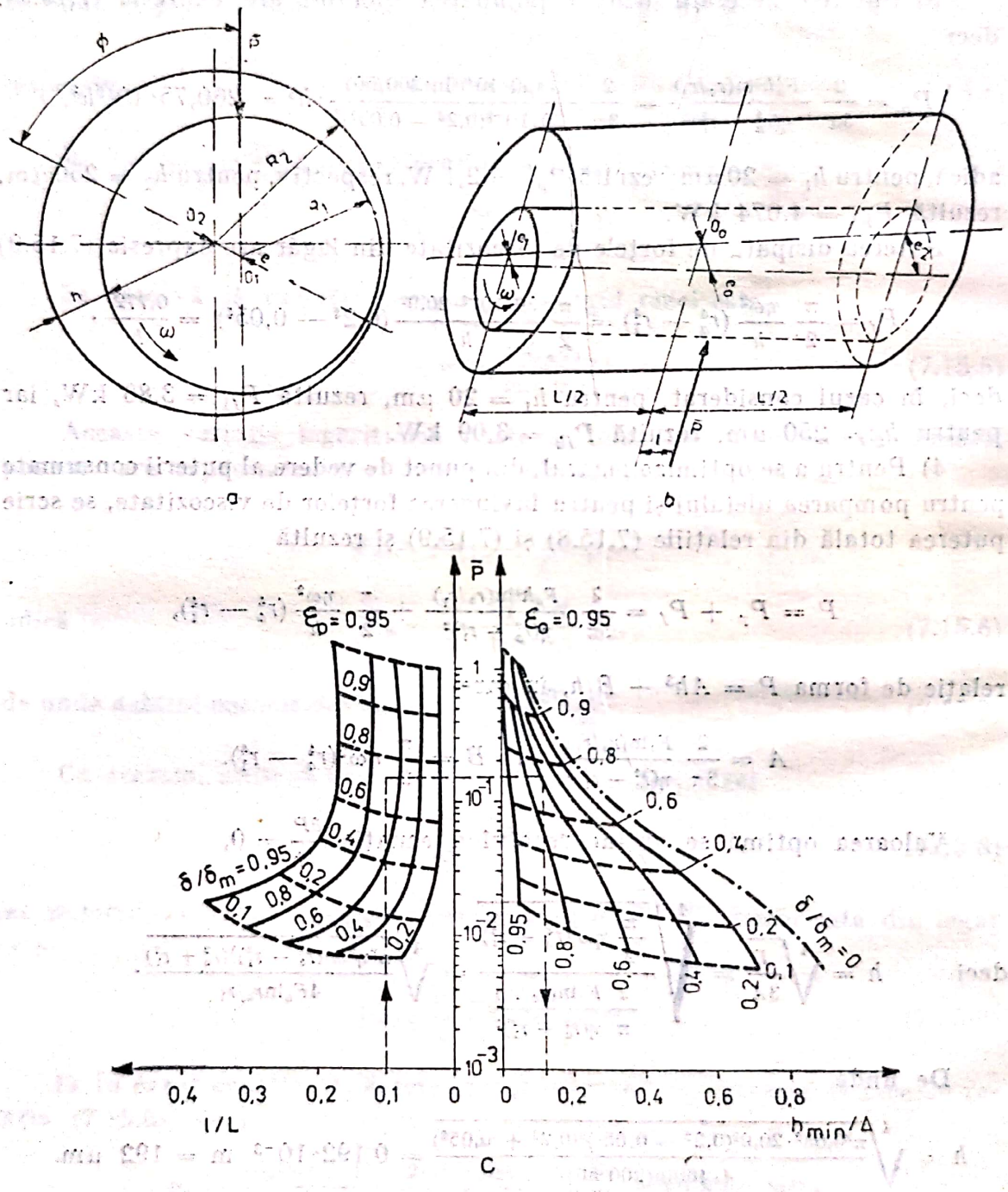


Fig. 7.16, *a*, *b*, *c*.

* N. Tipei. Hidro-aerodinamica lubrificației. București, Editura Academiei, 1957.

sarcina P, momentele de frecare pe arbore și cuzinet). În practica de proiectare, se lucrează cu expresii și coeficienți adimensionali, pe baza cărora se determină parametrii geometrici și funcționali ai lagărului.

Fie R_1 și R_2 razele arborelui și cuzinetului, figura 7.16, *a*. Se definește numărul lui Sommerfeld

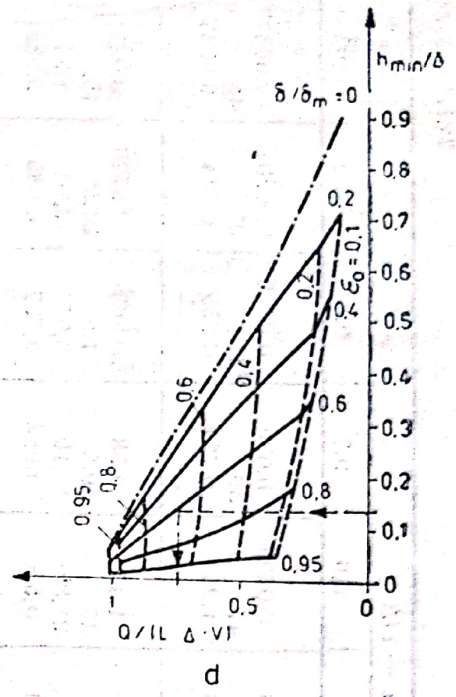
$$S = \frac{\eta L V}{\pi P}\left(\frac{R_1}{\Delta}\right)^2, \qquad (7.16.1)$$

în care $\Delta = R_2 - R_1$, $V = R_1\omega$, L lățimea lagărului.

În practică, valoarea raportului Δ/R_1 se încadrează între $(0{,}5 \cdot 10^{-3} \div 4 \cdot 10^{-3}$. Fie $\Delta/R_1 = 1/1\,000$ și $L/D = 1$.

În acest caz, $V = \frac{\pi n}{30} R_1 = \frac{\pi \cdot 2\,000}{30} 0{,}03 = 6{,}28$ m/s

și $$S = \frac{0{,}03 \cdot 0{,}06 \cdot 3{,}28}{\pi \cdot 20\,000}(1\,000)^2 = 0{,}18.$$



d

Fig. 7.16, *d*

Din tabelul 7.13, rezultă :

— excentricitatea relativă, $\varepsilon = e/\Delta = 0{,}5$;

— unghiul de poziție, $\Phi = 56{,}5°$;

— debitul de ubrifiant necesar alimentării,

$$Q = 0{,}39(L\Delta V) = 0{,}39 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{0{,}03}{1\,000} 6{,}28 \cong 8 \text{ l/h};$$

— coeficientul de frecare $f_a(R_1/\Delta) = 3{,}67$.

Momentul de frecare pe arbore și pe cuzinet se calculează cu formulele :

$$M_{fa} = \frac{1}{S}\frac{\eta L D n R_1^4}{60\Delta}\left(\frac{R_1}{\Delta}\right) f_a = \frac{1}{0{,}18}\frac{0.03 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}06 \cdot 2\,000 \cdot 0{,}03^2}{60 \cdot 0{,}03/1\,000} \cdot 3{,}67 = 1{,}1 \text{ Nm};$$

$$M_{fc} = M_{fa} - eP \sin \Phi = 1{,}1 - 0{,}5\frac{0{,}03}{1\,000} \cdot 20\,000 \sin 56{,}5 = 0{,}85 \text{ Nm}.$$

În cazul în care axa arborelui nu este paralelă cu axa cuzinetului, figura 7.16, *b*, sarcina P nu mai acționează echidistant de capetele cuzinetului, ci se poziționează excentric la distanța $\pm\, l$ de mijlocul cuzinetului (uzual, $l = \pm\, 0{,}1\, L$).

Se notează cu ε_0 excentricitatea medie relativă, cu δ/δ_m gradul de nealiniere și cu $\bar{P} = P/[12\eta VL(R/\Delta)^2]$ sarcina adimensională.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 7.16

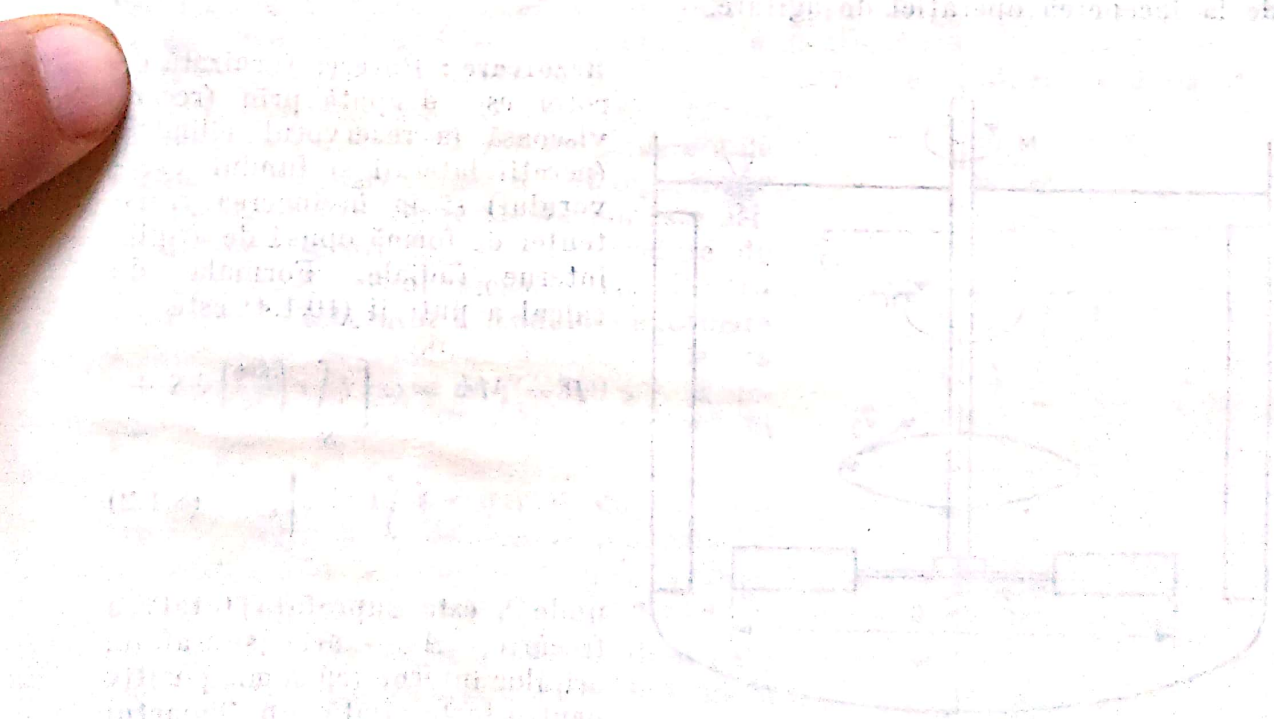
Parametrii		$\varepsilon = e/\Delta$									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$L/D \leqslant 1/8$	$S(L/D)^2$	0,99	0,461	0,272	0,17	0,106	0,0625	0,033	0,0139	0,00331	0,00812
	Φ	83	75	68	61	54	47	39	31	21	15
	$(R/\Delta)f_a(L/D)^2$	18,75	8,514	4,98	3,14	2,016	1,25	0,722	0,355	0,114	0,0388
$L/D = 1/4$	S	16,2	7,57	4,49	2,83	1,78	1,07	0,58	0,263	0,0728	0,0221
	Φ	82,5	75,5	68,5	61,5	54	47	39,5	31,5	21,5	15,5
	$(R/D)f_a$	307	140	82,5	52,67	34,26	21,85	13,19	6,97	2,70	1,20
	$Q/(L\,\Delta\,V)$	0,0938	0,196	0,295	0,393	0,491	0,590	0,988	0,787	0,885	0,933
$L/D = 1/2$	S	4,32	2,03	1,21	0,784	0,508	0,318	0,184	0,0912	0,0309	0,0116
	Φ	82	75	68,5	61,53	55	48	41	33	23,7	17
	$(R/\Delta)f_a$	82,10	37,71	22,55	14,75	9,94	6,67	4,33	2,59	1,27	0,70
	$Q/(L\Delta V)$	0,0938	0,187	0,281	0,374	0,468	0,562	0,657	0,751	0,845	0,890
$L/D = 1$	S	1,33	0,631	0,388	0,260	0,178	0,120	0,0776	0,0443	0,0185	0,00831
	Φ	79,5	74	68	62,5	56,5	50,5	44	36	26	19
	$(R/\Delta)f_a$	25,36	11,87	7,35	5,07	3,67	2,70	1,99	1,40	0,859	0,563
	$Q/(L\Delta V)$	0,0801	0,159	0,237	0,314	0,390	0,446	0,542	0,616	0,688	0,721
$L/D = 2$	S	[illegible]	[illegible]	0,173	[illegible]	[illegible]	0,0654	0,0463	0,0297	0,0143	0,007
	Φ	75	71	67	62,5	58	52,5	46,5	39	29	21
	$(R/\Delta)f_a$	10,76	5,21	3,4	2,5	1,96	1,6	1,31	1,04	0,730	0,517
	$Q/(L\Delta V)$	0,0537	0,104	0,153	0,199	0,243	0,285	0,329	0,369	0,406	0,422
$L/D \geqslant 4$	S	0,247	0,123	0,0823	0,0628	0,0463	0,0389	0,0297	0,0211	0,0114	0,00605
	Φ	69	67	64	62	58	54	49	42	32	23
	$(R/\Delta)f_a$	5,02	2,61	1,84	1,47	1,25	1,10	0,98	0,852	0,658	0,494

Scanned with OKEN Scanner

Cu $l/L = 0{,}1$ şi $\bar{P} = 0{,}147$, din figura 7.16, *c*, rezultă $\varepsilon_0 = 0{,}7$, $\delta/\delta_m = 0{,}7$, $h_{min}/\Delta = 0{,}13$, în care h_{min} reprezintă grosimea minimă a filmului de lubrifiant. În acest caz, $h_{min} = 0{,}13 \cdot \frac{0{,}03}{1\,000} = 5$ μm (în ipoteza axelor paralele, $h_{min} = \Delta(1 - \varepsilon) = 14$ μm).

Debitul de alimentare se citeşte din figura 7.16, *d*, $Q/(L\Delta V) = 0{,}75$ (aproape dublu faţă de cazul anterior).

Abaterea de la paralelism a axelor are deci ca efect mărirea debitului de alimentare, scăderea grosimii minime a filmului de lubrifiant, mărirea presiunii maxime şi apropierea punctului de aplicaţie a forţei de extremităţile cuzinetului (ceea ce provoacă deformaţii elastice şi deteriorarea suprafeţelor de contact).



Scanned with OKEN Scanner

8

SIMILITUDINEA HIDRODINAMICĂ

Problema 8.1. Să se arate prin metoda analizei dimensionale că puterea dezvoltată de un rotor cu palete în mişcare de rotaţie, într-un fluid incompresibil aflat într-un agitator mecanic (fig. 8.1), poate fi corelată, pentru orice tip de rezervor şi formă de rotor, prin relaţia funcţională.

$$\frac{P}{\rho n^3 D^5} = \Psi\left[\left(\frac{D^2 n \rho}{\eta}\right), \left(\frac{Dn^2}{g}\right), (nt)\right], \qquad (8.1.1)$$

în care P reprezintă puterea; ρ — densitatea fluidului; η — viscozitatea dinamică; D — diametrul rotorului, n — turaţia rotorului, t — timpul scurs de la începerea operaţiei de agitare.

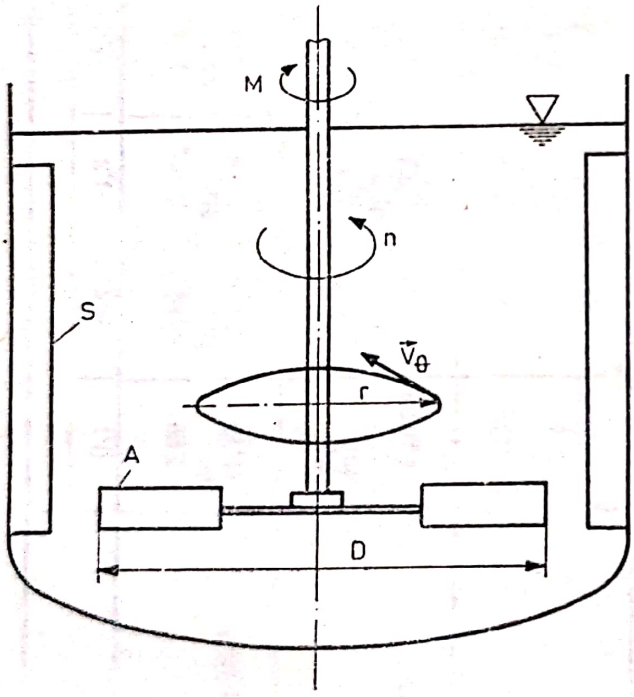


Fig. 8.1.

Rezolvare: Puterea furnizată de rotor este disipată prin frecare vîscoasă în rezervorul cilindric (pereţii laterali şi fundul rezervorului) şi în învingerea rezistenţei de formă opusă de aripile interne radiale. Formula de calcul a puterii (10.1.4) este

$$P = M\omega = \omega\left[\eta\int_S r\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)dS + \int_A rp\,dA\right], \qquad (8.1.2)$$

unde S este suprafaţa totală a frecării; A — aria suprafeţei aripilor interne (cu semn pozitiv pentru forţa aflată sub impactul curgerii şi cu semn negativ pentru forţa opusă); v_θ — viteza de rotaţie a fluidului; r — distanţa radială de la axul rezervorului; z — distanţa măsurată normal de la elementul de suprafaţă.

În scopul analizei dimensionale a ecuaţiei (8.1.2), se aleg ca mărimi de referinţă D, pentru lumgimi, nD, pentru viteză şi $\rho n^2 D^2$, pentru presiune (ultimele două mărimi rezultă imediat din observaţia asupra curgerii în care forţele de inerţie sînt de tip centrifug).

Scanned with OKEN Scanner

Se aplică teorema produselor adimensionale

$$\Phi(P,\ D,\ nD,\ \rho n^2D^2,\ \eta,\ g,\ l) = 0\ ;\ \Psi(\Pi_1,\ \Pi_2,\ \Pi_3,\ \Pi_4) = 0,$$

în care $\Pi_1 = \dfrac{P}{D^{\alpha_1}(nD)^{\beta_1}(\rho n^2D^2)^{\gamma_1}}$; $\Pi_2 = \dfrac{\eta}{D^{\alpha_2}(nD)^{\beta_2}(\rho n^2D^2)^{\gamma_2}}$;

$\Pi_3 = \dfrac{g}{D^{\alpha_3}(nD)^{\beta_3}(\rho n^2D^2)^{\gamma_3}}$; $\Pi_4 = \dfrac{l}{D^{\alpha_4}(nD)^{\beta_4}(\rho n^2D^2)^{\gamma_4}}$.

Aplicînd condiţia de omogenizare dimensională (prezentată în problema 8.9), se determină exponenţii α, β, γ şi se obţine:

$$\Pi_1 = \frac{P}{\rho n^3D^5};\ \Pi_2 = \frac{\eta}{\rho nD^2};\ \Pi_3 = \frac{g}{n^2D};\ \Pi_4 = nl. \qquad (8.1.3)$$

Ca urmare, se verifică relaţia funcţională indicată în enunţ. În (8.1.3), produsele adimensionale sînt inversele numerelor Reynolds, Froude, şi Strouhal.

Deci relaţia (8.1.1) se mai poate scrie

$$\frac{P}{\rho n^3D^5} = \psi(\mathrm{Re},\ \mathrm{Fr},\ \mathrm{Sh}). \qquad (8.1.4)$$

Problema 8.2. Funcţionarea imprimantei cu jet de cerneală* se bazează pe devierea într-un cîmp electromagnetic a picăturilor de cerneală provenite dintr-un pulverizator. Pulverizatorul este prevăzut cu o duză cu diametrul $d_n = 30$ μm, prin care trec $f = 10^5$ picături pe secundă (se tipăresc 100 de caractere pe secundă, pe fiecare caracter fiind repartizate 10^3 picături). Frecvenţa picăturilor este asigurată prin şocuri de presiune produse de vibraţia unui cristal piezoelectric. Pentru studierea în laborator a modului de formare a picăturilor, este indicat să nu se folosească o frecvenţă mai mare de $f' = 500\ \mathrm{s}^{-1}$. Structura jetului de cerneală este prezentată în figura 8.2.

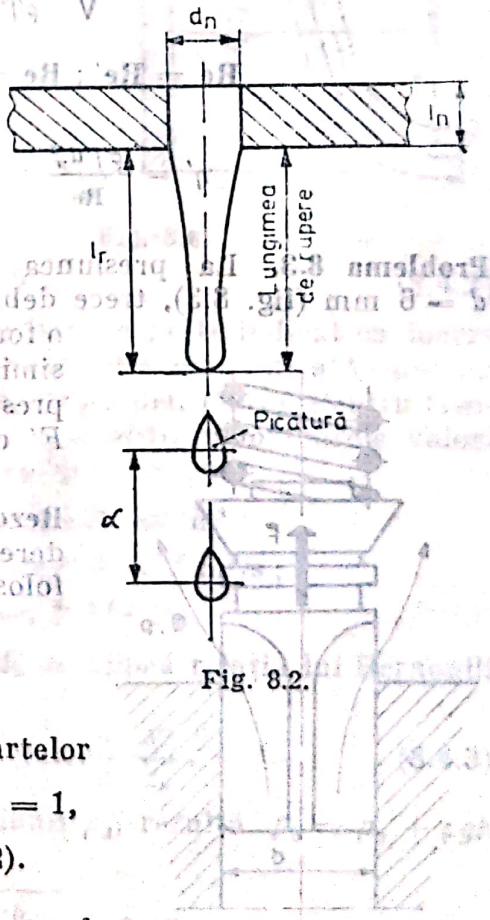


Fig. 8.2.

Să se determine criteriile de similitudine ce intră în modelarea fenomenului şi să se stabilească diametrul duzei d_n şi viscozitatea fluidului η' folosite pe model. Se cunosc caracteristicile cernelei de tipar: viscozitatea dinamică $\eta = 1{,}88 \cdot 10^{-3}$ Pa·s, densitatea $\rho = 1\,037$ kg/m³, tensiunea superficială $\sigma = 0{,}0725$ N/m şi caracteristicile fluidului folosit pe model $\rho' = 1\,100$ kg/m³, $\sigma' = 0{,}068$ N/m.

Se admit în ambele cazuri valorile rapoartelor

$$d_n/\alpha = 1/5 \text{ şi } d_n/l_r = 1,$$

în care α este distanţa între picături (fig. 8.2).

* S. A. Curry, H. Posting. Scale Model of an Ink Jet. În: IBM I. Res. Develop., ian., 1977.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare : În procesul de formare a picăturilor, o importanță deosebită o au forțele datorate tensiunii superficiale și frecării vîscoase. Deci se folosește similitudinea Weber și Reynolds. Se alege dimensiunea geometrică caracteristică, diametrul duzei d_n și dimensiunea cinematică caracteristică vitezei $V = \alpha f$.

Ținînd seama că apar și alte lungimi în mărimile ce definesc numerele Weber și Reynolds, acestea se modifică în sensul exprimării lor funcție numai de lungimea d_n.

Astfel, se obțin numerele Weber și Reynolds modificate

$$\mathrm{We} = \frac{\rho l V^2}{\sigma} = \frac{\rho d_n \alpha^2 f^2}{\sigma}\left(\frac{d_n}{\alpha}\right)^2 = \frac{\rho d_n^3 f^2}{\sigma},$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V d_n}{\eta} = \frac{\rho \alpha f d_n}{\eta}\left(\frac{d_n}{\alpha}\right) = \frac{\rho f d_n^2}{\eta}.$$

Mișcarea fiind periodică și permanentă, numărul Strouhal este egal cu unitatea:

$$\mathrm{Sh} = \frac{l}{V \cdot t} = \frac{\alpha}{\alpha f \cdot f^{-1}} = 1.$$

Se obține $\mathrm{We} = \mathrm{We}'$; $\mathrm{We} = \dfrac{1\,037 \cdot (0{,}03 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 10^{10}}{0{,}0725} = 3{,}86$;

$$d_n' = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{We}'\sigma'}{\rho' f'^2}} = \sqrt[3]{\frac{3{,}86 \cdot 0{,}068}{1\,100 \cdot 500^2}} \cong 1 \text{ mm};$$

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}'; \quad \mathrm{Re} = \frac{1\,037 \cdot 10^5 (0{,}03 \cdot 10^{-3})^2}{1{,}88 \cdot 10^{-3}} = 49{,}64;$$

$$\eta' = \frac{\rho' f' d_n'^2}{\mathrm{Re}} = \frac{1\,100 \cdot 500 \cdot 10^{-6}}{49{,}64} = 0{,}011 \text{ Pa s}.$$

Problema 8.3. La presiunea $p = 20$ MPa, prin supapa cu diametrul $d = 6$ mm (fig. 8.3), trece debitul $Q = 2$ l/min. Asupra supapei acționează o forță $F = 300$ N. Să se dimensioneze o supapă similară prin care trece debitul $Q' = 10$ l/min la presiunea $p' = 100$ MPa și să se determine forța F' corespunzătoare.

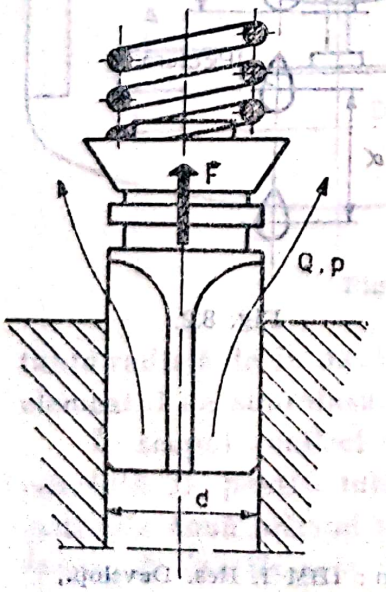


Fig. 8.3.

Rezolvare : Forțele de presiune fiind preponderente, în acest caz, pentru dimensionare se folosește criteriul de similitudine Euler

$$\mathrm{Eu} = \frac{p}{\rho V^2} = \frac{p'}{\rho' V'^2}.$$

Introducînd $V = \dfrac{4Q}{\pi d^2}$, se obține $d' = d\sqrt{\dfrac{Q'}{Q}}\sqrt{\dfrac{p}{p'}} = 6\sqrt{\dfrac{10}{2}}\sqrt{\dfrac{20}{100}} = 9$ mm,

cu ($\rho = \rho'$).

Pentru calcularea forţei F', se aplică criteriul de similitudine Newton

$$\mathbf{Ne} = \frac{F}{\rho V^2 d^2} = \frac{F'}{\rho' V'^2 d'^2}.$$

Rezultă $F' = (Q'/Q)^2 (d/d')^2 \; F = (10/2)^2 (6/9)^2 300 = 3{,}3$ kN.

Problema 8.4. Pentru a se studia apariţia cavitaţiei la sifonul din figura 8.4, se foloseşte un model obţinut prin aplicarea criteriilor de similitudine Euler şi Reynolds .

Să se stabilească presiunea p_0' de la suprafaţa liberă a modelului şi înălţimea H'.

Se cunosc caracteristicile sifonului; diametrul $d = 800$ mm, înălţimea $H = 5$ m, lungimea $l = 400$ m; fluidul de lucru este apă la temperatura $\theta° = 20°$C. Pentru model, se foloseşte o conductă de lungime $l' = 8$ m şi diametru $d' = 200$ mm. În ambele cazuri, coeficientul lui Darcy se consideră $\lambda = 0{,}03$. (pierderile locale de sarcină se neglijează).

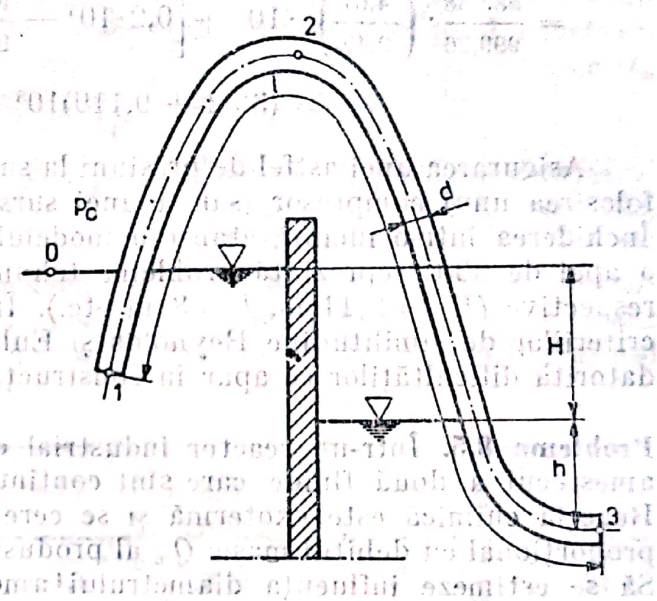


Fig. 8.4.

Rezolvare: În modelarea apariţiei fenomenului de cavitaţie, se aleg cu mărimi caracteristice presiunile p_0 şi p_v (presiunea de vaporizare) şi viteza medie în conductă V. Aplicarea similitudinilor Euler şi Reynolds conduce la relaţiile :

$$\mathbf{Eu} = \frac{(p_0 - p_v)}{\rho V^2} = \frac{(p_0' - p_v')}{\rho' V'^2}; \qquad (8.4.1)$$

$$\mathbf{Re} = Vd/\nu = V'd'/\nu'. \qquad (8.4.2)$$

Ţinînd seama de valoarea impusă a diametrului d', este indicat ca încercarea de laborator să se facă cu apă la o temperatură mai ridicată (pentru a avea viscozitate mai mică şi presiune de vaporizare mai mare). Pentru temperaturile $\theta° = 20°$C şi $\theta'° = 60°$C, din Anexa A.1, se obţin următoarele valori ale densităţii, viscozităţii şi presiunii de vaporizare a apei :

$\rho = 999{,}26$ kg/m³ ; $\rho' = 983{,}38$ kg/m³ ;

$\nu = 1{,}01.10^{-6}$ m²/s ; $\nu' = 0{,}478 \cdot 10^{-6}$ m²/s ;

$p_v = 0{,}0238 \cdot 10^5$ Pa ; $p_v' = 0{,}2 \cdot 10^5$ Pa.

Pentru determinarea vitezei în conductă, se aplică relaţia lui Bernoulli între punctele *0* şi *3* :

$$\frac{p_0}{\rho g} + (H + h) = \frac{V^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g}. \qquad (8.4.3)$$

Admiţînd o variaţie hidrostatică a presiunii p_3, rezultă $p_3 = p_0 + \rho g h$ şi, din (8.4.3), se obţine

$$V = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \lambda l/d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 5}{1 + 0{,}03 \; 400/0{,}8}} = 2{,}47 \text{ m/s}. \qquad (8.4.4)$$

Din (8.4.2) se calculează viteza V' a apei în model

$$V' = \frac{\nu'}{\nu} \cdot \frac{d}{d'} \cdot V = \frac{0{,}478 \cdot 10^{-6}}{1{,}01 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{0{,}8}{0{,}2} \cdot 2{,}47 = 4{,}67 \text{ m/s.}$$

Aplicînd relaţia (8.4.4) pentru model, se determină înălţimea H'

$$H' = \frac{V'^2}{2g}\left(1 + \lambda \frac{l'}{d'}\right) = \frac{4{,}67^2}{2 \cdot 9{,}81}\left(1 + 0{,}03 \frac{8}{0{,}2}\right) = 2{,}44 \text{ m.}$$

Prin aplicarea criteriului de similitudine Euler (8.4.1), rezultă presiune a

$$p_0' = \frac{\rho'}{\rho}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 p_0 + \left[p_v' - \frac{\rho'}{\rho}\left(\frac{V'}{V}\right)^2 p_v\right] =$$

$$= \frac{983{,}38}{999{,}26} \cdot \left(\frac{4{,}67}{2{,}47}\right)^2 \cdot 10^5 + \left[0{,}2 \cdot 10^5 - \frac{983{,}38}{999{,}26} \cdot \left(\frac{4{,}67}{2{,}47}\right)^2 \cdot 0{,}023 \cdot 10^5\right] =$$

$$= (3{,}52 + 0{,}119)10^5 = 3{,}63 \text{ bari.}$$

Asigurarea unei astfel de presiuni la suprafaţa liberă a modelului implică folosirea unui compresor (sau a unei surse de aer comprimat industrială). Închiderea într-o incintă etanşe a modelului şi asigurarea unei temperaturi a apei de 60°C reprezintă probleme tehnice dificil de rezolvat la mărimile respective ($H' = 2{,}44$ m, $l = 8$ m etc.). În concluzie, folosirea simultană a criteriilor de similitudine Reynolds şi Euler nu este indicată, în acest caz, datorită dificultăţilor ce apar în construcţia şi funcţionarea modelului.

Problema 8.5. Într-un reactor industrial de chimie (fig. 8.5), se realizează amestecul a două fluide care sînt continuu injectate în proporţii prescrise. Reacţia chimică este exotermă şi se cere extragerea unui flux de căldură proporţional cu debitul masic Q_m al produsului de amestec care se evacuează. Să se estimeze influenţa diametrului amestecătorului D asupra debitului masic admisibil, dacă temperatura soluţiei este T_1, temperatura serpentinei de răcire este T_0, iar criteriul de similitudine considerat este Reynolds, $\mathbf{Re} = \rho N D^2/\eta$ = constant, unde N este turaţia agitatorului.

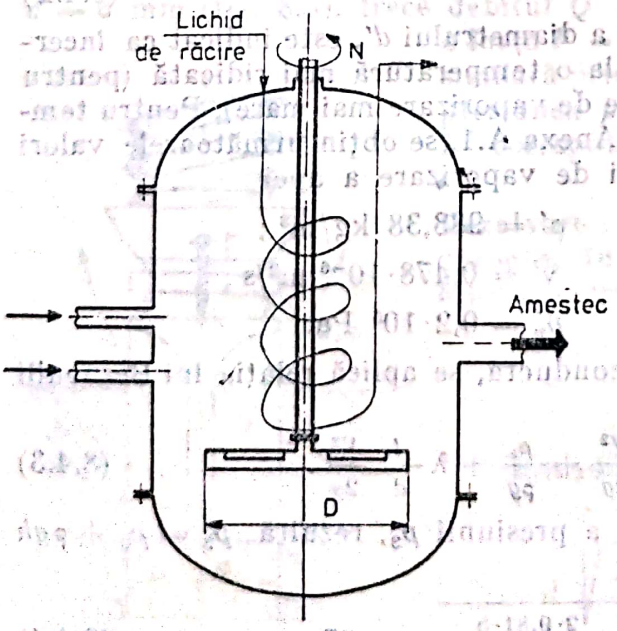


Fig. 8.5.

Se consideră că fluidul îşi păstrează proprietăţile şi se neglijează pierderile de căldură prin pereţii rezervorului, precum şi efectul deplasării radiale a amestecului asupra spectrului mişcării din rezervor.

Rezolvare : Fluxul de căldură care se cere evacuat la suprafaţa serpentinei de răcire este:

$$Q = k \int_A \frac{\partial T}{\partial n} \, dA, \qquad (8.5.1)$$

unde A reprezintă suprafaţa totală a serpentinei şi k — coeficientul de transfer termic. Introducînd variabilele adimensionale $A_a = A/D^2$, $n_a = n/D$, $T_a = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$, rezultă

$$Q = k(T_1 - T_0)D \int_{A_a} \frac{\partial T_a}{\partial n_a} \, dA_a. \tag{8.5.2}$$

Integrala $\int_{A_a} \frac{\partial T_a}{\partial n_a} \, dA_a$ este funcţie de numărul Reynolds pentru similitudinea hidrodinamică, de numărul Prandtl $\mathbf{Pr} = \eta C_p/k$ pentru similitudinea termică, precum şi de condiţiile la limită corespunzătoare (în expresia numărului Prandtl, C_p reprezintă căldura specifică la presiune constantă).

În cazul considerat, se poate admite că gradientul termic adimensional $\partial T_a/\partial n_a$ depinde numai de numărul Reynolds. Deci, pentru respectarea similitudinii Reynolds, $\mathbf{Re}$ = constant, gradientul termic este şi el constant. În aceste condiţii, fluxul termic Q din relaţia (8.5.2) şi deci debitul masic Q_m variază direct proporţional cu diametrul D al amestecătorului.

Problema 8.6. Un pod este susţinut de pile cilindrice din oţel cu diametrul $D = 0{,}3$ m. Să se determine forţa cu care acţionaează apa asupra unei pile, dacă viteza apei este $V = 4$ m/s, iar adîncimea curentului este $h = 3{,}3$ m.

La modelarea cu aer a fenomenului în laborator, s-au încercat cilindri cu diametrul $D_1 = 0{,}25$ m. Pentru diverse valori ale vitezei V_1, s-au obţinut următoarele valori ale forţei f_1 care acţioncază asupra unităţii de lungime a unui cilindru.

V_1 (m/s)	23	36,3	46,2	57,3	69	75
f_1 (N/m)	24	79,2	154,3	251,6	379,8	456,4

Se cunosc: densitatea şi viscozitatea cinematică ale aerului la 20°C, $\rho_{aer} = 1{,}293$ kg/m³ şi $\nu_{aer} = 15 \cdot 10^{-6}$ m²/s, respectiv ale apei $\rho_{apă} = 1\,000$ kg/m³ şi $\nu_{apă} = 1 \cdot 10^{-6}$ m²/s.

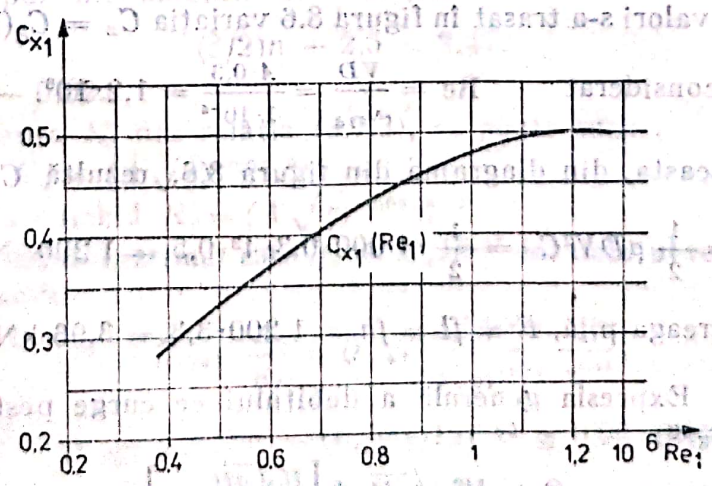


Fig. 8.6.

Rezolvare : Forța de rezistență la înaintare F, în cazul pilelor, și F_1, în cazul cilindrilor din laborator, se poate scrie

$$F = \frac{1}{2}\rho A V^2 C_x(\mathbf{Re}),$$

respectiv $$F_1 = \frac{1}{2}\rho_1 A_1 V_1^2 C_{x1}(\mathbf{Re}_1).$$

Pentru realizarea similitudinii între cele două mișcări, este necesar ca $\mathbf{Re} = \mathbf{Re}_1$ și atunci $C_x(\mathbf{Re}) = C_{x1}(\mathbf{Re}_1)$, adică

$$\frac{VD}{\nu_{apă}} = \frac{V_1 D_1}{\nu_{aer}},$$

de unde rezultă $V_1 = V\frac{D}{D_1}\cdot\frac{\nu_{aer}}{\nu_{apă}} = 4\frac{0{,}3}{0{,}25}\frac{15\cdot10^{-6}}{1\cdot10^{-6}} = 72$ m/s.

Pentru determinarea forței F, se urmărește determinarea coeficientului $C_{x1}(\mathbf{Re})$ pentru încercările pe model, se trasează variația acestuia, apoi se determină valoarea corespunzătoare similitudinii numărului Reynolds de pe prototip.

$$f_1 = \frac{F_1}{l_1} = \frac{1}{2}\rho_1 D_1 V_1^2 C_{x1}(\mathbf{Re}_1),$$

în care l_1 este lungimea cilindrilor în laborator.

De unde rezultă $$C_{x1} = \frac{2f_1}{\rho_1 D_1 V_1^2},$$

și efectuînd calculele se obține :

V_1 (m/s)	23	36,3	46,2	57,3	69	75
$\mathbf{Re}_1$ (—)	$0{,}38\cdot10^6$	$0{,}605\cdot10^6$	$0{,}77\cdot10^6$	$0{,}95\cdot10^6$	$1{,}15\cdot10^6$	$1{,}25\cdot10^6$
C_{x1} (—)	0,28	0,437	0,45	0,474	0,495	0,50

Cu aceste valori s-a trasat în figura 8.6 variația $C_x = C_x(\mathbf{Re})$.

În cazul considerat $$\mathbf{Re} = \frac{VD}{\nu_{apă}} = \frac{4\cdot0{,}3}{1\cdot10^{-6}} = 1{,}2\cdot10^6.$$

Pentru aceasta, din diagrama din figura 8.6, rezultă $C_x \cong 0{,}5$ și deci

$$f = \frac{1}{2}\rho D V^2 C_x = \frac{1}{2}\cdot1\,000\cdot0{,}3\cdot4^2\cdot0{,}5 = 1\,200 \text{ N/m},$$

iar, pentru întreaga pilă, $F = fl = fh = 1\,200\cdot3{,}3 = 3{,}96$ kN.

Problema 8.7. Expresia generală a debitului ce curge peste un deversor triunghiular este

$$Q = H^2\sqrt{gH}\,\Phi\left[\frac{H\sqrt{gH}}{\nu}, \alpha\right],$$

Scanned with OKEN Scanner

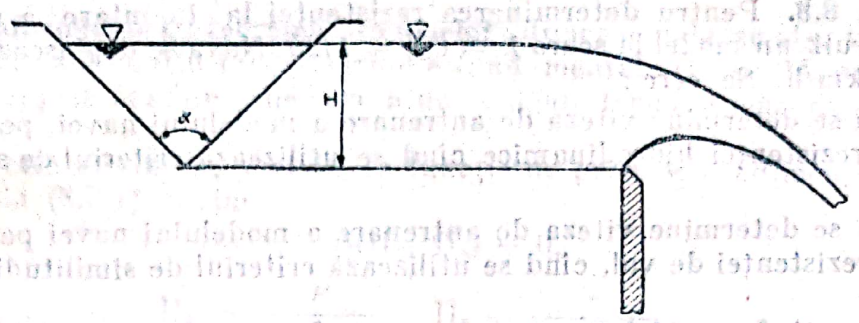


Fig. 8.7.

în care H este sarcina deversorului, ν — viscozitatea cinematică a lichidului, iar α — unghiul la vîrf al deversorului. În cazul apei, şi, pentru deversoare cu $\alpha = 90°$, s-a determinat, pe baza experienţelor, relaţia

$$Q_e = 1{,}343\ H^{2{,}47}. \tag{8.7.1}$$

unde H este sarcina deversorului în metri.

Folosind expresia generală a debitului unui deversor triunghiular şi aplicînd teoria similitudinii, să se determine eroarea făcută la calcularea debitului cu relaţia (8.7.1) pentru un lichid cu viscozitatea cinematică de 12 ori mai mare decît a apei.

Rezolvare : Expresia generală a debitului se poate scrie

$$Q = A\left(\frac{H\sqrt{gH}}{\nu}\right)^n H^{2{,}5}, \tag{8.7.2}$$

în care A şi n sînt constante numerice necunoscute, iar relaţia practică (8.7.1) se poate scrie

$$Q = KH^{2{,}47}. \tag{8.7.3}$$

În cazul apei, cele două relaţii (8.7.2) şi (8.7.3) sînt echivalente şi se obţine

$$A\left(\frac{\sqrt{g}H^{3/2}}{\nu_a}\right)^n H^{2{,}5} = KH^{2{,}47}.$$

Egalînd exponenţii sarcinii H, se obţine

$$(3/2)n + 2{,}5 = 2{,}47,$$

de unde $n = -0{,}02$.

Deci constanta K, din relaţia (8.7.3), se poate scrie :

— pentru apă $K_a = (A\sqrt{g})^{-0{,}02}\nu_a^{0{,}02} = 1{,}343$;

— pentru celălalt lichid $K_e = (A\sqrt{g})^{-0{,}02}\nu_e^{0{,}02}$.

Cu această debitul estimat este $Q_e = K_a H^{2{,}47}$, iar debitul real este $Q_{real} = K_e H^{2{,}47}$, de unde

$$Q_e = Q_{real}\cdot\frac{K_a}{K_e} = Q_{real}\frac{(A\sqrt{g})^{-0{,}02}}{(A\sqrt{g})^{-0{,}02}}\frac{\nu_a^{0{,}02}}{\nu_e^{0{,}02}},$$

deci $$Q_e = Q_{real}(\nu_a/\nu_e)^{0{,}02} = Q_{real}(1/12)^{0{,}02} \cong 0{,}95\ Q_{real}.$$

Se observă că se face o subestimare a debitului evacuat cu 5%.

Problema 8.8. Pentru determinarea rezistenței la înaintare a unei nave, s-a construit un model la scara $\lambda = l'/l = 1/25$. Nava se deplasează cu viteza $V = 30$ km/h. Se cere :

1) să se determine viteza de antrenare a modelului navei, pentru determinarea rezistenței hidrodinamice cînd se utilizează criteriul de similitudine Reynolds ;

2) să se determine viteza de antrenare a modelului navei pentru determinarea rezistenței de val, cînd se utilizează criteriul de similitudine Froude.

Rezolvare : 1) În cazul determinării experimentale a rezistenței hidrodinamice (de formă și de frecare), se folosește similitudinea Reynolds, deci

$$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}', \text{ adică } Vl/\nu = V'l'/\nu',$$

în care V este viteza navei, l — o lungime caracteristică a acesteia și ν — viscozitatea apei, iar V', l' și ν' au aceleași semnificații pentru model. De aici rezultă

$$V' = V(l/l')\cdot(\nu'/\nu).$$

Deoarece încercările se fac tot cu apă, $\nu = \nu'$ și rezultă

$$V' = V\frac{l}{l'} = \frac{1}{\lambda}V = 25\cdot 30 = 750 \text{ km/h}.$$

2) În cazul determinării rezistenței de val, se folosește similitudinea de tip Froude, deci

$$\mathrm{Fr} = \mathrm{Fr}', \text{ adică } \frac{V^2}{gl} = \frac{V'^2}{g'l'},$$

de unde rezultă

$$V' = V\sqrt{\frac{l'}{l}\cdot\frac{g'}{g}}.$$

Deoarece accelerația gravitațională este aceeași $g = g'$, se obține

$$V' = V\sqrt{l'/l} = V\sqrt{\lambda} = \frac{30}{\sqrt{25}} = 6 \text{ km/h}.$$

Din rezultatele obținute pentru viteza V', se trage concluzia că asigurarea simultană a criteriilor de similitudine Reynolds și Froude este imposibilă.

Problema 8.9. Utilizînd metoda analizei dimensionale, să se calculeze forța de rezistență exercitată asupra unei sfere cu diametrul D, imersată într-un fluid aflat într-o mișcare relativă cu viteza $\vec{V}$. Problema prezintă interes pentru calculul recipientelor sferice din industria chimică și nucleară supuse acțiunii vîntului.

Rezolvare : Prima etapă a calculului constă în stabilirea mărimilor fizice, care au un rol important în fenomenul studiat. Se observă că forța de rezistență $\vec{F}$ depinde de diametrul D și de viteza relativă $\vec{V}$. De asemenea, ea depinde de densitatea și viscozitatea fluidului, precum și de rugozitatea suprafeței sferei. La viteze ale vîntului care ating cel mult 100 m/s, se poate neglija efectul compresibilității aerului. Rezultă relația

$$\Phi(F, \rho, V, D, \nu) = 0, \qquad (8.9.1$$

În conformitate cu teorema produselor adimensionale, se aleg trei mărimi de referinţă care conţin toate mărimile fundamentale (masa M, lungimea L, timpul T) şi prin combinaţiile cărora nu se poate forma o mărime adimensională.

Fie aceste mărimi ρ, V şi D. În funcţie de produsele adimensionale formate relaţia (8.9.1) devine

$$\psi(\Pi_1, \Pi_2) = 0, \tag{8.9.2}$$

unde

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho^{\alpha_1} V^{\beta_1} D^{\gamma_1}}; \quad \Pi_2 = \frac{\eta}{\rho^{\alpha_2} V^{\beta_2} D^{\gamma_2}}. \tag{8.9.3}$$

Din condiţia de omogenitate dimensională a ecuaţiilor (8.9.3), se obţine

$$[M^\circ L^\circ T^\circ] = \frac{[MLT^{-2}]}{[ML^{-3}]^{\alpha_1}[LT^{-1}]^{\beta_1}[L]^{\gamma_1}}; \quad [M^\circ L^\circ T^\circ] = \frac{[ML^{-1}T^{-1}]}{[ML^{-3}]^{\alpha_2}[LT^{-1}]^{\beta_2}[L]^{\gamma_2}}.$$

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - \alpha_1 : & 0 &= 1 - \alpha_2 \\ 1 + 3\alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 &; & 0 &= -1 + 3\alpha_2 - \beta_2 - \gamma_2 \\ 0 &= -2 + \beta_1 ; & 0 &= -1 + \omega\beta_2 \\ (\alpha_1 = 1,\ \beta_1 &= 2,\ \gamma_1 = 2) ; & (\alpha_2 = 1,\ \beta_2 &= 1,\ \gamma_2 = 1) \end{aligned}$$

Astfel, rezultă $\Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$, $\Pi_2 = \frac{\eta}{\rho V D}$, iar (8.9.2) devine

$$F = \psi\left(\frac{\rho V D}{\eta}\right) \rho D^2 V^2. \tag{8.9.4}$$

Se constată că forţa $\vec{F}$ depinde de numărul Reynolds, $\mathbf{Re} = \frac{\rho V D}{\eta}$.

În literatura de specialitate, relaţia (8.9.4) se mai scrie sub formele

$$\frac{F}{\eta V D} = \psi(\mathbf{Re}), \quad \frac{F\rho}{\eta^2} = \psi(\mathbf{Re}).$$

Problema 8.10. Dintr-un rezervor deschis la presiunea atmosferică, cu diametrul D, se evacuează debitul de apă Q_0 sub o sarcină constantă h, printr-un orificiu de diametrul d. Să se determine dependenţa debitului Q de mărimile indicate şi să se calculeze debitul de ulei în condiţiile de similitudine dinamică Reynolds, dacă $Q_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ m³/s şi $\nu_{ulei}/\nu_0 = 4{,}5$.

Rezolvare: Utilizînd metoda analizei dimensionale, se scrie relaţia funcţională:

$$Q = \Phi(\rho, g, \eta, h, d, D). \tag{8.10.1}$$

Se consideră mărimi de referinţă ρ, g şi h.

Prin aplicarea teoremei produselor adimensionale, se obţine

$$\psi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) = 0,$$

$$\Pi_1 = \frac{Q}{\rho^{\alpha_1} g^{\beta_1} h^{\gamma_1}}, \quad \Pi_2 = \frac{\eta}{\rho^{\alpha_2} g^{\beta_2} h^{\gamma_2}}, \quad \Pi_3 = \frac{d}{\rho^{\alpha_3} g^{\beta_3} h^{\gamma_3}}, \quad \Pi_4 = \frac{D}{\rho^{\alpha_4} g^{\beta_4} h^{\gamma_4}},$$

$$\left(\alpha_1 = 0, \beta_1 = \frac{1}{2}, \gamma_1 = \frac{5}{2}\right), \left(\alpha_2 = 1, \beta_2 = \frac{1}{2}, \gamma_3 = \frac{3}{2}\right),$$

$$(\alpha_3 = 0, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 1), \quad (\alpha_4 = 0, \beta_4 = 0, \gamma_4 = 1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $$Q = \psi\left(\frac{\rho g^{1/2}h^{3/2}}{\eta}, \frac{d}{h}, \frac{D}{h}\right) g^{1/2}h^{5/2}. \qquad (8.10.2)$$

Aplicînd criteriul de similitudine Reynolds,

$\mathbf{Re} = V_0 d/\nu_0 = V_{uiet} d/\nu_{uiet}$, rezultă

$$\frac{\frac{Q_0}{\pi d_0^2/4} d_0}{\nu_0} = \frac{\frac{Q_{uiet}}{\pi d_0^2/4} d_0}{\nu_{uiet}}.$$

De unde $Q_{uiet} = (\nu_{uiet}/\nu_0)Q_0 = 4{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} = 6{,}75 \cdot 10^{-3}$ m³/s.

Problema 8.11. Prin adimensionalizarea ecuației de mișcare, se determină unele criterii de similitudine ce se aplică în modelarea hidrodinamică. Strouhal (**Sh**), Froude (**Fr**), Euler (**Eu**) și Reynolds (**Re**). Alegînd corespunzător mărimile de referință, ecuația adimensionalizată va fi funcție numai de criteriul de similitudine Reynolds. Să se stabilească ponderea termenilor din ecuația astfel determinată în funcție de mărimea numărului Reynolds ce caracterizează curgerea.

Rezolvare : Ecuația de mișcare sub formă vectorială

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{v}. \qquad (8.11.1)$$

În modelarea fenomenelor hidrodinamice, un rol important îl joacă alegerea corespunzătoare a mărimilor de referință cu care se adimensionalizează relația (8.11.1). Fie aceste mărimi viteza $\vec{V}_*$, timpul t_*, lungimea l_* forța masică $\vec{f}_*$, densitatea ρ_*, presiunea p_*, viscozitatea ν_*.

Rezultă mărimile adimensionale corespunzătoare

$$v_a = \frac{v}{V_*}, \; t_a = \frac{t}{t_*}, \; l_a = \frac{l}{l_*}, \; f_a = \frac{f}{f_*}, \; \rho_a = \frac{\rho}{\rho_*}, \; p_a = \frac{p}{p_*}, \; \nu_a = \frac{\nu}{\nu_*} \qquad (8.11.2)$$

Înlocuind (8.11.1) în (8.11.2), se obține ecuația de mișcare în formă adimensională

$$\frac{V_*}{l_*}\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t_a} + \frac{V_*^2}{l_*}(\vec{v}_a\nabla_a)\vec{v}_a = f_*\vec{f}_a - \frac{p_*}{\rho_* l_*}\frac{1}{\rho_a}\nabla_a p_a + \frac{\nu_* V_*}{l_*^2}\nu_a\Delta_a\vec{v}_a, \qquad (8.11.3)$$

sau $$\mathbf{Sh}_*\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t_a} + (\vec{v}_a\nabla_a)\vec{v}_a = \frac{1}{\mathbf{Fr}_*}\vec{f}_a - \mathbf{Eu}_*\frac{1}{\rho_a}\nabla_a p_a + \frac{1}{\mathbf{Re}_*}\nu_a\Delta_a\vec{v}_a, \qquad (8.11.4)$$

unde $$\mathbf{Sh}_* = \frac{l_*}{V_* t_*}, \; \mathbf{Fr}_* = \frac{V_*^2}{f_* l_*}, \; \mathbf{Eu}_* = \frac{p_*}{\rho_* V_*^2}, \; \mathbf{Re}_* = \frac{V_* l_*}{\nu_*},$$

reprezintă numerele adimensionale Strouhal, Froude, Euler și Reynolds. În funcție de fenomenul studiat, se stabilește ponderea termenilor din (8.11.4) și deci criteriile de similitudine corespunzătoare modelării hidrodinamice. Astfel, dacă se consideră că forțele de viscozitate (de frecare) sînt predominante într-un fenomen, se face modelarea acestuia, funcție de criteriul de similitudine Reynolds, $\mathbf{Re} = \mathbf{Re}'$ (cu $\mathbf{Re}'$ s-a notat numărul Reynolds de

Scanned with OKEN Scanner

pe model). În general, modelarea hidrodinamică după mai multe criterii de similitudine nu este indicată ; fie că este imposibilă — vezi problema 8.8, fie că implică dificultăți în construcția modelului — vezi problema 8.4.

Dacă în (8.11.4) se aleg ca mărimi principale lungimea l_* și viteza V_* iar $t_* = l_*/V_*$ și $p_* = \rho V_*^2$, se obține

$$\frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t_a} + (\vec{v}_a \nabla_a)\vec{v}_a = -\nabla_a p_a + \frac{1}{\mathbf{Re}} \Delta_a \vec{v}_a, \qquad (8.11.5)$$

în care s-au neglijat forțele masice, iar $\mathbf{Re} = V_* l_*/\nu$.

Astfel ecuația (8.11.1) adimensională este funcția numai de un singur parametru, numărul Reynolds.

Pentru mișcări lente $\mathbf{Re} \ll \mathbf{Re}_{cr}$, ponderea termenului convectiv $(\vec{v}_a \cdot \nabla_a)\vec{v}_a$ este neglijabilă față de $\Delta_a \vec{v}_a$ care are semnificația forței de frecare vîscoasă ; pentru $\mathbf{Re} \cong \mathbf{Re}_{cr}$ cei doi termeni au ponderi egale, iar, la $\mathbf{Re} \gg \mathbf{Re}_{cr}$ termenul $\Delta_a \vec{v}_a$ se poate neglija. (Cu $\mathbf{Re}_{cr}$, s-a notat numărul Reynolds (critic), la care curgerea își schimbă structura ; pentru multe tipuri de curgere $\mathbf{Re}_{cr} = 1$.

Problema 8.12. Un profil aerodinamic cu anvergura B urmează să se deplaseze în atmosferă cu viteza V, la temperatura θ_0 și o presiune absolută p_0. Să se determine pentru un model, la scara lungimilor λ, încercat în condiții dinamic similare :

a) viteza necesară a unui curent de aer într-un tunel aerodinamic la aceiași temperatură și presiune : θ_0 și respectiv p_0 ;

b) viteza necesară a unui curent de apă într-un tunel hidrodinamic ;

c) viteza necesară a unui curent de aer într-un tunel aerodinamic, funcționînd sub presiunea p_c, neglijînd efectele presiunii asupra viscozității și: operînd la aceiași temperatură θ_0.

Se cunosc : $V = 150$ m/s, $\theta_0 = 15°C$, $p_0 = 0{,}1$ MPa, $p_c = 10$ MPa, $B = 3$ m, $\lambda = 1/10$, $\nu_{aer}/\nu_{apă} = 14{,}8$.

Rezolvare : a) Aplicînd criteriul de similitudine dinamică Reynolds se scrie

$$VB/\nu_{aer} = V_a b/\nu_{aer}, \quad V_a = VB/b = 1\,500 \text{ m/s}.$$

b) $$VB/\nu_{aer} = V_b b/\nu_{apă}, \quad V_b = V\frac{B}{b} \cdot \frac{\nu_{apă}}{\nu_{aer}} = 101 \text{ m/s},$$

c) $$\rho_{aer} = \frac{p_0}{R_{aer} T_0} = \frac{0{,}1 \cdot 10^6}{287(273+15)} = 1{,}22 \text{ kg/m}^3.$$

$$\frac{p_0}{\rho_0 T_0} = \frac{p_c}{\rho_c T_0}, \quad \rho_c = \rho_0 \frac{p_c}{p_0} = 1{,}22 \cdot 10^2 \text{ kg/m}$$

$$\frac{\rho_0 VB}{\eta_{aer}} = \frac{\rho_c V_c b}{\eta_{aer}}, \quad V_c = V \cdot \frac{B}{b} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_c} = 15 \text{ m/s}.$$

Se constată imediat că utilizarea unui tunel aerodinamic în circuit închis, sub presiune, permite reducerea considerabilă a vitezei curentului de aer și deci a puterii ventilatorului care realizează vehicularea acestuia.

Problema 8.13. O sferă, cu diametrul D cunoscut, este plasată într-un curent de apă care se deplasează cu viteza $V = 1{,}5$ m/s și se măsoară o rezistență la înaintare $R = 4{,}45$ N. O altă sferă cu diametrul de două ori mai

Scanned with OKEN Scanner

mare ($D_1 = 2D$) este plasată într-un tunel aerodinamic. Să se determine viteza V_1 a aerului din tunel pentru similitudine hidrodinamică între mișcări. Să se determine rezistența la înaintare R_1 a sferei din tunel dacă viscozitatea cinematică a aerului este de 13 ori mai mare decît a apei, iar densitatea aerului este $\rho = 1{,}2$ kg/m³.

Rezolvare : Din analiza dimensională, rezistența la înaintare a sferei este

$$F = (1/2)\rho A V^2 C_x(VD/\nu), \qquad (8.13.1)$$

în care ρ este densitatea fluidului, A este aria secțiunii maestre, V este viteza fluidului, iar $C_x(VD/\nu) = C^*(\mathbf{Re})$ este coeficientul de rezistență la înaintare.

Pentru realizarea similitudinii dinamice, este necesară egalitatea numerelor Reynolds între cele două sisteme, notînd cu indice 1, pentru aer, și fără indice, pentru apă ; rezultă

$$VD/\nu = V_1 D_1/\nu_1, \qquad (8.13.2)$$

de unde se obține viteza V_1 pentru similitudine dinamică

$$V_1 = V\frac{D}{D_1}\frac{\nu_1}{\nu} = 1{,}5\,\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{1} = 9{,}75 \text{ m/s}.$$

Pentru această viteză, numerele Reynolds sînt egale și deci și $C_x = C_{x1}$ și se poate scrie

$$\frac{F_0}{F_1} = \frac{\rho A V^2}{\rho_1 A_1 V_1^2},$$

de unde $F_1 = F(\rho_1/\rho)(D_1/D)^2(V_1/V)^2 = 4{,}45(1{,}2/1\,000)(2/1)^2(9{,}75/1{,}5)^2 = 0{,}9$ N.

Problema 8.14. O sferă cu diametrul D este supusă unei forțe F cînd este imersată într-un curent de apă avînd viteza V. Dacă o sferă cu diametrul D' este utilizată ca model, să se determine viteza corespunzătoare V' și forța la care este supusă F', fiind plasată într-un curent de aer. Se cunosc $D = 120$ mm, $D' = 50$ mm, $F = 22$ N, $V = 3$ m/s, $\nu_{aer}/\nu_{apă} = 14{,}8$, $\rho_{aer} = 1{,}22$ kg/m³, $\rho_{apă} = 1\,000$ kg/m³.

Rezolvare : Fenomenul de apariție a forței de rezistență la înaintare este determinat de acțiunea viscozității, deci este necesar să se aplice criteriul de similitudine Reynolds. $\mathbf{Re}_{prototip} = \mathbf{Re}'_{model}$

$$\mathbf{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{V'D'}{\nu'}, \quad V' = \frac{D}{D'}\cdot\frac{\nu_{aer}}{\nu_{apă}}V = \frac{120}{50}\cdot 14{,}8\cdot 3 = 106{,}5 \text{ m/s}.$$

Forța de rezistență la înaintare se calculează cu relația (8.9.4)

$$F = \psi\left(\frac{\rho VD}{\eta}\right)\rho V^2 D^2.$$

Condiția de similitudine Newton impune

$$\mathbf{Ne} = \frac{F}{\rho V^2 D^2} = \frac{F'}{\rho' V'^2 D'^2}.$$

Rezultă $F' = (\rho_{aer}/\rho_{apă})(V'/V)^2(D'/D)^2 F = (1{,}22/1\,000)(106{,}5/3)^2\cdot(50/120)^2\cdot 22 = 5{,}87$ N.

Scanned with OKEN Scanner

Problema 8.15. Într-un reactor chimic se găsește o soluție acidă cu viscozitatea cinematică $\nu = 30$ cSt. Pentru purificarea soluției, se barbotează un gaz neutru prin intermediul unor tuburi cu diametrul $d = 25$ mm. Pentru studiul fenomenului hidrodinamic în laborator, se folosesc particule sferice, cu același diametru ca al tubului, ce se ridică liber, datorită forței arhimedice, într-un fluid cu densitatea $\rho_* = 850$ kg/m³ și viscozitatea cinematică $\nu_* = 50$ cSt. Să se determine densitatea particulelor sferice, ρ_s.

Rezolvare : Pentru ca cele două curgeri să fie hidrodinamic similare, trebuie să se realizeze similitudinea Reynolds

$$\mathbf{Re} = ud'/\nu = v_* d/\nu_*, \tag{8.15.1}$$

în care u reprezintă viteza de ridicare a bulei de gaz în tub iar d' — diametrul bulei. Mecanismul hidrodinamic al mișcării bulelor de gaz într-o coloană plină cu lichid a fost studiat de academicianul Dumitru Dumitrescu*, care a stabilit că, în cazul bulelor care se deplasează în pachete, viteza acestora prin lichid se calculează cu formula

$$u = 0{,}35\sqrt{gd}. \tag{8.15.2}$$

Pentru diametre mici ale tubului, se poate considera $d' = d$. Se obține :

$$u = 0{,}35\sqrt{9{,}81 \cdot 0{,}025} = 0{,}173 \text{ m/s}, \quad \mathbf{Re} = \frac{0{,}173 \cdot 0{,}025}{30 \cdot 10^{-6}} = 144.$$

Asupra particulei sferice, acționează următoarele forțe :

— forța arhimedică $\vec{F}_a$, $F_a = \rho_* g \pi d^3/6$;

— forța de greutate $\vec{F}_g$, $F_g = \rho_s g \pi d^3/6$;

— forța de rezistență la înaintare $\vec{F}_r$, $F_r = \frac{C_x}{2} \rho_* \frac{\pi d^2}{4} v_*^2$,

în care v_* reprezintă viteza cu care se ridică particula solidă în fluid (presupusă constantă). Din (8.15.1), rezultă $v_* = u\nu_*/\nu = 0{,}173 \cdot 50/30 = 0{,}288$ m/s.

Pentru $\mathbf{Re} = 144$, din anexa A.5, se determină coeficientul de rezistență la înaintare al particulei $C_x = 0{,}9$ (se consideră că particulele sferice sînt suficient de depărtate pentru a nu se influența reciproc). Ecuația de echilibru este $\vec{F}_a = \vec{F}_g + \vec{F}_r$, de unde rezultă :

$$\rho_s = \rho_* - \frac{\frac{C_x}{2} \rho_* \frac{\pi d^2}{4} V_*^2}{g \pi d^3/6} = 850 - \frac{\frac{0{,}9}{2} \cdot 850 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}025^2}{4} \cdot 0{,}288^2}{9{,}81 \cdot \pi \cdot 0{,}025^3/6} \cong$$

$$\cong 850 - 250 = 600 \text{ kg/m}^3.$$

Problema 8.16. Studiul experimental în tunel aerodinamic al undelor de presiune (sunete) generate de un curent de aer cu viteza V, care întîlnește un obstacol de forma unui cilindru rigid cu diametrul $d_1 = 3{,}2$ mm, indică următoarele frecvențe :

F(Hz)	42	229	603	977	1 351	1 725
V_∞ (m/s)	3,0	6,0	12,0	18,0	24,0	30,1

* Strömung an einer Luftblase im senkrechten Rohr. Teză de doctorat, Göttingen 1942.

Să se determine frecvența sunetului generat de un curent de aer cu viteza $V_\infty = 5{,}1$ m/s, care întîlnește un cilindru rigid cu diametrul $d_2 = 12{,}8$ mm.

Rezolvare : Frecvența sunetului este o funcție de viteza curentului de aer V_∞, diametrul cilindrului d, densitatea și viscozitatea aerului, respectiv,

$$F = f(V_\infty,\ d,\ \rho,\ \eta).$$

Aplicînd teorema II cu ajutorul metodei Rayleigh, rezultă imediat $\Pi_1 = f(\Pi_2)$ sub forma

$$Fd/V_\infty = (fV_\infty d\rho/\eta).$$

Astfel, similitudinea dinamică a fenomenului studiat impune

$$V_{\infty 1} d_1 \rho_1/\eta_1 = V_{\infty 2} d_2 \rho_2/\eta_2.$$

Dar, $\rho_1 = \rho_2$ și $\eta_1 = \eta_2$ și deci $V_{\infty 1} = V_{\infty 2} \cdot d_2/d_1 = 5{,}1 \cdot 12{,}8/3{,}2 = 20{,}4$ m/s.

Prin interpolare între valorile măsurate pentru cilindrul cu diametrul d_1, se obține $F_1 = 1\,127$ Hz.

Similitudinea dinamică impune ca și $F_1 d_1/V_{\infty 1} = F_2 d_2/V_{\infty 2}$,

și deci $$F_2 = F_1 \frac{d_1}{d_2} \frac{V_{\infty 2}}{V_{\infty 1}} = 1\,127 \frac{3{,}1}{12{,}8} \frac{5{,}1}{20{,}4} = 70{,}43 \text{ Hz},$$

$$F_2 = 70{,}43 \text{ Hz}.$$

Problema 8.17. Forța de rezistență la înaintare opusă unui model de navă cu lungimea de 5 m și arie a suprafeței udate de 2 m², încercat într-un canal hidrodinamic, este de 42 N la viteza de deplasare în apă de mare de 5,3 noduri (1 nod = 0,514 m/s). Să se calculeze puterea de propulsie necesară pentru a învinge rezistența opusă navei prototip, similară modelului, cu lungimea de 180 m. Coeficienții forțelor de rezistență datorită frecării vîscoase $V_f^v \rho$ pe suprafața modelului și prototipului sînt 0,478 și, respectiv, 0,415.

Forța de rezistență datorită frecării vîscoase $F_R^v = C_f^v \rho\ (\text{nod})^{1.825}\ A$.

Rezolvare : Forța de rezistență totală opusă modelului F_{Rm}^t este suma celor două tipuri de forțe de rezistență și deci forța de rezistență datorată neuniformității distribuției de presiune este

$$F_{Rm}^p = F_{Rm}^t - F_{Rm}^v = 42 - 0{,}478 \cdot 2 \cdot (5{,}3)^{1.825} = 22 \text{ N}.$$

Similitudinea dinamică a modelului și navei -prototip impune egalitatea valorilor numărului Froude pentru model și prototip

$$\mathbf{Fr} = \frac{V_{\infty m}^2}{l_m g} = \frac{V_{\infty pr}^2}{l_{pr} g}$$

$$V_{\infty pr} = V_{\infty m} \sqrt{l_{pr}/l_m} = 5{,}3 \sqrt{180/5} = 31{,}8 \text{ noduri}.$$

Proporționalitatea forțelor de rezistență rezultate din neuniformitatea distribuției de presiune este dată de raportul valorilor calculate cu relația lui Rayleigh

$$\frac{F_{Rpr}^p}{F_{Rm}^p} = \frac{\rho V_{\infty pr}^2 A_{pr}}{\rho V_{\infty m}^2 A_m} = \frac{l_{pr}}{l_m} \left(\frac{l_{pr}}{l_m}\right)^2 = (36)^3.$$

Deci se obține rezistența datorită distribuției neuniforme de presiune

$$F^p_{Rpr} = (36)^3 \cdot F^p_{Rm} = (36)^3 \cdot 22 = 1{,}026 \text{ MN}$$

și rezistența datorită frecării vîscoase

$$F^v_{Rpr} = 0{,}415 \cdot (31{,}8)^{1.825} \frac{180}{5} \cdot 2 = 0{,}581 \text{ MN}.$$

Deci, forța de rezistență la înaintare opusă navei este

$$F_{Rpr} = 1{,}607 \text{ MN},$$

iar puterea de propulsare necesară învingerii acestei forțe este

$$P = F_{Rpr} V_{\infty pr} = 26{,}26 \text{ MW}.$$

Problema 8.18. O pompă centrifugă, avînd un rotor cu diametrul $D_1 = 500$ mm și turație $n_1 = 600$ rot/min, asigură vehicularea unui ulei de slabă viscozitate printr-o conductă orizontală cu lungimea de 55 m și diametrul $d = 100$ mm, care este descărcat într-un rezervor la presiunea atmosferică.

Se cunoaște coeficientul pierderilor de sarcină hidraulică (al lui Darcy) $\lambda = 0{,}012$.

O pompă geometric similară cu un rotor cu diametrul $D_2 = 550$ mm și turație $n_2 = 900$ rot/min, care pompează apă, realizează următoarele performanțe:

Q_2 (m³/s)	0	0,016	0,032	0,048	0,064	0,080	0,096
H_2 (m)	37	41	44	45	42	36	28

Să se calculeze debitul de ulei prin conductă.

Rezolvare: Se cunosc relațiile de similitudine ale turbomașinilor

$$\frac{H_1 g}{D_1^2 n_1^2} = \frac{H_2 g}{D_2^2 n_2^2} \quad \text{sau} \quad \frac{Q_1}{D_1^3 n_1} = \frac{Q_2}{D_2^3 n_2};$$

rezultă deci

$$\left(\frac{D_1 n_1}{D_2 n_2}\right)^2 = 0{,}366 \quad \frac{D_1^3 n_1}{D_1^3 n_2} = 0{,}503.$$

Astfel, prima pompă realizează următoarele performanțe:

Q_1 (m³/s)	0	0,008	0,016	0,024	0,034	0,040	0,048
H_1 (m)	13,5	15,0	16,1	16,5	15,4	13,2	10,2

Caracteristica conductei $h_c = f_c(Q_1)$ se obține calculînd pierderile de sarcină hidraulică distribuite

$$h_c = \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2g} = 0{,}012 \cdot \frac{55}{0{,}1^5} \frac{16}{\pi^2} \frac{Q_1^2}{2g} = 5\,450\, Q_1.$$

Se trasează grafic caracteristica pompei $H_1 = f_1(Q_1)$ și cea a conductei $h_c = f_c(Q_1)$ și, la intersecția lor, se obține punctul de funcționare al rețelei. Se găsește $Q_1 = 0{,}0455$ m³/s.

Scanned with OKEN Scanner

Problema 8.19. Un model de deversor dreptunghiular ,construit la scara $\lambda = 1/16$, descarcă un debit $Q_m = 0{,}5$ m³/min, sub o lamă deversantă de adîncime $h_m = 75$ mm.

Admiţînd similitudinea dinamică, să se calculeze :

a) înălţimea lamei deversante a prototipului (la scară industrială) ;

b) debitul descărcat de prototip.

Rezolvare : a) Toate dimensiunile geometrice respectă aceeaşi scară geometrică 1/16 şi deci lăţimile B ale pragului deversant se află în raportul 1/16.

Adîncimea lamei deversante a prototipului rezultă

$$h_{pr} = 16 \cdot 0{,}075 = 1{,}2 \text{ m.}$$

b) Prin aplicarea analizei dimensionale relaţiei funcţionale a debitului $Q = f(h, g, B)$, rezultă imediat $Q = kB\sqrt{g}\, h^{3/2}$.

Condiţia de similitudine dinamică impune egalitatea produselor adimensionale

$$\frac{Q_m}{B_m\sqrt{g}\, h_m^{3/2}} = \frac{Q_{pr}}{B_{pr}\sqrt{g}\, h_{pr}^{3/2}}$$

şi deci

$$Q_{pr}/Q_m = (1/\lambda)^{5/2},$$

$$Q_{pr} = (16)^{5/2} \cdot 0{,}5 = 512 \text{ m}^3/\text{min}.$$

9

CURGEREA FLUIDELOR ÎN CONDUCTE ȘI REȚELE DE CONDUCTE

Problema 9.1. Două rezervoare mari de ulei sînt legate printr-o conductă orizontală de lungime totală $l = 150$ m, cu diametrul $D = 2R = 100$ mm (mișcarea fluidului în conductă este presupusă laminară și permanentă).

În porțiunea rectilinie orizontală a conductei, se introduce un tub Pitot-Prandtl, plasat la distanța $y = 20$ mm de perete. La manometrul diferențial cu apă atașat tubului, se citește o denivelare $h_a = 30$ mm. Dacă se cunosc: $\rho_{ulei} = 800$ kg/m³; $\rho_a = 1\,000$ kg/m³; viscozitatea cinematică a uleiului $\nu = 6 \cdot 10^{-5}$ m²/s, să se determine:

a) debitul transportat Q și pierderea de sarcină hidraulică pe unitatea de lungime a conductei;

b) diferența de nivel H între suprafețele libere din rezervoarele A și B, dacă indicația manometrului M este $p_M = 0{,}5$ bar (presiune relativă).

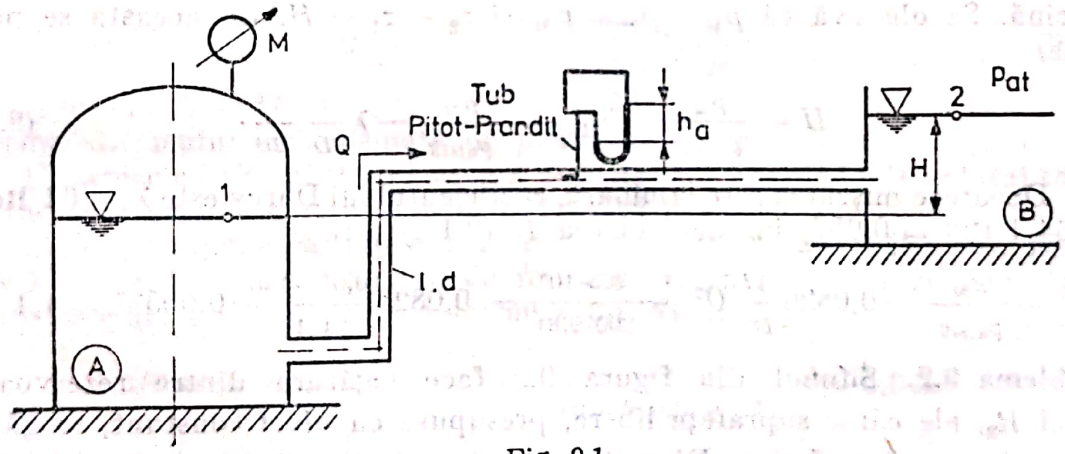


Fig. 9.1.

Rezolvare: a) Viteza teoretică determinată cu ajutorul tubului Pitot-Prandtl este

$$v_y = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \sqrt{2\left(\frac{\rho_a}{\rho_{ulei}} - 1\right) g h_a} = \sqrt{2\left(\frac{1\,000}{800} - 1\right) \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}03} = 0{,}86 \text{ m/s}.$$

Se admite coeficientul de etalonare al aparatului Pitot-Prandtl unitar.

Dacă mișcarea este presupusă laminară, repartiția vitezei într-o secțiune a conductei este (7.1.10)

$$v = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} (R^2 - r^2), \qquad (9.1.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

în care r este raza punctului curent considerat, η este viscozitatea dinamică a lichidului, iar $\Delta p/l$ este pierderea de presiune pe unitatea de lungime de conductă.

În cazul considerat, $r = R - y$, și se poate determina pierderea de presiune pe unitatea de lungime a conductei

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{4\eta v_v}{R^2 - (R-y)^2} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 800 \cdot 0{,}86}{0{,}05^2 - (0{,}05 - 0{,}02)^2} = 103{,}2 \text{ Pa/m}.$$

Cu aceasta, debitul transportat de conductă, dat de relația (7.1.12), se scrie

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} = \frac{\pi \cdot 0{,}05^4}{8 \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 800} \cdot 103{,}2 = 0{,}0053 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Pentru verificare, se calculează numărul Reynolds al mișcării

$$\mathbf{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4 \cdot 0{,}0053}{\pi \cdot 0{,}1 \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 1\,128 < \mathbf{Re}_{cr},$$

deci mișcarea este laminară cum s-a presupus.

b) Se scrie relația lui Bernoulli pe o linie de curent între punctele l, pe suprafața liberă a rezervorului A, respectiv 2, pe suprafața liberă a rezervorului B

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_{ulei}} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_{ulei}} + gz_2 + gh_{r1-2}.$$

Se neglijează termenii cinetici în cele două suprafețe libere $v_1^2/2 = v_2^2/2 = 0$ iar conducta fiind lungă ($l = 1\,500\ D$), se neglijează pierderile locale de sarcină. Se observă că $p_1 - p_2 = p_M$ și $z_2 - z_1 = H$. Cu aceasta se poate scrie

$$H = \frac{p_M}{\rho_{ulei} g} - h_{r1-2} = \frac{p_M}{\rho_{ulei} g} - \lambda \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g}. \tag{9.1.2}$$

Deoarece mișcarea este laminară, coeficientul lui Darcy este $\lambda = 64/\mathbf{Re} = 64/1\,128 = 0{,}057$, iar denivelarea H (9.1.2) este

$$H = \frac{p_M}{\rho_{ulei} g} - 0{,}0826 \frac{\lambda l}{D^5} Q^2 = \frac{0{,}5 \cdot 10^5}{800 \cdot 9{,}81} - 0{,}0826 \frac{0{,}057 \cdot 150}{0{,}1^5} \cdot 0{,}0053^2 = 4{,}4 \text{ m}.$$

Problema 9.2. Sifonul din figura 9.2 face legătura dintre rezervoarele R_1 și R_2, ale căror suprafețe libere, presupuse cu nivel constant, se găsesc la presiunea atmosferică. Diametrul conductei sifonului este $D = 60$ mm, rugozitatea conductei este $k = 0{,}02$ mm. Lungimile conductei sînt : $l_{1,2} = 4$ m, $l_{2,3} = 10$ m și $l_{3,4} = 8$ m, iar coeficienții de pierdere locală de sarcină hidraulică au următoarele valori : la intrarea în conductă $\zeta_1 = 0{,}5$, la coturi $\zeta_2 = \zeta_3 = 0{,}5$, respectiv la ieșirea din conductă $\zeta_4 = 1$. Denivelarea dintre suprafețele libere ale celor două rezervoare este $H = 4$ m, iar supraîncălțarea conductei peste suprafața liberă din rezervorul R_1 este $H_1 = 2$ m. Se cere :

1) să se determine debitul volumic evacuat de sifon ;

2) să se calculeze presiunea relativă în amonte de cotul din punctul *3* (presiunea minimă).

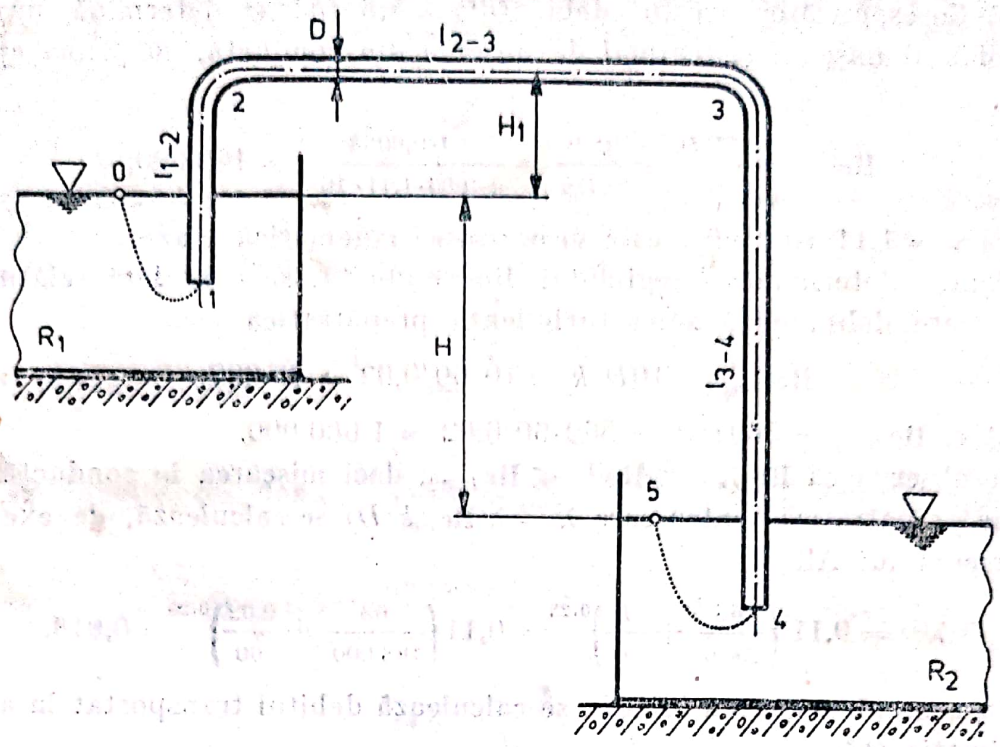


Fig. 9.2.

Rezolvare: 1) Din relația lui Bernoulli aplicată între punctul O, pe suprafața liberă a rezervorului R_1, și punctul 5, pe suprafața liberă a rezervorului R_2, rezultă

$$H = \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} + \sum_{i=1}^{4} \zeta_i \frac{V^2}{2g}; \qquad (9.2.1)$$

sarcina sistemului este disipată de pierderile de sarcină.

Deoarece coeficientul lui Darcy $\lambda = \lambda(\mathbf{Re}, k/D)$ depinde de debitul transportat, aici necunoscut, problema se rezolvă iterativ.

a) Se presupune că mișcarea în conductă este în zona pătratică, pentru care $\lambda = \lambda(k/D)$, sau nu depinde de numărul Reynolds, deci de debit și se poate calcula, de exemplu, cu formula lui Nikuradse

$$\lambda^{(0)} = \frac{1}{(2\lg(D/k) + 1{,}14)^2} = \frac{1}{(2\lg(60/0{,}02) + 1{,}14)^2} = 0{,}0153.$$

Scriind relația (9.2.1) în funcție de debitul transportat, se obține

$$H = 0{,}0826 \frac{Q^2}{D^4} \left(\lambda \frac{l}{D} + \sum_{i=1}^{4} \zeta_i \right), \qquad (9.2.2)$$

în care $0{,}0826 = 8/(g\pi^2)$; se poate obține debitul transportat în prima aproximație

$$Q^{(1)} = \sqrt{\frac{H \cdot D^4}{0{,}0826 \left(\lambda^{(0)} \frac{l}{D} + \sum_{i=1}^{4} \zeta_i \right)}} = \sqrt{\frac{0{,}06^4 \cdot 4}{0{,}0826 \left(0{,}0153 \frac{22}{0{,}06} + 2{,}5 \right)}} = 0{,}0088 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Corespunzător acestui debit $Q^{(1)} = 8{,}8$ l/s, se determină numărul Reynolds al mişcării şi regimul de mişcare din conductă, în prima aproximaţie,

$$\mathbf{Re}^{(1)} = \frac{V^{(1)}D}{\nu} = \frac{4Q^{(1)}}{\pi D\nu} = \frac{4\cdot 0{,}0088}{\pi\cdot 0{,}06\cdot 1{,}11\cdot 10^{-6}} = 168\,000,$$

în care $\nu = 1{,}11\cdot 10^{-6}$ m²/s este viscozitatea cinematică a apei.

Pentru determinarea regimului din conductă, se consideră relaţiile lui Altşul care delimitează zona turbulentă prepătratică

$$\mathbf{Re}_{lim1} = 10D/k = 10\cdot 60/0{,}02 = 30\,000,$$

respectiv, $\mathbf{Re}_{lim2} = 560D/k = 560\cdot 60/0{,}02 = 1\,680\,000$.

Se observă că $\mathbf{Re}_{lim1} < \mathbf{Re}^{(1)} < \mathbf{Re}_{lim2}$, deci mişcarea în conductă este în zona prepătratică pentru care $\lambda = \lambda(\mathbf{Re}, k/D)$ se calculează, de exemplu, cu formula lui Altşul

$$\lambda^{(1)} = 0{,}11\left(\frac{68}{\mathbf{Re}^{(1)}} + \frac{k}{D}\right)^{0{,}25} = 0{,}11\left(\frac{68}{168\,000} + \frac{0{,}02}{60}\right)^{0{,}25} = 0{,}018.$$

Cu această valoare a lui $\lambda^{(1)}$, se calculează debitul transportat în a doua aproximaţie $Q^{(2)}$

$$Q^{(2)} = \sqrt{\frac{HD^4}{0{,}0826\left(\lambda^{(1)}\frac{l}{D} + \sum_{i=1}^{4}\zeta_i\right)}} = \sqrt{\frac{4\cdot 0{,}06^4}{0{,}0826\left(0{,}018\frac{22}{0{,}06} + 2{,}5\right)}} = 8{,}3\cdot 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}.$$

Corespunzător acestui debit, numărul Reynolds al mişcării este $\mathbf{Re}^{(2)} = V^{(2)}D/\nu = 159\,000$, valoare care corespunde, de asemenea zonei prepătratice, pentru care $\lambda^{(2)}$ în a doua aproximaţie se determină tot cu relaţia lui Altşul

$$\lambda^{(2)} = 0{,}11\left(\frac{68}{\mathbf{Re}^{(2)}} + \frac{k}{D}\right)^{0{,}25} = 0{,}11\left(\frac{68}{159\,000} + \frac{0{,}02}{60}\right)^{0{,}25} = 0{,}0183.$$

Pentru această valoare $\lambda^{(2)} = 0{,}0183$ a coeficientului lui Darcy, se determină debitul $Q^{(3)}$ în a treia aproximaţie

$$Q^{(3)} = \sqrt{\frac{HD^4}{0{,}0826\left(\lambda^{(2)}\frac{l}{D} + \sum_{i=1}^{4}\zeta_i\right)}} = \sqrt{\frac{4\cdot 0{,}06^4}{0{,}0826\left(0{,}0183\frac{22}{0{,}06} + 2{,}5\right)}} = 8{,}25\cdot 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}$$

Se observă că eroarea relativă între debitele din ultimele două iteraţii ε_Q este

$$\varepsilon_Q = \frac{|Q^{(2)} - Q^{(3)}|}{Q^{(3)}} = \frac{8{,}3 - 8{,}25}{8{,}25} = 0{,}006;$$

$\varepsilon_Q < 0{,}01$ are o valoare suficient de mică, încît se poate considera încheiat calculul, debitul sifonului fiind $Q = 8{,}25$ l/s.

Scanned with OKEN Scanner

2) Pentru determinarea presiunii relative în amonte de cotul *3*, se scrie relaţia lui Bernoulli între suprafaţa liberă din rezervorul R_1 şi secţiunea *3* considerată :

$$\frac{V_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gz_0 = \frac{V_3^2}{2} + \frac{p_3}{\rho} + gz_3 + gh_{r0-3},$$

în care s-a considerat viteza medie repartizată uniform în cele două secţiuni ($\alpha_0 = \alpha_3 = 1$). Viteza V_0 la suprafaţa liberă se poate neglija, $z_3 - z_0 = H_1$, iar $p_0 = p_{at}$, astfel încît $p_{ro} = 0$ şi rezultă

$$\frac{p_{r3}}{\rho g} = -H_1 - \frac{V_3^2}{2g}\left(1 + \lambda\frac{l_{03}}{D} + \sum_{i=1}^{3}\zeta_i\right)$$

sau, în funcţie de debit, $\frac{p_{r3}}{\rho g} = -H_1 - 0{,}0826\frac{Q^2}{D^4}\left(1 + \lambda\frac{l_{03}}{D} + \sum_{i=1}^{3}\zeta_i\right)$,

adică $\frac{p_{r3}}{\rho g} = -2 - 0{,}0826\frac{(8{,}25\cdot 10^{-3})^2}{0{,}06^4}\left(1 + 0{,}0183\frac{14}{0{,}06} + 1{,}5\right)$,

deci $$\frac{p_{r3}}{\rho g} = -5{,}37 \text{ m},$$

respectiv, presiunea absolută în *3* este mai mare decît presiunea de vaporizare şi nu se produce cavitaţie.

Problema 9.3. O conductă orizontală de alimentare cu apă are modulul de debit $K = 0{,}4$ m³/s (care corespunde diametrului $D = 200$ mm şi coeficientului lui Darcy $\lambda = 0{,}0241$). În vederea semnalării unor eventuale pierderi de debit prin fisurarea conductei, pe aceasta s-au montat la extremităţile A şi B cîte un manometru şi un debitmetru, lungimea conductei fiind $AB = l = 200$ m. În situaţia cînd se produce o fisurare a conductei, în punctele A şi B se citesc următoarele presiuni şi debite : $p_A = 1$ bar, $p_B = 0{,}3$ bar, $Q_A = 80$ l/s, $Q_B = 70$ l/s. Să se determine prin calcul locul apariţiei fisurii.

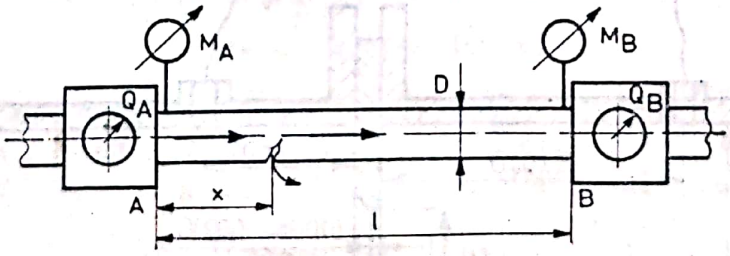


Fig. 9.3.

Rezolvare : Se consideră că fisura se găseşte la distanţa x de nodul A. Pentru determinarea poziţiei x, se scrie ecuaţia energiei între punctele A şi B.

$$\frac{\alpha_A V_A^2}{2} + \frac{p_A}{\rho} + gz_A = \frac{\alpha_B V_B^2}{2} + \frac{p_B}{\rho} + gz_B + gh_{dAB} + gh_l, \qquad (9.3.1)$$

în care $h_{dAB} = h_{dAx} + h_{dxB}$ este pierderea distribuită de sarcină, iar h_l este pierderea locală de sarcină hidraulică în secţiunea fisurii, datorită scăderii

Scanned with OKEN Scanner

bruşte a vitezei în conductă prin micşorarea debitului (analog unei evazări a secţiunii), $h_l = (V_A - V_B)^2/2\,g$.

Se admite că $\alpha_A = \alpha_B = 1$, iar $z_A = z_B$. Pierderile distribuite de sarcină sînt :

$$h_{dAx} = \frac{Q_A^2}{K^2}\,x\,; \qquad h_{dxB} = \frac{Q_B^2}{K^2}\,(l - x), \tag{9.3.2}$$

respectiv cele locale $h_l = \dfrac{(V_A - V_B)^2}{2g} = \dfrac{8}{g\pi^2 D^4}\,(Q_A - Q_B)^2.$ (9.3.3)

Cu aceasta, relaţia (9.3.1) devine

$$\frac{p_A - p_B}{\rho g} = \frac{8}{g\pi^2 D^4}[Q_B^2 - Q_A^2 + (Q_A - Q_B)^2] + \frac{Q_A^2}{K^2}\,x + \frac{Q_B^2}{K^2}\,(l - x),$$

de unde $x = \dfrac{K^2}{Q_A^2 - Q_B^2}\left\{\dfrac{p_A - p_B}{\rho g} - \dfrac{8}{g\pi^2 D^4}[Q_B^2 - Q_A^2 + (Q_A - Q_B)^2] - \dfrac{Q_B^2}{K^2}\,l\right\}$,

$$x = \frac{0{,}4^2}{0{,}08^2 - 0{,}07^2}\left\{\frac{(1 - 0{,}3)\cdot 10^5}{9\,810} - \frac{8}{9{,}81\cdot\pi^2\cdot 0{,}2^4}[0{,}08^2 - 0{,}07^2 + (0{,}08 - 0{,}07)^2 - \frac{0{,}07^2}{0{,}4^2}\cdot 200\right\}.$$

Rezultă $x = 99$ m.

Problema 9.4. Printr-o conductă cu diametrul $D = 200$ mm, se transportă un debit de apă cuprins între $Q_1 = 40$ l/s şi $Q_2 = 80$ l/s. Pentru măsurarea debitului, se foloseşte o diafragmă cu prize la D şi $D/2$, amonte, respectiv,

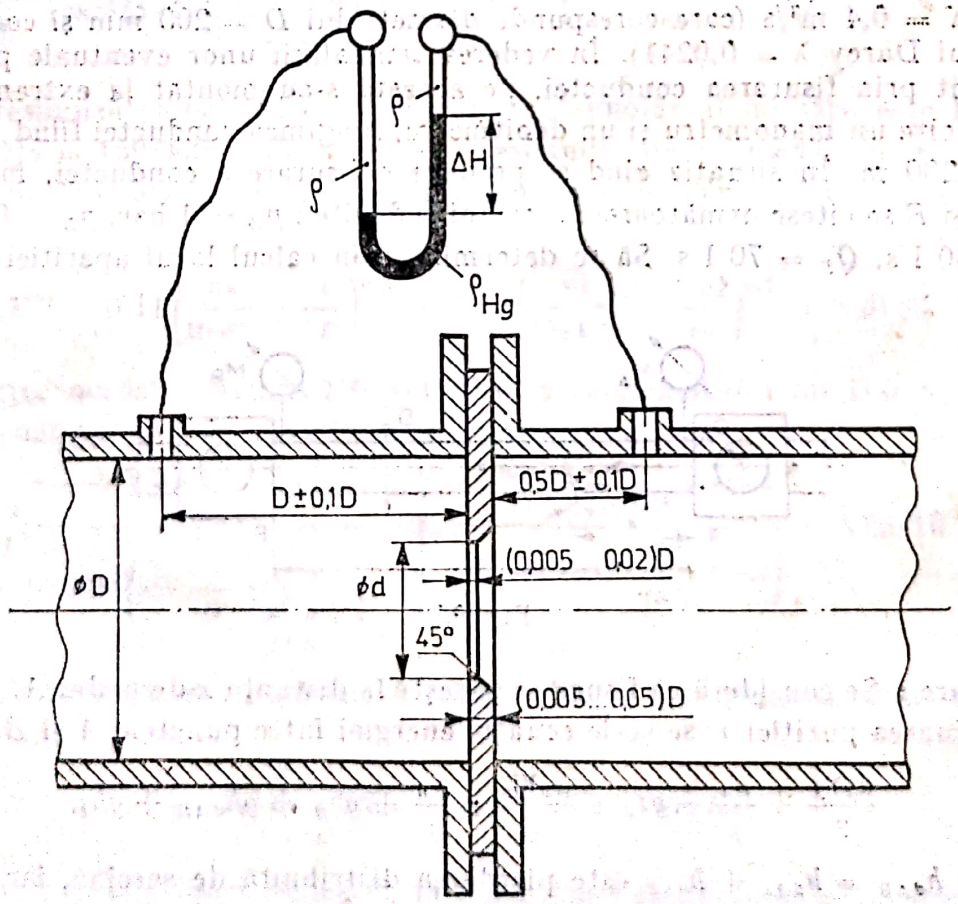


Fig. 9.4.

aval de diafragmă, ca în figura 9.4. Diferența de presiune între aceste prize se măsoară cu un manometru diferențial cu mercur cu înălțimea 1 000 mm. Se cere:

a) să se dimensioneze diafragma;

b) să se determine intervalul în care variază ΔH, denivelarea arătată de manometrul diferențial;

c) să se determine pierderea de sarcină în diafragmă pentru debitul maxim transportat.

Rezolvare: a) Pentru dimensionarea diafragmei, se impune diferența maximă de presiune, corespunzătoare denivelării $\Delta H \cong 1\,000$ mm la manometrul diferențial cu mercur.

Debitul prin diafragmă este $$Q = \frac{\pi d^2}{4}\alpha\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \frac{\pi D^2}{4}\beta^2\alpha\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}, \quad (9.4.1)$$

în care D este diametrul conductei, d este diametrul interior al orificiului diafragmei, iar Δp este diferența de presiune între prizele diafragmei; aici $\Delta p = (\rho_{Hg} - \rho)g\Delta H$. S-a notat cu β raportul celor două diametre $\beta = d/D$.

Deci se poate scrie: $$Q = \frac{\pi D^2}{4}\beta^2\alpha\sqrt{2g\left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho} - 1\right)\Delta H}$$

și, considerînd pentru $Q = 80$ l/s că $\Delta H = 1$ m, se obține

$$\alpha\beta^2 = \frac{4Q}{\pi D^2\sqrt{2g\left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho} - 1\right)\Delta H}} = \frac{4\cdot 0{,}08}{\pi\cdot 0{,}2^2\sqrt{2\cdot 9{,}81\left(\frac{13\,590}{1\,000} - 1\right)\cdot 1}} = 0{,}162.$$

Din STAS 7347/74, pentru valoarea $\alpha\beta^2 = 0{,}162$, se găsește valoarea aproximativă $\beta^2 = 0{,}26$, de unde rezultă $\beta = 0{,}51$, respectiv $d = \beta D = 0{,}51\cdot 200 = 102$ mm.

Pentru diafragma considerată, se alege $d = 106$ mm, deci $\beta = d/D = 106/200 = 0{,}53$.

Numărul Reynolds al mișcării prin conductă

$$\mathbf{Re} = VD/\nu = 4Q/(\pi D\nu)$$

variază între $\mathbf{Re}_1 = 0{,}459\cdot 10^6$, pentru $Q_1 = 40$ l/s și $\mathbf{Re}_2 = 0{,}23\cdot 10^6$, pentru $Q_2 = 80$ l/s. Cu aceste valori ale numărului Reynolds, respectiv a lui β, se obține* $\alpha = 0{,}6307$. Cu aceasta debitul prin diafragmă este

$$Q = \frac{\pi d^2}{4}\alpha\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \frac{\pi d^2}{4}\alpha\sqrt{2g\left(\frac{\rho_{Hg}}{\rho} - 1\right)\Delta H}, \quad (9.4.2)$$

adică $$Q = \frac{\pi\cdot 0{,}106^2}{4}\cdot 0{,}6307\sqrt{2\cdot 9{,}81\left(\frac{13{,}59}{1} - 1\right)\Delta H};$$

$$Q = 0{,}0875\sqrt{\Delta H}.$$

* Norme Internaționale ISO 5167-1980. Mesure de debit des fluides au moyen de diafragmes, tuyères et tubes de Venturi insérés dans des conductes en charge de section circulaire.

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru valorile extreme ale debitului, se obţin următoarele valori ale denivelării ΔH, măsurate la manometrul diferenţial

$$\Delta H_1 = Q_1^2/0{,}0875^2 = 0{,}209 \text{ m},$$

respectiv,

$$\Delta H_2 = Q_2^2/0{,}0875^2 = 0{,}836 \text{ m}.$$

c) Pentru determinarea pierderii de presiune (sau de sarcină) în zona diafragmei, se recomandă relaţia*

$$\Delta p_r = \frac{1 - \alpha\beta^2}{1 + \alpha\beta^2} \Delta p,$$

în care Δp_r este pierderea de presiune în diafragmă, iar Δp este diferenţa de presiune măsurată între feţele diafragmei.

Deci, pentru debitul $Q_2 = 0{,}08$ m³/s, diferenţa de presiune este

$$\Delta p = (\rho_{Hg} - \rho) g \Delta H_2 = 103{,}5 \text{ kPa},$$

Domeniile de utilizare a

Intervalul de debite l/s	D mm	d mm	β —	α —	D mm	d mm	β —	α —
1...2	50	16	0,320	0,6036	80	25,5	0,319	0,6029
2...4		22,5	0,450	0,6167		31	0,388	0,6097
2...5		27,5	0,550	0,6382		36	0,450	0,6164
4...8	200					40	0,500	0,6252
5...10						44	0,550	0,6368
6,3...12						50	0,625	0,6697
8...16						56,5	0,706	0,7036
10...20								
12...25								
16...32		68	0,340	0,6039	300	95	0,317	0,6022
20...40		75	0,375	0,6068		108	0,360	0,6051
25...50		83,5	0,418	0,6111		127	0,423	0,6113
32...63		93	0,465	0,6176		135	0,450	0,6153
40...80		106	0,530	0,6307		153	0,510	0,6259
50...100		116,5	0,583	0,6444		170	0,567	0,6402
63...120		128	0,640	0,6668		185	0,617	0,6566
80...160		141	0,705	0,7009		204	0,680	0,6856
100...200		155	0,775	0,7575*		225	0,750	0,7338
120...250						242	0,807	0,7931*
160...320								
200...400								
250...500								
320...630								
400...800								
500...1 000								
600...1 200								
800...1 600								

* Valori orientative, în afara indicaţiilor din standarde.

* Norme ISO 5167-1980.

Scanned with OKEN Scanner

respectiv pierderea de presiune în diafragmă

$$\Delta p_r = \frac{1 - 0{,}53^2 \cdot 0{,}6301}{1 + 0{,}53^2 \cdot 0{,}6301} 103\,500 = 73{,}4 \text{ kPa}.$$

Aceasta corespunde la o pierdere de sarcină în diafragmă

$$h_r = \frac{\Delta p_r}{\rho g} = \frac{73\,400}{9{,}81 \cdot 10^3} = 7{,}48 \text{ m}.$$

Pentru a se uşura operaţia de alegere şi dimensionare a diafragmelor, de tip cu prize la D şi $D/2$, se propune tabelul 9.4, în care, pentru diferite intervale de debite şi diametre de conducte, se recomandă caracteristicile diafragmelor.

Tabelul 9.4

diafragmelor cu prize la D şi $D/2$

D mm	d mm	β —	α —	D mm	d mm	β —	α —
100	37,5	0,375	0,6072	150	48	0,320	0,6027
	42	0,420	0,6122		53,5	0,357	0,6056
	47,5	0,475	0,6201		60,5	0,403	0,6100
	53	0,530	0,6315		69	0,460	0,6173
	59	0,590	0,6482		76	0,507	0,6257
	65	0,650	0,6729		84,5	0,563	0,6386
					93	0,620	0,6584
					103	0,687	0,6872
400	141	0,353	0,6055	500	176,5	0,353	0,6044
	160	0,400	0,6088		193	0,386	0,6083
	176	0,440	0,6137		214	0,428	0,6120
	194	0,485	0,6209		243	0,486	0,6207
	215	0,538	0,6325		267	0,534	0,6310
	236	0,590	0,6469		295	0,590	0,6471
	260	0,650	0,6702		325	0,650	0,6716
	285	0,713	0,7058		355	0,710	0,7037
	310	0,775	0,7574*		384	0,768	0,7481*
	331	0,828	0,8162*		418	0,836	0,8240*

Scanned with OKEN Scanner

Problema 9.5. Un amestecător constă din două conducte concentrice: cea interioară debușează în cea exterioară pentru a amesteca fluidele A și B. Lichidul A are densitatea $\rho_A = 650$ kg/m³ și curge în conducta interioară cu diametrul $D_A = 25$ mm, debitul masic fiind $Q_{mA} = 2$ kg/s. Lichidul B cu densitatea $\rho_B = 975$ kg/m³ curge între conducta interioară și cea exterioară cu diametrul $D_B = 50$ mm, debitul masic fiind $Q_{mB} = 4$ kg/s (fig. 9.5).

Să se calculeze presiunile în rezervoarele de alimentare ale lichidelor A și B, precum și pierderea de putere în sistem. Se consideră că conducta B debușează la presiunea atmosferică și că pierderea de sarcină hidraulică este neglijabilă.

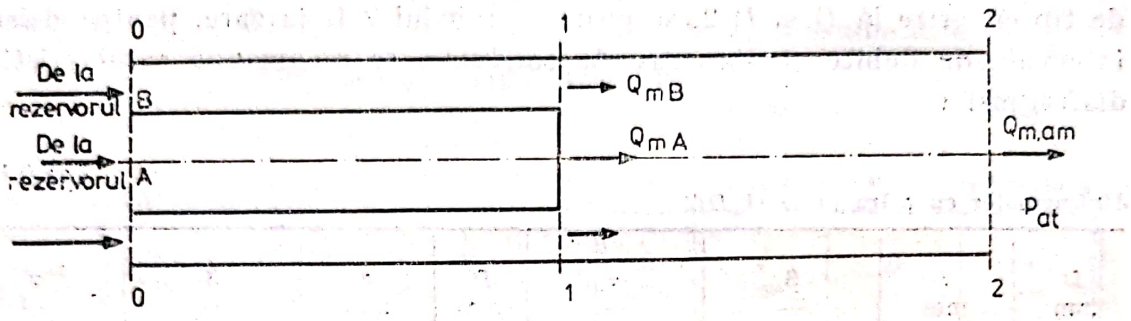


Fig. 9.5.

Rezolvare : Se scrie ecuația continuității și se determină vitezele medii în conducte :

$$V_A = \frac{4Q_{mA}}{\rho_A \pi D_A^2} = \frac{4 \cdot 2}{650 \cdot \pi \cdot 0{,}025^2} = 6{,}26 \text{ m/s};$$

$$V_B = \frac{4Q_{mB}}{\rho_B \pi (D_B^2 - D_A^2)} = \frac{4 \cdot 4}{975 \cdot \pi (0{,}05^2 - 0{,}025^2)} = 2{,}78 \text{ m/s},$$

respectiv viteza amestecului după omogenizare

$$V_{am} = \frac{4}{\pi D_B^2}\left(\frac{Q_{mA}}{\rho_A} + \frac{Q_{mB}}{\rho_B}\right) = \frac{4}{\pi \cdot 0{,}05^2}\left(\frac{2}{650} + \frac{4}{975}\right) = 3{,}66 \text{ m/s}.$$

Pentru a se determina pierderea de presiune la amestecul celor două lichide, se scrie teorema cantității de mișcare pentru o suprafață de control formată din conductă și din secțiunile drepte *1-1* și *2-2* (proiecția pe axa conductei)

$$Q_{m,am} V_{am} - Q_{mA} V_A - Q_{mB} V_B = \Delta p (A_A + A_{AB}),$$

în care A_A este aria conductei mici și A_{AB} este aria secțiunii dintre cele două conducte ($A_A + A_{AB} = A_B$), A_B fiind aria conductei mari.

Cu aceasta rezultă

$$\Delta p = \frac{Q_{m.am} V_{am} - Q_{mA} V_A - Q_{mB} V_B}{A_B} = \frac{(2+4) \cdot 3{,}66 - 2 \cdot 6{,}26 - 4 \cdot 2{,}78}{\pi \cdot 0{,}05^2/4},$$

$$\Delta p = -856 \text{ Pa}.$$

Semnul minus semnifică scăderea presiunii de la stînga la dreapta, în sensul presupus pozitiv pentru axa conductei.

Scanned with OKEN Scanner

Scriind relaţia lui Bernoulli de la suprafaţa liberă a rezervoarelor pînă în secţiunea *1-1* se obţine

$$p_A = \rho_A \cdot V_A^2/2 + \Delta p = 650 \cdot 6{,}26^2/2 - 856 = 11\,880 \text{ Pa},$$

respectiv $p_B = \rho_B \cdot V_B^2/2 + \Delta p = 975 \cdot 2{,}78^2/2 - 856 = 2\,912$ Pa.

Pierderea de putere din sistem este dată de diferenţa dintre puterea curentului în amonte (reprezentată prin energia de presiune) şi puterea curentului în aval (reprezentată de energia cinetică a amestecului)

$$\Delta P = (p_A Q_{mA}/\rho_A + p_B Q_{mB}/\rho_B) - (Q_{mA} + Q_{mB}) V_{am}^2/2 =$$
$$= (11\,880 \cdot 2/650 + 2\,912 \cdot 4/975) - (2 + 4) 3{,}66^2/2 = 8{,}3 \text{ W}.$$

Problema 9.6. O reţea se compune din două conducte montate în paralel, avînd diametrele $D_1 = 200$ mm, $D_2 = 250$ mm şi lungimile $l_1 = 100$ m şi $l_2 = 200$ m. Pe ramura a doua se găseşte montată o vană plană cu sertar, deschisă 50%. Conductele sînt din fontă, noi, cu rugozitatea $k = 0{,}25$ mm (fig. 9.6).

Să se determine repartiţia debitului $Q = 12$ m³/min pe cele două ramuri şi pierderea de sarcină pe zona derivaţiei, dacă apa are temperatura $\theta = 20°C$ pentru care viscozitatea cinematică este $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ m²/s.

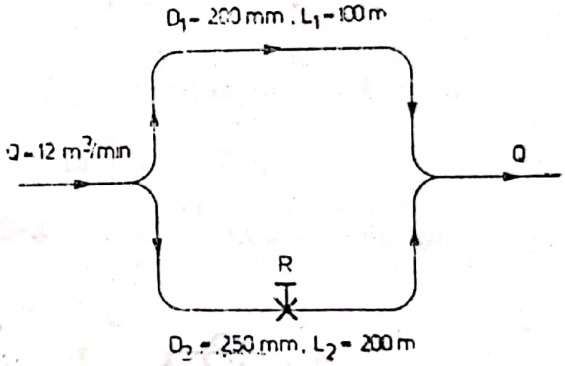


Fig. 9.6.

Rezolvare : Pierderea de sarcină hidraulică pe cele două ramuri legate în paralel este aceeaşi :

$$h_r = \lambda_1 \frac{l_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} =$$
$$= \lambda_2 \frac{l_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} + \zeta \frac{V_2^2}{2g}. \quad (9.6.1)$$

Din ecuaţia de continuitate rezultă : $V_1 = Q_1/A_1$; $V_2 = Q_2/A_2$, astfel că din (9.6.1) se obţine :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \sqrt{\frac{\lambda_2 l_2/D_2 + \zeta}{\lambda_1 l_1/D_1}}. \quad (9.6.2)$$

Se admite iniţial o valoare orientativă pentru coeficienţii pierderilor de sarcină hidraulică distribuite $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}020$, iar din anexa A.7 se găseşte $\zeta = 4{,}5$ pentru deschiderea sertarului de 50%. Se obţine : $Q_1/Q_2 = 0{,}916$ şi $V_2 = 2{,}13$ m/s.

Se calculează numărul Reynolds al curgerii.

Din abaca lui Moody (vezi anexa A.7), pentru rugozitatea relativă $k/D_2 = 0{,}001$, se obţine $\lambda_2 = 0{,}02$, în acord cu ipoteza făcută.

Se calculează : $h_r = (\lambda_2 \cdot l_2/D_2 + \zeta) V_2^2/(2g) = 4{,}65$ m.

Similar, se calculează viteza medie în ramura *(1)*

$$V_1 = 3{,}04 \text{ m/s şi } \mathrm{Re}_1 = V_1 D_1/\nu = 6{,}09 \cdot 10^5.$$

Din aceeaşi abacă Moody, pentru $k/D_1 = 0{,}0013$, rezultă $\lambda_1 = 0{,}0208$ şi, în continuare, $h_{r1} = 4{,}8$ m.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a ajunge la egalitatea $h_{r1} = h_{r2}$, se modifică puţin raportul debitelor, admiţîndu-se $Q_1 = 0{,}105$ m³/s şi $Q_2 = 0{,}095$ m³/s, obţinîndu-se $h_{r1} = 4{,}7$ m şi $h_{r2} = 4{,}73$ m, valori satisfăcătoare.

Este de notat faptul că, deşi $D_2 > D_1$, $Q_2 < Q_1$, datorită rezistenţei hidraulice mari a robinetului.

Problema 9.7. O pompă centrifugă cu arbore orizontal aspiră apa de la cota $z_1 = 26$ m şi o refulează la cota $z_2 = 46$ m. Axa pompei este situată la $H_a = 3$ m deasupra nivelului suprafeţei libere din bazinul de aspiraţie, iar flanşa de refulare a pompei este situată la cota $z_r = 30{,}2$ m. Debitul refulat de pompă este $Q = 2{,}6$ m³/s. Conducta de refulare are diametrul $D_r = 1\,000$ mm şi este construită din 4 tronsoane rectilinii cu lungimea $l_r = 10$m şi trei coturi, avînd acelaşi coeficient de pierdere locală de sarcină $\zeta_c = 3$ (fig. 9.7).

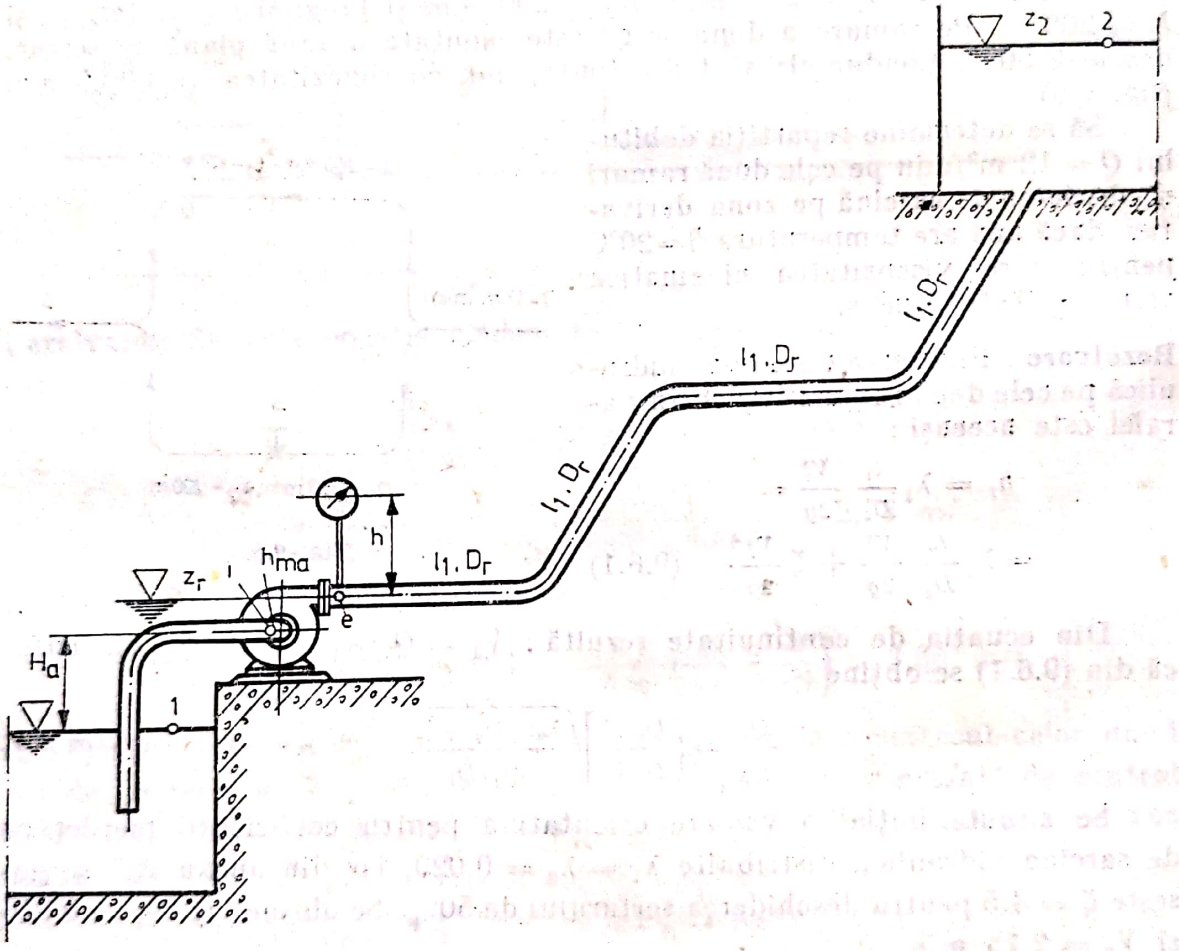


Fig. 9.7.

Neglijînd viteza în bazinul de aspiraţie, pierderea locală la ieşirea din conductă şi considerînd, pentru porţiunile drepte de conductă, coeficientul lui Chézy $C = 48$, se cere :

1) sarcina la care funcţionează pompa ;

2) indicaţia (în m şi MPa) a manometrului montat la flanşa de refulare dacă axa lui este cu $h = 3$ m mai sus de flanşă ;

3) depresiunea la intrarea în pompă dacă conducta de aspiraţie are $D_a = 1\,200$ mm şi se neglijează pierderile de sarcină pe această conductă ;

Scanned with OKEN Scanner

4) puterea mecanică absorbită de pompă dacă randamentul ei este $\eta = 0{,}8$.

Rezolvare : 1) Sarcina pompei se poate defini

$$H = (V_e^2 - V_i^2)/2 + (p_e - p_i)/(\rho g) + z_e - z_i = H_g + h_{r1,2}, \qquad (9.7.1)$$

unde s-a notat punctul i la intrarea în pompă, punctul e la ieşirea din pompă, cu $H_g = z_2 - z_1$, înălţimea geodezică, iar cu $h_{r1,2}$, pierderile de sarcină pe conductele ce unesc cele două rezervoare.

Pierderile de sarcină se scriu

$$h_{r1,2} = h_{d1,2} + \sum_1^2 h_l,$$

deci

$$h_{r1,2} = \frac{Q^2}{K^2} l_{e2} + \sum_e^2 \zeta \frac{V^2}{2g} = 3\frac{Q^2}{K^2} l_1 + 0{,}0826 \frac{Q^2}{D_r^2} \sum_e^2 \zeta, \qquad (9.7.2)$$

unde $K = AC\sqrt{R}$ este modulul de debit al conductei

$$K = AC\sqrt{R} = \frac{\pi D_r^2}{4} C \sqrt{\frac{D_r}{4}} = \frac{\pi D_r^{2,5}}{8} C = \frac{\pi \cdot 1^{2,5}}{8} 48 = 18{,}84 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Cu aceasta, pierderile de sarcină rezultă din (9.7.2)

$$h_{r1,2} = 3\frac{2{,}6^2}{18{,}84^2} \cdot 10 + 0{,}0826 \frac{2{,}6^2}{1^4} 3 \cdot 3 = 0{,}57 + 5{,}03 = 5{,}60 \text{ m}.$$

Deci sarcina pompei este

$$H = z_2 - z_1 + h_{r1,2} = 46 - 26 + 5{,}6 = 25{,}6 \text{ m}.$$

2) Se scrie relaţia lui Bernoulli între punctele e şi 2

$$V_e^2/2 + p_e/\rho + gz_e = V_2^2/2 + p_2/\rho + gz_2 + gh_{re,2}. \qquad (9.7.3)$$

Considerînd $V_2 = 0$, presiunea relativă din punctul e se poate scrie

$$p_{re} = p_e - p_{at} = \rho g(z_2 - z_e) + \rho g h_{re,2} - \rho V_e^2/2$$

sau $p_{re}/(\rho g) = (p_e - p_{at})/(\rho g) = z_2 - z_e + h_{re,2} - V_e^2/(2g) = 46 - 30{,}2 +$

$$+ 5{,}6 - 0{,}0826 \cdot 2{,}6^2/14$$

$$p_{re}/(\rho g) = 20{,}84 \text{ m}.$$

Dacă manometrul s-ar plasa la cota z_r, acesta ar arăta presiunea p_{re}, dar, fiind plasat la cota $z_r + h$, indică presiunea

$$p_M/(\rho g) = p_{re}/(\rho g) - h = 17{,}84 \text{ m},$$

respectiv $p_M = p_{re} - \rho g h = 0{,}175$ MPa.

3) Pentru determinarea depresiunii la intrarea în pompă (i) se scrie relaţia lui Bernoulli între punctul *1* şi punctul i

$$V_1^2/2 + p_1/\rho + gz_1 = V_i^2/2 + p_i/\rho + gz_i + gh_{r1,i}. \qquad (9.7.4)$$

Scanned with OKEN Scanner

Se consideră $V_1 = 0$, $h_{r1,t} = 0$, $p_1 = p_{at}$ și rezultă din (9.7.4)

$$\frac{p_t - p_{at}}{\rho g} = z_1 - z_t - \frac{V_t^2}{2g} = z_1 - z_t - 0{,}0826\,\frac{Q^2}{D_a^4};$$

$$\frac{p_{at} - p_t}{\rho g} = z_t - z_1 + 0{,}0826\,\frac{Q^2}{D_a^4} = 3 + 0{,}0826\,\frac{2{,}6^2}{1{,}2^4} = 3{,}27 \text{ m}.$$

Deci presiunea vacuummetrică la intrarea în pompă este 3,27 m H_2O adică presiunea absolută este 6,73 m H_2O.

4) Puterea mecanică absorbită de pompă este

$$P = \rho g Q H/\eta = 9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 2{,}6 \cdot 25{,}6/0{,}8 = 816{,}2 \text{ kW}.$$

Problema 9.8. O conductă cu diametrul $D = 100$ mm și lungimea $L = 2\,000$ m transportă un debit $Q = 400$ l/min de petrol. Petrolul poate fi transportat la temperatura $\theta_1 = 10°C$, pentru care viscozitatea cinematică este $\nu_1 = 180$ St, sau la temperatura $\theta_2 = 40°C$, la care viscozitatea petrolului este $\nu_2 = 25$ St. La ambele temperaturi, densitatea petrolului este $\rho = 900$ kg/m³ și căldura specifică este $c = 2\,200$ J/kg K. Se cere :

1) să se determine pierderile de presiune pe conductă la temperatura θ_1, respectiv la temperatura θ_2 ;

2) să se determine lungimea minimă a conductei L_0, de la care încălzirea petrolului la temperatura θ_2 devine avantajoasă.

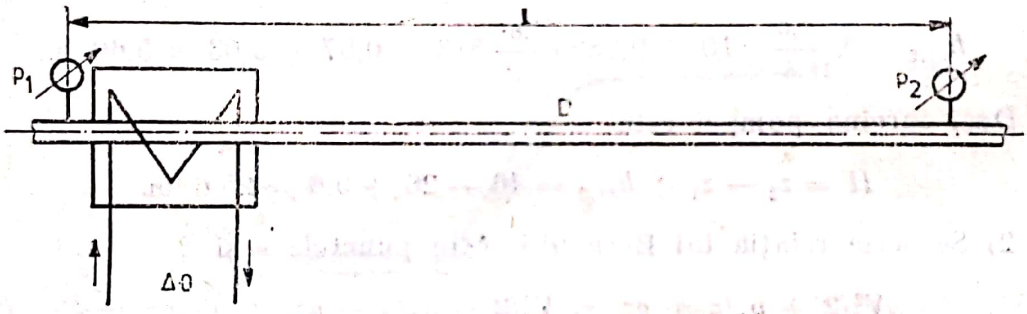


Fig. 9.8.

Rezolvare : 1) Pentru determinarea pierderilor de presiune pe conductă, este necesar să se determine regimul de mișcare în conductă în cele două cazuri

$$\mathbf{Re}_1 = \frac{V \cdot D}{\nu_1} = \frac{4Q}{\pi D \nu_1} = \frac{4 \cdot 400 \cdot 10^{-3}/60}{\pi \cdot 0{,}1 \cdot 180 \cdot 10^{-4}} = 4{,}72,$$

respectiv

$$\mathbf{Re}_2 = \frac{V \cdot D}{\nu_2} = \frac{4Q}{\pi D \nu_2} = \frac{4 \cdot 400 \cdot 10^{-3}/60}{\pi \cdot 0{,}1 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = 33{,}95.$$

Deci, în ambele cazuri, mișcarea este laminară, foarte lentă. Coeficientul lui Darcy λ este

$$\lambda_1 = 64/\mathbf{Re}_1 = 64/4{,}72 = 13{,}56,$$

respectiv

$$\lambda_2 = 64/\mathbf{Re}_2 = 64/33{,}95 = 1{,}89.$$

Cu aceasta pierderile de presiune pe conductă în cele două cazuri sînt

$$\Delta p_1 = p_1 - p_2 = \rho g h_{r1,2} = \rho \lambda_1 \frac{L}{D}\frac{V^2}{2} = \frac{8\rho}{\pi^2}\lambda_1 \frac{L}{D^5} Q^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

adică $$\Delta p_1 = \frac{8\cdot 900}{\pi^2}\cdot 13{,}56\cdot \frac{2\,000}{0{,}1^5}\left(\frac{400\cdot 10^{-3}}{60}\right)^2 = 87{,}9 \text{ MPa},$$

respectiv $$\Delta p_2 = \frac{8\rho}{\pi^2}\lambda_2\frac{L}{D^5}Q^2 = \frac{8\cdot 900}{\pi^2}\cdot 1{,}89\cdot\frac{2\,000}{0{,}1^5}\left(\frac{400\cdot 10^{-3}}{60}\right) = 12{,}2 \text{ MPa}.$$

Se observă că pierderile de presiune sînt mult mai mari în cazul transportării petrolului rece.

2) Pentru determinarea lungimii minime L_0 a conductei, pentru care este economică încălzirea, se consideră că puterea necesară pentru încălzire este egală cu diferența dintre puterile necesare pentru pompare în cele două cazuri.

Puterea necesară pentru pompare se poate scrie

$$P = \rho g Q h_{r1,2} = Q\cdot\Delta p,$$

iar diferența pentru cele două temperaturi este

$$\Delta P = P_1 - P_2 = Q(\Delta p_1 - \Delta p_2) = \frac{8\rho}{\pi^2}\frac{L}{D^5}Q^3(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Puterea consumată pentru încălzirea petrolului de la temperatura θ_1 la temperatura θ_2 este

$$P_t = \rho Q c(\theta_2 - \theta_1).$$

La limită $P = P_t$, deci $\rho Qc(\theta_2 - \theta_1) = \frac{8\rho}{\pi^2}\cdot\frac{L}{D^5}Q^3(\lambda_1 - \lambda_2)$,

de unde $$L_0 \geqslant \frac{c(\theta_2 - \theta_1)\pi^2 D^5}{8Q^2(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{2\,200(40 - 10)\pi^2\cdot 0{,}1^5}{8(400\cdot 10^{-3}/60)^2(13{,}56 - 1{,}89)} = 1\,700 \text{ m}.$$

Deci $L_0 \geqslant 1\,700$ m.

S-a considerat că petrolul nu se răcește pe parcurs și că randamentul pompei este egal cu cel al schimbătorului de căldură.

Problema 9.9. Pentru circuitul de apă din figura 9.9, se cunosc: $p_1 = 0{,}5$ MPa; $p_7 = p_{at} = 0{,}1$ MPa; $z_1 = 9$ m; $z_2 = z_3 = z_4 = 4{,}5$ m; $z_5 = z_6 = 0{,}5$ m, respectiv $z_7 = 6$ m. Diametrele conductelor sînt egale cu $D = 75$ mm, iar lungimile tronsoanelor au următoarele valori: $l_{2,3} = l_{3,4} = 2{,}5$ m; $l_{4,5} = l_{5,6} = 4$ m. Coeficienții pierderilor locale de sarcină sînt: $\zeta_2 = 0{,}5$; $\zeta_3 = 5$; $\zeta_4 = \zeta_5 = 0{,}5$; $\zeta_6 = 1$. Se cere:

1) să se calculeze debitul de apă prin conductă, considerînd regimul permanent, cotele z_1 și z_7 fixe și rugozitatea conductei $k = 0{,}1$ mm;

2) să se calculeze, în acest caz, presiunile relative în aval de punctele *2*, *3*, *4*, *5* și *6*;

3) să se determine elementele torsorului în punctul *4*, considerînd acțiunea apei și aerului atmosferic pe conducta *2—6*, ținînd seama de greutatea fluidului;

4) să se calculeze timpul în care viteza din conductă ajunge 99% din viteza de regim;

5) punînd partea superioară a rezervorului R_1 în contact cu atmosfera, să se calculeze timpul de egalizare a nivelurilor în cele două rezervoare, dacă ariile suprafețelor rezervoarelor sînt $A_1 = A_2 = 2$ m².

Scanned with OKEN Scanner

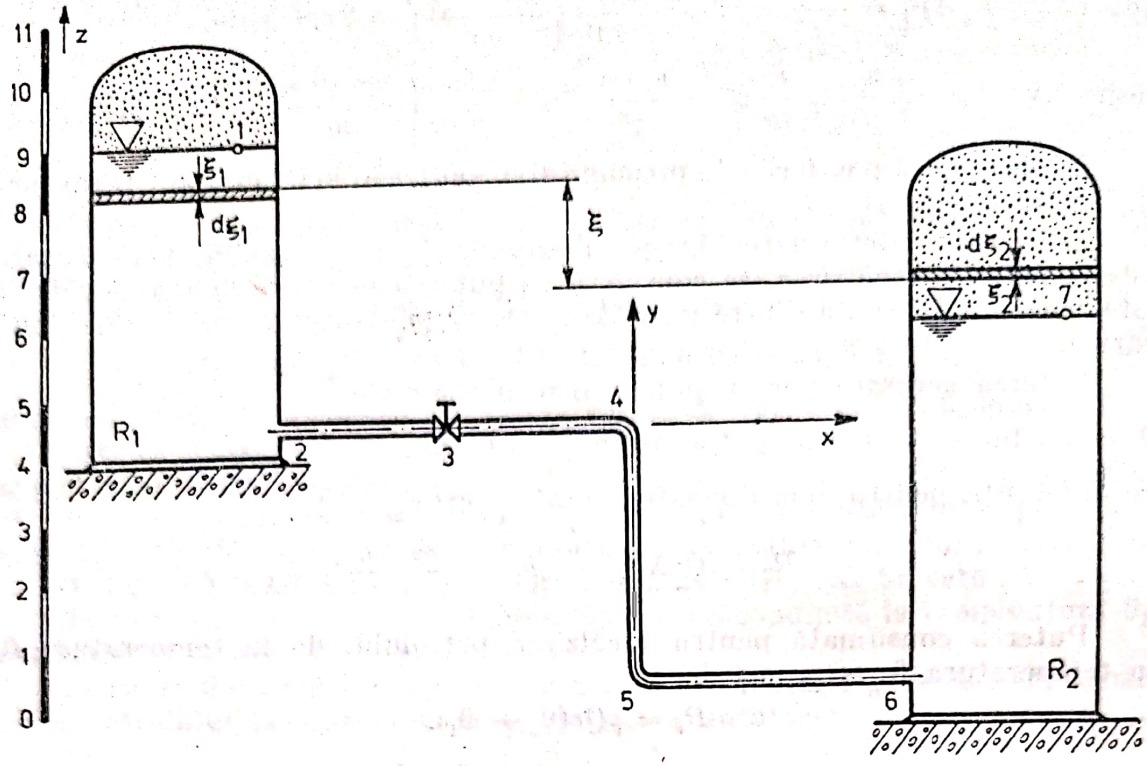


Fig. 9.9.

Rezolvare : 1) Se scrie relația lui Bernoulli între punctul *1* și punctul *7*

$$\alpha_1 V_1^2/2 + p_1/\rho + gz_1 = \alpha_7 V_7^2/2 + p_7/\rho + gz_7 + gh_{r1,7}.$$

Dacă se neglijează termenii cinetici în punctele *1* și *7*, $\alpha_1 V_1^2/2 = \alpha_2 V_2^2/2 \cong 0$, se obține

$$h_{r1,7} = \frac{p_1 - p_7}{\rho g} + z_1 - z_7,$$

sau

$$\frac{V^2}{2g}\left(\lambda \frac{l}{D} + \sum_{i=2}^{6} \zeta_i\right) = \frac{p_1 - p_7}{\rho g} + z_1 - z_7.$$

adică

$$\frac{8}{g\pi^2} \cdot \frac{Q^2}{D^4}\left(\lambda \frac{l}{D} + \sum_{i=2}^{6} \zeta_i\right) = \frac{p_1 - p_7}{\rho g} + z_1 - z_7.$$

De aici se obține debitul

$$Q = \sqrt{\frac{g\pi^2 D^4 \left(\frac{p_1 - p_7}{\rho g} + z_1 - z_7\right)}{8\left(\lambda \frac{l}{D} + \sum_{i=2}^{6} \zeta_i\right)}}. \qquad (9.9.1)$$

Deoarece determinarea debitului presupune determinarea coeficientului lui Darcy λ, iar acesta este funcție de debit prin intermediul numărului Reynolds al mișcării, calculul se va face iterativ.

Se presupune, într-o primă aproximație indice (0), că mișcarea în conducta ce leagă cele două rezervoare este turbulentă în regim pătratic ($\mathbf{Re} > \mathbf{Re}_{lim\,2}$), pentru care $\lambda = \lambda(k/D)$ și se va folosi relația Prandtl-Nikuradse

$$\lambda^{(0)} = \frac{1}{\left(2\lg\frac{D}{k} + 1{,}14\right)^2} = \frac{1}{\left(2\lg\frac{75}{0{,}1} + 1{,}14\right)^2} = 0{,}021. \qquad (9.9.2)$$

Cu această valoare se determină debitul $Q^{(1)}$ în această aproximație cu relația (9.9.1)

$$Q^{(1)} = \sqrt{\frac{9{,}81\cdot\pi\cdot 0{,}075^4\left(\frac{0{,}5 - 0{,}1}{9{,}81\cdot 10^3}\cdot 10^6 + 9 - 6\right)}{8\left(0{,}021\frac{13}{0{,}075} + 7{,}5\right)}} = 0{,}0388 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Se determină apoi numărul Reynolds al mișcării, considerînd viscozitatea cinematică a apei $\nu = 1{,}11\cdot 10^{-6}$ m^2/s

$$\mathbf{Re}^{(1)} = \frac{VD}{\nu} = \frac{4\cdot Q^{(1)}}{\pi D\nu} = \frac{4\cdot 0{,}0388}{\pi\cdot 0{,}075\cdot 1{,}11\cdot 10^{-6}} \cong 594\,000.$$

și valoarea numărului Reynolds limită, care separă zona turbulentă prepătratică de zona pătratică, utilizînd relația lui Moody,

$$\left(6{,}7 + \frac{13}{\mathbf{Re}_{lim2}}\right) = \frac{560D}{k} = \frac{560\cdot 0{,}075}{0{,}1\cdot 10^{-3}} = 420\,000.$$

Se observă că $\mathbf{Re} > \mathbf{Re}_{lim2}$, adică mișcarea este în zona pătratică, deci $\lambda^{(1)} = \lambda^{(0)}$ și $Q^{(2)} = Q^{(1)}$, valorile la pasul următor fiind identice cu cele inițiale. Deci debitul este

$$Q = 0{,}0388 \text{ m}^3/\text{s} = 38{,}8 \text{ l/s}.$$

3) Pentru determinarea presiunii în aval de punctul i, $i = 2, 3, 4, 5, 6$, se scrie relația lui Bernoulli între punctul *1* și punctul i (aval).

$$\alpha_1 V_1^2/2 + p_1/\rho + gz_1 = \alpha_i V_i^2/2 + p_i/\rho + gz_i + gh_{r1,i}.$$

Se neglijează, de asemenea termenul cinetic în punctul *1*, $\alpha_1 V_1^2/2 = 0$ și se consideră $\alpha_i = 1$, iar pierderile de sarcină pe tronsonul $1i$ se scriu

$$h_{r1,i} = h_{r2,i} = \frac{V^2}{2g}\left(\lambda\frac{l_{2i}}{D} + \sum_{j=2}^{i}\zeta_j\right),$$

deoarece, pe tronsonul *2—6*, secțiunea conductei este constantă.

Cu aceasta, presiunea în punctul i devine

$$p_i = p_1 + \rho g(z_1 - z_i) - \frac{\rho}{2}V^2\left(1 + \lambda\frac{l_{2i}}{D} + \sum_{j=2}^{i}\zeta_j\right).$$

În aval de punctul *2*, presiunea este

$$p_2 = p_1 + \rho g(z_1 - z_2) - \frac{\rho}{2}V^2(1 + \zeta_2) = 0{,}5\cdot 10^6 + 9\,810(9 - 4{,}5) -$$

$$- \frac{10^3}{2}\left(\frac{4\cdot 0{,}0388}{\pi\cdot 0{,}075^2}\right)^2(1 + 0{,}5) = 486{,}3 \text{ kPa}.$$

În mod similar $p_3 = p_1 + \rho g(z_1 - z_3) - \frac{\rho}{2} V^2 \left(1 + \lambda \frac{l_{23}}{D} + \zeta_2 + \zeta_3\right) =$

$= 0{,}5 \cdot 10^6 + 9\,810(9 - 4{,}5) - \frac{10^3}{2}\left(\frac{4 \cdot 0{,}0388}{\pi \cdot 0{,}075^2}\right)^2 \left(1 + 0{,}021 \frac{2{,}5}{0{,}075} + 5{,}5\right) =$

$= 266{,}6$ kPa ;

$p_4 = p_1 + \rho g(z_1 - z_4) - \frac{\rho}{2} V^2 \left(1 + \lambda \frac{l_{24}}{D} + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4\right) = 0{,}5 \cdot 10^6 +$

$+ 9\,810(9 - 4{,}5) - \frac{10^3}{2}\left(\frac{4 \cdot 0{,}0388}{\pi \cdot 0{,}075^2}\right)^2 \left(1 + 0{,}021 \frac{5}{0{,}075} + 6\right) = 220{,}3$ kPa ;

$p_5 = p_1 + \rho g(z_1 - z_5) - \frac{\rho}{2} V^2 \left(1 + \lambda \frac{l_{25}}{D} + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5\right) =$

$= 0{,}5 \cdot 10^6 + 9\,810(9 - 0{,}5) - \frac{10^3}{2}\left(\frac{4 \cdot 0{,}0388}{\pi \cdot 0{,}075^2}\right)^2 \left(1 + 0{,}021 \frac{9}{0{,}075} + 6{,}5\right) =$

$= 197{,}1$ kPa ;

$p_6 = p_1 + \rho g(z_1 - z_6) - \frac{\rho}{2} V^2 \left(\lambda \frac{l_{26}}{D} + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5 + \zeta\right) =$

$= 0{,}5 \cdot 10^6 + 9\,810(9 - 0{,}5) - \frac{10^3}{2}\left(\frac{4 \cdot 0{,}0388}{\pi \cdot 0{,}075^2}\right)^2 \left(0{,}021 \frac{13}{0{,}075} + 7{,}5\right) =$

$= 153{,}9$ kPa.

Aval de punctul *6* se găseşte rezervorul R_2, în care viteza s-a presupus nulă, deci în relaţia presiunii nu există termen cinetic. Termenul cinetic la ieşirea din conductă este disipat cu pierdere locală de sarcină ($\zeta_6 = 1$).

Pentru verificare, se scrie presiunea în punctul *6* în rezervorul R_2, considerînd fluidul în repaus

$$p_6 = p_{at} + \rho g(z_7 - z_6) = 0{,}1 \cdot 10^6 + 9\,810(6 - 0{,}5) = 153{,}9 \text{ kPa}$$

Cu aceste valori se poate trasa linia piezometrică pentru circuitul hidraulic considerat.

3) Pentru determinarea elementelor torsorului pe conducta *2—6*, se scrie teorema impulsului şi teorema momentului cinetic pe o suprafaţă de control închisă formată din peretele conductei şi secţiunile drepte din punctul *2*, respectiv din punctul *6*.

$$\rho Q(\vec{V}_6 - \vec{V}_2) = \vec{F}_{p2} + \vec{F}_{p6} + \vec{F}_g + \vec{R}, \tag{9.9.3}$$

$$\rho Q(\vec{r}_6 \times \vec{V}_6 - \vec{r}_2 \times \vec{V}_2) = \vec{r}_{p2} \times \vec{F}_{p2} + \vec{r}_{p6} \times \vec{F}_{p6} + \vec{r}_g \times \vec{F}_g + \vec{M}_{R4}, \tag{9.9.4}$$

în care $\vec{R} = -\vec{F}_a$ este reacţiunea peretelui conductei, egală şi de sens contrar forţei $\vec{F}_a$. $\vec{F}_a$ este rezultanta sistemului format din forţele elementare de presiune pe suprafaţa laterală a suprafeţei de control considerate. $\vec{M}_{a4} = -\vec{M}_{R4}$ este momentul acestui sistem de forţe faţă de punctul *4*, iar razele vectoare sînt considerate faţă de originea sistemului de coordonate *x4y*

Vitezele au mărimea $|\vec{V}_2| = |\vec{V}_6| = 4Q/(\pi D^2) = 4 \cdot 0{,}0388/(\pi \cdot 0{,}072)^2 = 8{,}82$ m/s, astfel încît se poate scrie :

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_6 = 8{,}82\,\vec{i},$$ şi se obţine

$$\vec{F}_a = -\vec{R} = \vec{F}_{p2} + \vec{F}_{p6} + \vec{F}_g = (p_{r2}A_2 - p_{r6}A_6)\vec{i} - \rho g \frac{\pi D^2}{4} l_{26}\vec{j}.$$

Pentru scrierea forţelor de presiune $\vec{F}_{p2} = p_{r2}A_2\vec{i}$ şi $\vec{F}_{p6} = p_{r6}A_6\vec{i}$, s-a folosit presiunea relativă deoarece presiunea atmosferică acţionează asupra întregii suprafeţe de control (direct sau prin intermediul lichidului) şi efectul ei este nul, suprafaţa de control fiind închisă. Cu aceasta se obţine

$$\vec{F}_a = \frac{\pi D^2}{4}(p_{r2} - p_{r6})\vec{i} - \rho g \frac{\pi D^2}{4} l_{26}\vec{j} = \frac{\pi \cdot 0{,}075^2}{4}(386\,300 - 53\,900)\vec{i} -$$

$$- 9\,810 \frac{\pi \cdot 0{,}075^2}{4} \cdot 13\vec{j},$$

$$\vec{F}_a = 1\,463\vec{i} - 563\vec{j},$$

respectiv $|\vec{F}_a| = 1\,567$ N.

Momentul acestui sistem de forţe în raport cu punctul *4* este

$$\vec{M}_{a4} = -\vec{M}_{R4} = \vec{r}_{p2} \times \vec{F}_{p2} + \vec{r}_{p6} \times \vec{F}_{p6} + \vec{r}_g \times \vec{F}_g + \rho Q(\vec{r}_2 \times \vec{V}_2 - \vec{r}_6 \times \vec{V}_6).$$

În secţiunile drepte din punctul *2*, respectiv din punctul *6*, se admite că viteza şi presiunea sînt repartizate uniform. Se observă că $\vec{r}_2 \,//\, \vec{V}_2$, $\vec{r}_{p2} // \vec{F}_{p2}$, $\vec{r}_g \,//\, \vec{F}_g$ şi rezultă

$$\vec{M}_{a4} = \vec{r}_{p6} \times \vec{F}_{p6} - \vec{r}_6 \times \vec{V}_6 \rho Q.$$

Datorită repartiţiei uniforme a vitezei şi presiunii, $\vec{r}_{p6} = \vec{r}_6 = 4\vec{i} - 4\vec{j}$ şi se obţine

$$\vec{M}_{a4} = (4\vec{i} - 4\vec{j}) \times p_{r6}A\vec{i} - \rho Q(4\vec{i} - 4\vec{j}) \times V_6\vec{i};$$

$$\vec{M}_{a4} = 4p_{r6}A\vec{k} - 4\rho Q V_6\vec{k} = 4\left(53\,900 \frac{\pi \cdot 0{,}075^2}{4} - 10^3 \cdot 0{,}0388 \cdot 8{,}82\right)\vec{k};$$

$$\vec{M}_{a4} = -420\vec{k}\ \text{Nm};$$

sau $|\vec{M}_{a4}| = 420$ Nm.

4) Pentru determinarea timpului în care viteza în conductă ajunge 0,99, din viteza de regim se consideră relaţia lui Bernoulli în mişcare semipermanentă scrisă între punctele *1* şi *7*

$$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{\alpha_7 V_7^2}{2} + \frac{p_7}{\rho} + gz_7 + gh_{r1,7} + \int_{1,7} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\,d\vec{r}. \qquad (9.9.5)$$

Se neglijează vitezele la suprafeţele libere $V_1 = V_7 = 0$ şi se notează

$$\frac{p_1 - p_7}{\rho g} + (z_1 - z_7) = H^*,$$

sarcina sistemului hidraulic considerat. Cu aceasta, relaţia (9.9.5) devine

$$gH^* = \frac{V^2}{2}\left(\lambda\frac{l_{26}}{D} + \sum_{i=2}^{6}\zeta_i\right) + \int_{1,7}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{r}. \qquad (9.9.6)$$

Ultimul termen din relaţia (9.9.6) se poate scrie

$$\int_{1,7}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{1,2}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{r} + \int_{2,6}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{r} + \int_{6,7}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{r}.$$

Pentru intervalele *1—2* şi *6—7*, viteza este considerată nulă şi deci şi $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = 0$ şi

$$\int_{1,7}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{2,6}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{2,6}\vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = l_{26}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t},$$

deoarece viteza medie $\vec{V}$ este constantă la un moment dat în toată conducta *2—6*. Astfel, relaţia (9.9.6) devine

$$gH^* = \frac{V^2}{2}\left(\lambda\frac{l_{26}}{D} + \sum_{i=2}^{6}\zeta_i\right) + l_{26}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t},$$

sau

$$2l_{26}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 2gH^* - V^2\left(\lambda\frac{l_{26}}{D} + \sum_{i=2}^{6}\zeta_i\right).$$

Se notează $k^2 = (\lambda l_{26}/D + \sum_{i=2}^{6}\zeta_i)$ şi se consideră că are o valoare constantă în timpul amorsării conductei.

Cu aceasta se scrie

$$\mathrm{d}t = 2l_{26}\frac{\mathrm{d}V}{2gH^* - k^2V^2} = \frac{l_{26}}{\sqrt{2gH^*}}\left(\frac{1}{\sqrt{2gH^*} + kV} + \frac{1}{\sqrt{2gH^*} - kV}\right)\mathrm{d}V,$$

iar, prin integrare, se obţine

$$t = \frac{l_{26}}{k\sqrt{2gH^*}}\left[\ln(\sqrt{2gH^*} + kV) - \ln(\sqrt{2gH^*} - kV)\right],$$

de unde

$$t = \frac{l_{26}}{k\sqrt{2gH^*}}\ln\frac{\sqrt{2gH^*} + kV}{\sqrt{2gH^*} - kV}.$$

În cazul considerat, $V_0 = 8{,}82$ m/s este viteza de regim, respectiv $V = 0{,}99V_0 = 0{,}99\cdot 8{,}82 = 8{,}73$ m/s, $\sqrt{2gH^*} = 29{,}31$ m/s, iar $k = \sqrt{\lambda\frac{l_{26}}{D} + \sum_{i=2}^{6}\zeta_i} = 3{,}34$; se obţine

$$t = \frac{13}{3{,}34\cdot 29{,}31}\ln\frac{29{,}31 + 3{,}34\cdot 8{,}73}{29{,}31 - 3{,}34\cdot 8{,}73} = 0{,}8 \text{ s}.$$

Scanned with OKEN Scanner

5) Pentru determinarea timpului de egalizare a nivelurilor în cele două rezervoare, se face ipoteza simplificatoare că, în relaţia lui Bernoulli scrisă între cele două puncte de pe suprafeţele libere ale celor două rezervoare, termenii cinetici şi termenul care ţine seama de nepermanenţa mişcării sînt neglijabili în raport cu ceilalţi. Cu notaţiile din figura 9.9, rezultă

$$V = \sqrt{\frac{2g\xi}{\lambda\frac{l_{26}}{D} + \sum_{i=2}^{6}\zeta_i}},$$

în care V este viteza medie în conducta de legătură între cele două rezervoare.

Ecuaţia continuităţii se poate scrie

$$A_1\,d\xi_1 = A_2\,d\xi_2,$$

de unde $$d\xi_2 = \frac{A_1}{A_2}\,d\xi_1,$$

iar variaţia de nivel între suprafeţele libere este

$$d\xi = d\xi_1 + d\xi_2 = (1 + A_1/A_2)d\xi_1,$$

respectiv $$d\xi_1 = \frac{A_2}{A_1 + A_2}\,d\xi.$$

Volumul elementar $d\mathcal{V}$, ce trece în intervalul de timp dt din rezervorul R_1 în rezervorul R_2, se poate scrie

$$d\mathcal{V} = Q\,dt = \frac{\pi D^2}{4}\,V dt,$$

respectiv $$d\mathcal{V} = -A_1 d\xi_1 = -\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}\,d\xi.$$

Cu aceasta se obţine $$-\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}\,d\xi = \frac{\pi D^2}{4}\sqrt{\frac{2g}{\lambda\frac{l_{26}}{D} + \sum_{i=2}^{6}\zeta_i}}\,\sqrt{\xi}\,dt$$

sau $$dt = -\frac{4A_1A_2}{A_1 + A_2}\,\frac{\sqrt{\lambda\frac{l_{26}}{D} + \sum_{i=1}^{6}\zeta_i}}{\pi D^2\sqrt{2g}}\cdot\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}.$$

Integrînd pentru ξ variind de la $z_1 - z_7$ la 0, şi ştiind că în acest caz $A_1 = A_2 = A$, se obţine

$$t = \frac{4A}{\pi D^2}\cdot\frac{\sqrt{\lambda\frac{l_{26}}{D} + \sum_{i=2}^{6}\zeta_i}}{\sqrt{2g}}\sqrt{z_1 - z_7} = 42{,}3\ \text{s}.$$

În acest calcul, s-a considerat coeficientul lui Darcy constant. Se utilizează o valoare corespunzătoare diferenţei de nivel medie între cele două rezervoare.

Problema 9.10. Alimentarea cu apă a unei zone locuite necesită un debit a cărui variaţie în cursul unei zile este următoarea:

Ora	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Q, l/s	3,5	2,4	1,3	1,2	1,6	3,0	8,0	9,0	8,0	7,0	6,5	8,0
Ora	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Q, l/s	9,0	8,0	7,5	9,0	10,0	13,0	19,0	25,0	30,0	28,0	15,0	6,0

Pentru satisfacerea cerinţelor de apă, se prevede o staţie de pompare şi un rezervor compensator (fig. 9.10, *a*). Se cere :

1) să se determine debitul instalat în staţia de pompare şi volumul util al rezervorului, dacă pompele funcţionează continuu ;

2) să se determine debitul instalat în staţia de pompare şi volumul util al rezervorului, dacă pompele funcţionează în afara orelor de vîrf ale sistemului energetic. Intervalele de timp ale vîrfului graficului de sarcină sînt 6—9 şi 18—22.

Rezolvare : 1) În cazul funcţionării continue a staţiei de pompare, debitul instalat în staţie reprezintă debitul mediu al unei zile. În prima etapă, se calculează stocul de apă necesar într-o zi

$$\mathcal{V} = \sum_{i=0}^{23} \frac{Q_i + Q_{i+1}}{2} \Delta t,$$

în care $(Q_i + Q_{i+1})/2$ reprezintă debitul mediu în intervalul de timp de o oră, $\Delta t = 3\,600$ s.

Calculul a fost efectuat în tabelul 9.10 ; a rezultat un stoc $\mathcal{V} = 860{,}4$ m³/zi. În cazul în care staţia de pompare funcţionează continuu, debitul instalat este

$$Q_{m1} = \frac{\mathcal{V}}{T} = \frac{860{,}4}{24 \cdot 3\,600} = 9{,}96 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 9{,}96 \text{ l/s}.$$

Cu valoarea debitului staţiei de pompare cunoscută, se determină volumele $\Delta\mathcal{V}_{1i}$ intrate/ieşite din rezervor în intervalul de timp de o oră

$$\Delta\mathcal{V}_{1i} = \left(Q_{m1} - \frac{Q_i + Q_{i+1}}{2}\right) \Delta t,$$

respectiv suma acestor volume (s-au considerat pozitive volumele intrate în rezervor)

$$\mathcal{V}_{1j} = \sum_{i=0}^{j} \left(Q_{m1} - \frac{Q_i + Q_{i+1}}{2}\right) \Delta t,$$

de la ora 0 la ora j. Dacă j variază de la 1 la 23, se obţine variaţia volumului de apă din rezervor.

În figura 9.10, *b*, s-a trasat variaţia în timp a debitului consumat $Q(t)$, debitul mediu Q_{m1} şi variaţia volumului din rezervor $\mathcal{V}_{1j}(t)$.

Scanned with OKEN Scanner

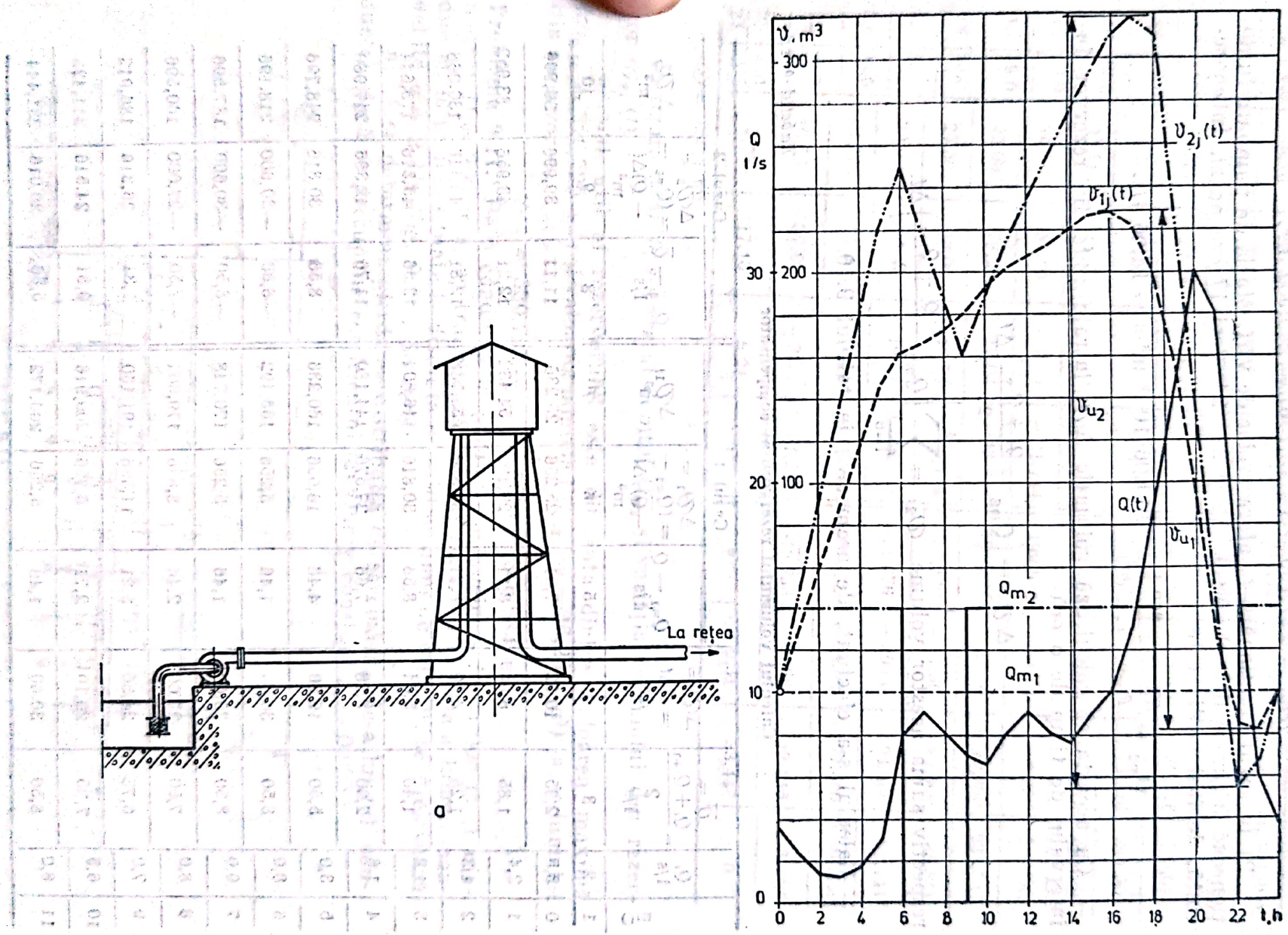


Fig. 9.10.

Scanned with OKEN Scanner

Volumul util minim al rezervorului este diferența dintre valoarea maximă ($\mathcal{V}_{1,15} = 227{,}196$ m³) și valoarea minimă ($\mathcal{V}_{1,23} = -18{,}756$ m³) a volumului în rezervor

$$\mathcal{V}_{u1} = 227{,}196 - (-18{,}756) = 245{,}952 \text{ m}^3.$$

2) În cazul funcționării în afara orelor de vîrf, stația de pompare funcționează în intervalele 0—6 ; 9—18 și 22—24, deci 17 ore pe zi. În consecință, debitul mediu este

$$Q_{m2} = \frac{\mathcal{V}}{T_1} = \frac{860{,}4}{17 \cdot 3\,600} = 14{,}06 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 14{,}06 \text{ l/s}.$$

Cu aceasta se calculează volumele $\Delta\mathcal{V}_{2i}$ intrate/ieșite din rezervor în intervalul de timp de o oră

$$\Delta\mathcal{V}_{2i} = \left(Q_{m2} - \frac{Q_i + Q_{i+1}}{2}\right)\Delta t,$$

respectiv suma acestor volume $\mathcal{V}_{2j} = \sum_{i=0}^{j}\left(Q_{m2} - \frac{Q_i + Q_{i+1}}{2}\right)\Delta t.$

Calculul s-a efectuat, de asemenea, în tabelul 9.10.

Tabelul 9.10

Calculul volumului rezervorului compensator

Ora	Q_i l/s	$\bar{Q} = \frac{Q_i+Q_{i+1}}{2}$ l/s	$\Delta\mathcal{V} = \bar{Q}\Delta t$ m³	Cazul 1			Cazul 2		
				$Q_{m1} - \bar{Q}$ l/s	$\Delta\mathcal{V}_1 = (Q_{m1} - \bar{Q})\cdot\Delta t$ m³	$\Delta\mathcal{V}_{1j}$ m³	$Q_{m2} - \bar{Q}$ l/s	$\Delta\mathcal{V}_2 = (Q_{m2} - \bar{Q})\Delta t$ m³	$\Delta\mathcal{V}_{2j}$ m³
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	3,5	2,95	10,62	7,01	25,236	25,236	11,11	39,996	39,996
1	2,4	1,85	6,66	8,11	29,196	54,432	12,21	43,956	83,952
2	1,3	1,25	4,50	8,71	31,356	85,788	12,81	46,116	130,068
3	1,2	1,40	5,04	8,56	30,816	116,604	12,66	45,576	175,644
4	1,6	2,30	8,28	7,66	27,576	144,180	11,76	42,336	217,980
5	3,0	5,50	19,80	4,46	16,056	160,236	8,56	30,816	248,796
6	8,0	8,50	30,60	1,46	5,256	165,492	—8,50	—30,600	218,196
7	9,0	8,50	30,60	1,46	5,256	170,748	—8,50	—30,600	187,596
8	8,0	7,50	27,00	2,46	8,856	179,604	—7,50	—27,000	160,596
9	7,0	6,75	24,30	3,21	11,556	191,160	7,31	26,316	186,912
10	6,5	7,25	26,10	2,71	9,756	200,916	6,81	24,516	211,428
11	8,0	8,50	30,60	1,46	5,256	206,172	5,56	20,016	231,444

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 9.10 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	9,0	8,50	30,60	1,46	5,256	211,428	5,56	20,016	251,460
13	8,0	7,75	27,90	2,21	7,956	219,384	6,31	22,716	274,176
14	7,5	8,25	29,71	1,71	6,156	225,540	5,81	20,916	295,092
15	9,0	9,50	34,20	0,46	1,656	227,196	4,56	16,416	311,509
16	10,0	11,50	41,40	—1,54	—5,544	221,652	2,56	9,216	320,725
17	13,0	16,00	57,60	—6,04	—21,744	199,908	—1,94	—6,984	313,741
18	19,0	22,00	79,20	—12,04	—43,344	156,564	—22,00	—79,200	234,541
19	25,0	27,50	99,00	—17,54	—63,144	93,420	—27,50	—99,000	135,541
20	30,0	29,00	104,40	—19,04	—68,544	24,876	—29,00	—104,400	31,141
21	28,0	21,50	77,4	—11,54	—41,544	—16,668	—21,50	—77,400	—46,259
22	15,0	10,50	37,80	—0,54	—1,944	—18,756	3,56	12,816	—33,443
23	6,0	4,75	17,10	5,21	18,756	0	9,31	33,446	0
24	3,5								

$\mathcal{V} = 860{,}4$ m³

În figura 9.10, *b*, s-a trasat debitul Q_{m2} și variația volumului din rezervor $\mathcal{V}_{2l}$ (l).

Volumul util al rezervorului este diferența dintre valoarea maximă ($\mathcal{V}_{2.16} = 320{,}725$ m³) și valoarea minimă ($\mathcal{V}_{2.22} = -46{,}259$ m³) a volumului din rezervor

$$\mathcal{V}_{u2} = 320{,}725 - (-46{,}259) = 366{,}984 \text{ m}^3.$$

Problema 9.11. Pe o conductă magistrală cu lungimea $l = 1\,000$ m și diametrul $D = 200$ mm, se tranzitează debitul $Q_T = 40$ l/s. De-a lungul conductei, în puncte situate la distanța $a = 50$ m unul de celălalt, se prelevează debite $q = 2$ l/s (fig. 9.11). Se cere :

a) să se determine pierderea distribuită de sarcină h_d, de-a lungul conductei, dacă se presupune coeficientul lui Darcy constant $\lambda = 0{,}025$;

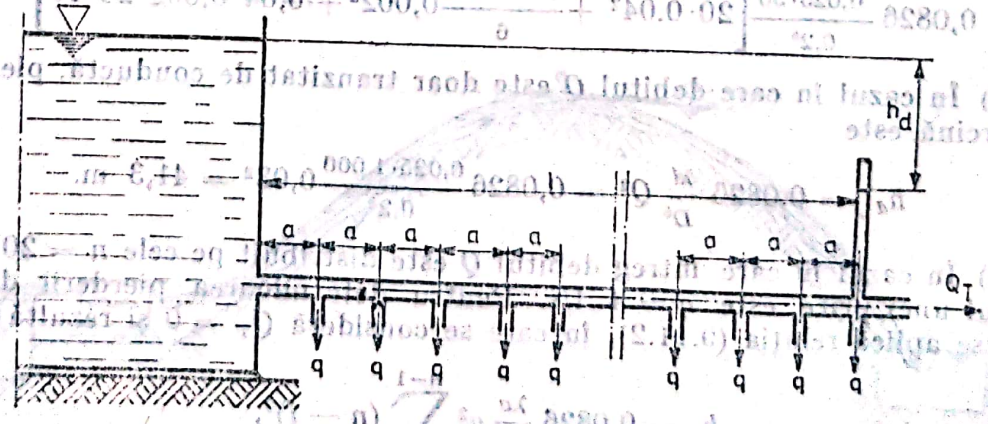


Fig. 9.11.

b) să se determine pierderea de sarcină dacă întreg debitul cu care este alimentată conducta $Q = 80$ l/s este doar tranzitat de conductă;

c) să se determine pierderea de sarcină dacă întreg debitul Q este prelevat prin prizele laterale cu $q = 4$ l/s.

d) să se determine pierderea de sarcină pe conductă, dacă se consideră că debitul $Q—Q_T$ este distribuit uniform de-a lungul conductei cu $q = 0{,}04$ l/(sm).

Rezolvare: a) Pentru determinarea pierderii de sarcină pe conductă, se consideră o secțiune în conductă situată în aval de priza i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n = 20$ fiind numărul total de prize. În această secțiune, debitul este

$$Q_i = Q - iq.$$

Acest debit este constant pe tronsonul dintre prizele i și $i+1$. Pierderea de sarcină pe acest tronson este

$$h_{di} = 0{,}0826 \frac{\lambda a}{D^5} (Q - iq)^2, \qquad (9.11.1)$$

iar pierderea de sarcină pe întreaga conductă este

$$h_d = \sum_{i=1}^{n-1} h_{ri} = 0{,}0826 \frac{\lambda a}{D^5} \sum_{i=1}^{n-1} (Q - iq)^2.$$

Debitul care alimentează conducta se poate scrie

$$Q = Q_T + nq,$$

de unde $$h_d = 0{,}0826 \frac{\lambda a}{D^5} \sum_{i=1}^{n-1} [Q_T + (n-i)q]^2,$$

adică $$h_d = 0{,}0826 \frac{\lambda a}{D^5} \left[nQ_T^2 + q^2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2 + 2Q_T q \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \right].$$

Deci $$h_d = 0{,}0826 \frac{\lambda a}{D^5} \left[nQ_T^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} q^2 + Q_T q n(n-1) \right]. \qquad (9.11.2)$$

În cazul conductei considerate, pierderea de sarcină este

$$h_{d_a} = 0{,}0826 \frac{0{,}025 \cdot 50}{0{,}2^5} \left[20 \cdot 0{,}04^2 + \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} 0{,}002^2 + 0{,}04 \cdot 0{,}002 \cdot 20 \cdot 19 \right] = 24 \text{ m}.$$

b) În cazul în care debitul Q este doar tranzitat de conductă, pierderea de sarcină este

$$h_{d_b} = 0{,}0826 \frac{\lambda l}{D^5} Q^2 = 0{,}0826 \frac{0{,}025 \cdot 1\,000}{0{,}2^5} 0{,}08^2 = 41{,}3 \text{ m}.$$

c) În cazul în care întreg debitul Q este distribuit pe cele $n = 20$ prize, debitul unei prize este $q = 4$ l/s. Pentru determinarea pierderii de sarcină, se aplică relația (9.11.2), în care se consideră $Q_T = 0$ și rezultă

$$h_d = 0{,}0826 \frac{\lambda a}{D^5} q^2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci $$h_d = 0{,}0826 \frac{\lambda a q^2}{D^5} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

iar în cazul considerat se obține

$$h_{d_c} = 0{,}0826 \frac{0{,}025 \cdot 50 \cdot 0{,}004^2}{0{,}2^5} \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} = 14{,}8 \text{ m}.$$

d) În cazul în care se consideră conducta cu debit uniform distribuit, debitul $Q_D = Q - Q_T$ se distribuie uniform de-a lungul întregii lungimi, astfel încît $q = Q_D/l = 0{,}04$ l/(sm).

Pentru determinarea pierderii de sarcină, se consideră o secțiune situată la distanța s, de capătul amonte al conductei și un element de conductă de lungime ds. Debitul în această secțiune este

$$Q_s = Q - qs = Q_T + Q_D - qs,$$

iar pierderea de sarcină pe elementul ds este

$$dh_d = 0{,}0826 \frac{\lambda ds}{D^5} Q_s^2 = 0{,}0826 \frac{\lambda ds}{D^5} (Q_T + Q_D - qs)^2.$$

Pierderea de sarcină pe întreaga conductă este

$$h_d = \int_l dh_d = 0{,}0826 \frac{\lambda l}{D^5} (Q_T^2 + Q_D^2/3 + Q_T Q_D \cong 0{,}0826) \frac{\lambda l}{D^5} (Q_T + 0{,}55 Q_D)^2.$$

În cazul considerat cu $Q_T = Q_D = 40$ l/s, se obține

$$h_{d_d} = 0{,}0826 \frac{0{,}025 \cdot 1\,000}{0{,}2^5} 3{,}844 \cdot 10^{-3} = 24{,}8 \text{ m},$$

rezultat apropiat de cel obținut în cazul *a*.

Problema 9.12. O pompă cu piston pompează un debit de petrol $Q_0 = 0{,}2$ m³/s, din rezervorul A în rezervorul B, printr-o conductă sudată din oțel (cu $k = 0{,}2$ mm), avînd diametrul $D = 400$ mm și lungimea $l = 8$ km (fig. 9.12). Se cere:

1) să se determine presiunea la ieșirea din pompă și puterea consumată de pompă, dacă cotele celor două rezervoare și cota pompei sînt aceleași, iar randamentul pompei este $\eta = 0{,}7$;

2) să se determine suprapresiunea în punctul C situat la cota +20 m față de suprafețele libere ale celor două rezervoare dacă lungimea pînă în punctul C este $l_1 = 4$ km;

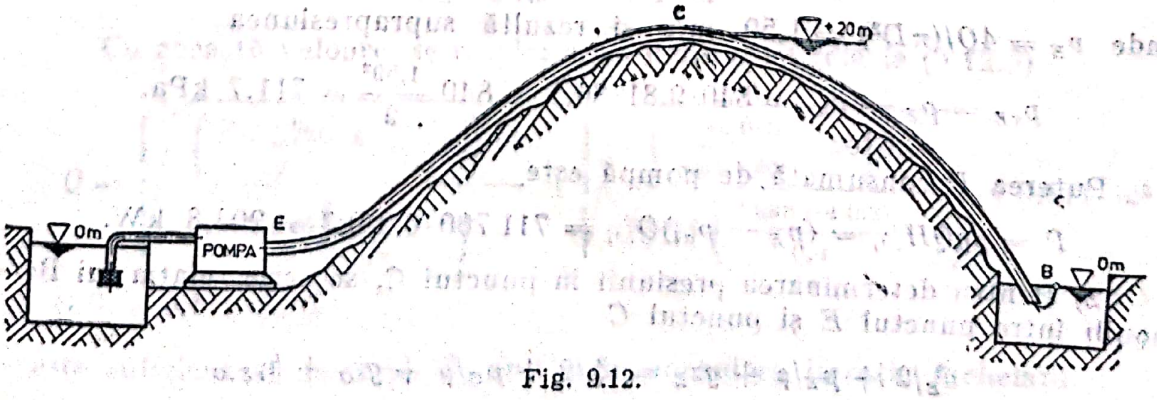


Fig. 9.12.

Scanned with OKEN Scanner

3) să se determine debitul pompei pentru ca vacuumul în punctul C să nu depășească 40 kPa ;

4) să se determine presiunea la pompă în această situație.

Se știe că petrolul pompat are viscozitatea cinematică $\nu = 0{,}8$ St și densitatea $\rho = 840$ kg/m^3.

Rezolvare : 1) Pentru determinarea presiunii la pompă, este necesar să se determine pierderile liniare de sarcină în conductă. Pentru aceasta, trebuie determinat regimul de mișcare din conductă, caracterizat de numărul Reynolds al mișcării

$$\mathbf{Re} = \frac{vD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D\nu} = \frac{4 \cdot 0{,}2}{\pi \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-4}} = 7\,958.$$

Deoarece $\mathbf{Re} > \mathbf{Re}_{cr}$, mișcarea este turbulentă. Caracterul turbulenței este dat de cele două numere Reynolds limită $\mathbf{Re}_{lim\,1} = 10D/k$, $\mathbf{Re}_{lim\,2} = 560D/k$, între care este zona de tranziție de la conducte hidraulic netede la cele hidraulic rugoase (regimul prepătratic). În cazul considerat, se obține :

$$\mathrm{Re}_{lim\,1} = 10D/k = 10 \cdot 400/0{,}2 = 20\,000 ; \tag{9.12.1}$$

$$\mathrm{Re}_{lim\,2} = 560D/k = 560 \cdot 400/0{,}2 = 1\,120\,000. \tag{9.12.2}$$

Se observă că $\mathbf{Re} < \mathbf{Re}_{lim\,1}$, deci conducta considerată este hidraulic netedă pentru care coeficientul lui Darcy se poate exprima cu relația lui Blasius

$$\lambda = 0{,}3164/\sqrt[4]{\mathbf{Re}} = 0{,}3164/\sqrt[4]{7\,958} = 0{,}0335.$$

Cu aceasta, pierderile de sarcină pe conductă, considerînd conducta lungă, sînt

$$h_r = \lambda \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g} = 0{,}0826 \frac{\lambda l}{D^5} Q^2 = 0{,}0826 \frac{0{,}0335 \cdot 8\,000}{0{,}4^5} \cdot 0{,}2^2 = 86{,}5 \text{ m.}$$

Aplicînd relația lui Bernoulli între un punct E la ieșirea din pompă și punctul B de pe suprafața liberă a rezervorului B, se obține

$$v_E^2/2 + p_E/\rho + gz_E = v_B^2/2 + p_B/\rho + gz_B + gh_{rE,B} \tag{9.12.3}$$

și știind că $v_B \cong 0$, $p_B = p_{at}$, rezultă

$$p_E = p_{at} - \rho v_E^2/2 + \rho g(z_B - z_E) + \rho g h_{rE,B},$$

respectiv presiunea relativă în punctul E este

$$p_{rE} = p_E - p_{at} = \rho g h_{rE,B} - \rho v_E^2/2,$$

unde $v_E = 4Q/(\pi D^2) = 1{,}59$ m/s și rezultă suprapresiunea

$$p_{rE} = p_E - p_{at} = 840 \cdot 9{,}81 \cdot 86{,}5 - 840 \frac{1{,}59^2}{2} = 711{,}7 \text{ kPa.}$$

Puterea P consumată de pompă este

$$P = \rho g Q H/\eta = (p_E - p_{at})Q/\eta = 711\,700 \cdot 0{,}2/0{,}7 = 203{,}8 \text{ kW.}$$

2) Pentru determinarea presiunii în punctul C, se scrie relația lui Bernoulli între punctul E și punctul C

$$v_E^2/2 + p_E/\rho + gz_E = v_C^2/2 + p_C/\rho + gz_C + h_{rE.C}$$

și, știind că $v_E = v_C = V$, rezultă

$$p_C - p_{at} = p_E - p_{at} + \rho g(z_E - z_C) - \frac{\rho \lambda l_1}{D} \cdot \frac{V^2}{2}, \qquad (9.12.4)$$

$$p_C - p_{at} = 711\,700 - 840 \cdot 9{,}81 \cdot 20 - \frac{840 \cdot 0{,}0335 \cdot 4\,000}{2 \cdot 0{,}4} 1{,}59^2,$$

$$p_C - p_{at} = 191{,}2 \text{ kPa}.$$

3) Pentru ca vacuumul în C să fie 40 kPa, rezultă

$$p_C - p_{at} = -40 \cdot 10^3 \text{ Pa}.$$

și, scriind relația lui Bernoulli între punctele C și B, se obține

$$v_C^2/2 + p_C/\rho + g z_C = v_B^2/2 + p_B/\rho + g z_B + g h_{rCB},$$

cu $p_B = p_{at}$ și $v_B \cong 0$; rezultă

$$p_C - p_{at} = \rho g h_{rCB} - \rho g(z_C - z_B) - \rho \frac{v_C^2}{2};$$

$$\frac{p_C - p_{at}}{\rho g} = 0{,}0826 \frac{Q^2}{D^4}\left(\frac{\lambda l_2}{D} - 1\right) - (z_C - z_B),$$

de unde

$$Q = \sqrt{\frac{\left(\frac{p_C - p_{at}}{\rho g} + z_C - z_B\right) D^4}{0{,}0826\left(\frac{\lambda l_2}{D} - 1\right)}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{-40\,000}{9{,}81 \cdot 840} + 20\right) \cdot 0{,}4^4}{0{,}0826\left(\frac{0{,}0335 \cdot 4\,000}{0{,}4} - 1\right)}}, \qquad (9.12.5)$$

$$Q^{(1)} = 0{,}118 \text{ m}^3/\text{s}.$$

S-a considerat același coeficient al lui Darcy ca în primul caz. Cu debitul determinat, se calculează numărul Reynolds și coeficientul lui Darcy

$$\text{Re}^{(1)} = \frac{VD}{\nu} = \frac{4Q^{(1)}}{\pi D \nu} = \frac{4 \cdot 0{,}118}{\pi \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 \cdot 10^{-4}} = 4\,702,$$

deci se păstrează în zona conductelor netede și deci

$$\lambda^{(1)} = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}} = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{4\,702}} = 0{,}0382.$$

Cu această valoare, se recalculează debitul cu relația (9.12.5)

$$Q = \sqrt{\frac{\left(\frac{p_C - p_{at}}{\rho g} + z_C - z_B\right) D^4}{0{,}0826\left(\lambda \frac{l}{D} - 1\right)}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{-40\,000}{9{,}81 \cdot 840} + 20\right) 0{,}4^4}{0{,}0826\left(\frac{0{,}0382 \cdot 4\,000}{0{,}4} - 1\right)}} = 0{,}111 \text{ m}^3/\text{s};$$

$$Q^{(2)} = 0{,}111 \text{ m}^3/\text{s}$$

este suficient de aproape de $Q^{(1)}$ și se consideră iterația încheiată.

4) Pentru determinarea presiunii la pompă, se folosește din nou relația (9.12.3) și rezultă

$$p_E - p_{at} = \rho g h_{rE,B} - \rho v_E^2/2,$$

cu $h_{rE,B} = 0{,}0826 \frac{Q^2}{D^5} \lambda l = 0{,}0826 \frac{0{,}111^2}{0{,}4^5} 0{,}0382 \cdot 8\,000$; $h_{rE,B} = 30{,}4$ m.

Deci $p_E - p_{at} = 9{,}81 \cdot 840 \cdot 30{,}4 - \frac{840}{2}\left(\frac{4 \cdot 0{,}111}{\pi \cdot 0{,}4^2}\right)^2 = 250{,}2$ kPa.

Problema 9.13. O pompă centrifugă poate umple un rezervor cu diametrul constant $D = 4{,}5$ m, fie prin conducta A, fie prin conducta B (fig. 9.13) ; nivelul inițial în rezervor se găsește la cota $H_1 = 8$ m deasupra suprafeței libere din bazinul de aspirație, iar nivelul final la cota $H_2 = 13$ m. Sarcina geometrică a circuitului B este $H = 15$ m.

Admițînd că pierderile de sarcină pe cele două circuite sînt echivalente și egale cu $h_r = 3$ m și randamentul pompei este $\eta = 0{,}7$, să se calculeze lucrul mecanic total efectuat de motorul de antrenare pentru umplerea rezervorului prin circuitul A și prin circuitul B.

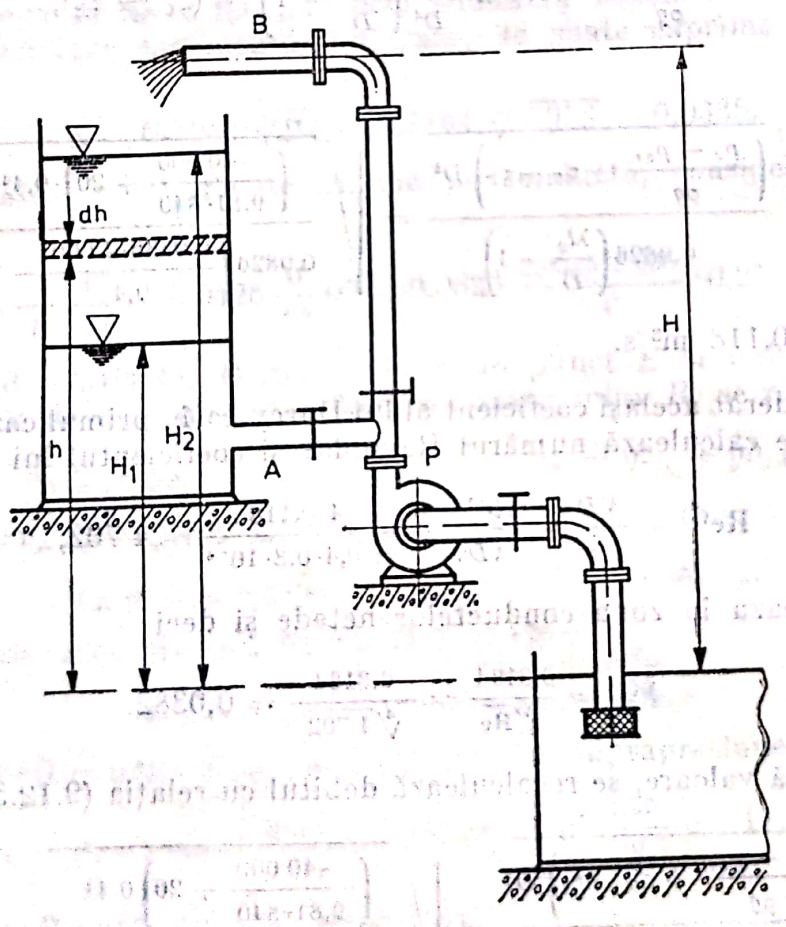


Fig. 9.13.

Rezolvare : Pentru circuitul B, sarcina pompei este constantă $H + h_r$ în tot timpul pompării. Deci puterea consumată de pompă este :

$$P_B = \rho g Q (H + h_r)/\eta,$$

respectiv lucrul mecanic efectuat se obține din relația

$$\mathcal{L}_B = \rho g(H + h_r)\mathcal{V}/\eta = \rho g(H + h_r)/\eta(\pi D^2/4)(H_2 - H_1)/\eta,$$

$$\mathcal{L}_B = \frac{9{,}81\cdot 10^3(15+3)\cdot\pi\cdot 4{,}5^2\cdot(13-8)}{0{,}7\cdot 4} = 20{,}06 \text{ MJ} = 5{,}57 \text{ kWh}.$$

Pentru circuitul A sarcina pompei variază în funcție de nivelul apei în rezervor. Se consideră un nivel intermediar, situat la înălțimea h deasupra suprafeței libere din bazinul de aspirație. Puterea consumată de pompă la acest nivel este

$$P_A = \rho g Q(h + h_r)/\eta,$$

respectiv lucrul mecanic efectuat pentru a crește nivelul în rezervor cu dh este

$$d\mathcal{L}_A = \frac{\rho g(h+h_r)}{\eta} d\mathcal{V} = \frac{\rho g(h+h_r)}{\eta}\frac{\pi D^2}{4} dh,$$

de unde lucrul mecanic total efectuat este

$$\mathcal{L}_A = \int_{H_1}^{H_2} d\mathcal{L}_A = \frac{\rho g}{\eta}\frac{\pi D^2}{4}\int_{H_1}^{H_2}(h+h_r)dh = \frac{\rho g}{\eta}\frac{\pi D^2}{4}\left[\frac{H_2^2 - H_1^2}{2} + h_r(H_2 - H_1)\right],$$

$$\mathcal{L}_A = \frac{9{,}81\cdot 10^3}{0{,}7}\cdot\frac{\pi\cdot 4{,}5^2}{4}\left[\frac{13^2 - 8^2}{2} + 3\cdot(13-8)\right] = 15{,}04 \text{ MJ} = 4{,}18 \text{ kWh}.$$

În cazul circuitului A se obține lucrul mecanic efectuat și ca variația energiei potențiale a lichidului plus energia disipată de forțele de viscozitate

$$\mathcal{L}_A = \frac{\rho g}{\eta}\mathcal{V}\left(\frac{H_1 + H_2}{2} + h_r\right),$$

în care $\rho g\mathcal{V}(H_1+H_2)/2$ este variația energiei potențiale, iar $\rho g\mathcal{V}h_r$ este energia disipată de forțele de viscozitate.

Deci $\mathcal{L}_A = \frac{\rho g}{\eta}\frac{\pi D^2}{4}(H_2 - H_1)\left(\frac{H_1+H_2}{2} + h_r\right) = 15{,}04$ MJ.

Se observă că se consumă o energie mai mare în cazul circuitului B. Pentru a se evita acest consum suplimentar, conducta de deasupra rezervorului se sifonează în jos în rezervor, reducînd sarcina statică a pompei. În acest caz, ca și în cazul A, este necesară să se monteze o supapă antiretur, pentru a evita accidentele la oprirea alimentării cu energie a motorului pompei.

Problema 9.14. Două rezervoare cu apă (fig. 9.14) debitează pe un sistem de conducte din oțel cu diametrul $D = 100$ mm și rugozitatea echivalentă $k = 0{,}2$ mm, lungimile fiind $l_1 = l_3 = 50$ m și $l_2 = 200$ m.

1) Să se determine sarcina H, astfel încît în punctul D, unde sistemul debușează în atmosferă, debitul să fie $Q_D = 12$ l/s.

2) Să se determine înălțimea maximă h a punctului C, dacă presiunea minimă în C poate fi $p_C = 0{,}24$ m H_2O, presiunea atmosferică este $p_{at} = 10{,}24$ m H_2O.

Se consideră viscozitatea cinematică a apei $\nu = 1\cdot 10^{-6}$ m²/s.

Scanned with OKEN Scanner

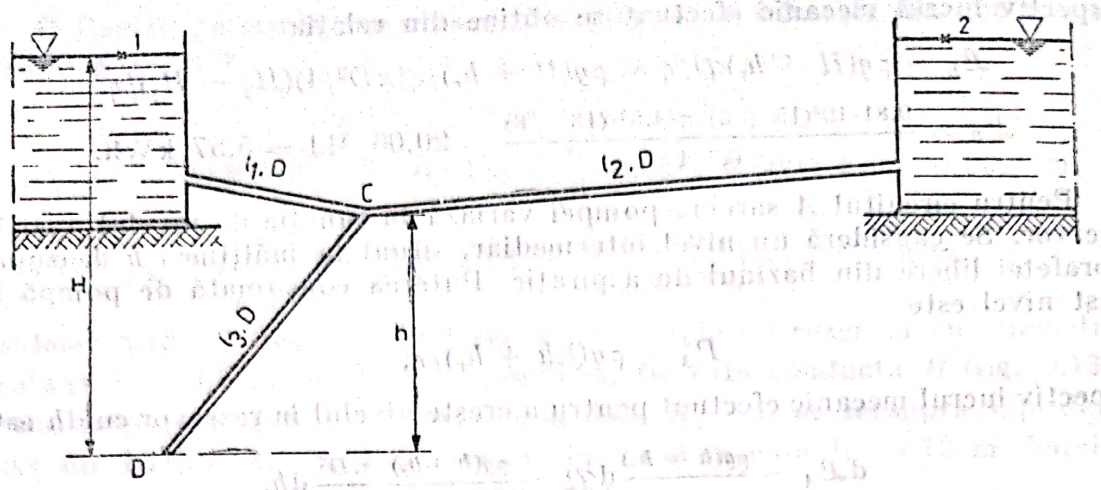


Fig. 9.14.

Rezolvare : 1) Pentru determinarea sarcinii H necesare, se scrie relaţia lui Bernoulli între punctele *1* şi *2* de pe suprafeţele libere ale celor două rezervoare şi punctul D

$$\alpha_1 V_1^2/2 + p_1/\rho + gz_1 = \alpha_D V_D^2/2 + p_D/\rho + gz_D + gh_{r1,D} \tag{9.14.1}$$

$$\alpha_2 V_2^2/2 + p_2/\rho + gz_2 = \alpha_D V_D^2/2 + p_D/\rho + gz_D + gh_{r2,D} \tag{9.14.2}$$

şi ecuaţia continuităţii, $Q = Q_1 + Q_2,$ (9.14.3)

în care Q_1 este debitul livrat de rezervorul R_1, iar Q_2 debitul livrat de rezervorul R_2. Deoarece, cele două rezervoare au suprafaţa liberă situată la acelaşi nivel, iar presiunea în punctul C este aceeaşi pentru ambele conducte, rezultă că pierderile de sarcină pe cele două conducte sînt aceleaşi

$$h_{r1,C} = h_{r2,C}. \tag{9.14.4}$$

Dacă se consideră $V_1 = V_2 = 0$; $\alpha_D = 1$; $p_1 = p_2 = p_D = p_{at}$, $z_1 = z_2$, iar $z_1 - z_D = z_2 - z_D = H$, se obţine

$$H = h_{r1,D} + \frac{V_D^2}{2g} = h_{r2,D} + \frac{V_D^2}{2g}, \tag{9.14.5}$$

deci $$H = h_{r1,C} + h_{rC,D} + \frac{V_D^2}{2g} = 0{,}0826\frac{\lambda_1 l_1}{D^5}Q_1^2 + 0{,}0826\left(\frac{\lambda_3 l_3}{D^5} + \frac{1}{D^4}\right)Q^2. \tag{9.14.6}$$

Pentru determinarea sarcinii, este necesar să se cunoască coeficienţii lui Darcy şi repartiţia debitului Q pe cele două conducte, Q_1 şi Q_2. Pe porţiunea CD se cunoaşte debitul, deci se poate determina regimul de mişcare

$$\mathbf{Re}_3 = \frac{VD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D\nu} = \frac{4 \cdot 0{,}012}{\pi \cdot 0{,}1 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 152\,800,$$

deci mişcarea este turulentă. Pentru determinarea caracterului turbulenţei, se calculează valorile numerelor Reynolds limită care mărginesc zona pepătratică : $\mathbf{Re}_{lim1} = 10D/k = 10 \cdot 100/0{,}2 = 5\,000$; respectiv $\mathbf{Re}_{lim2} = 560D/k = 560 \cdot 100/0{,}2 = 208\,000$. Deoarece $\mathbf{Re}_{lim1} < \mathbf{Re} < \mathbf{Re}_{lim2}$, rezultă că mişcarea este în zona prepătratică, pentru care se poate scrie formula lui Altşul

$$\lambda_3 = 0{,}11(68/\mathbf{Re} + k/D)^{0{,}25} = 0{,}11(68/152\,800 + 0{,}2/100)^{0{,}25} = 0{,}0245.$$

Deoarece nu se cunosc debitele Q_1 și Q_2 și deci regimul de mișcare din conducte, se estimează că $\lambda_1^{(0)} = \lambda_2^{(0)} = 0{,}0245$, ca pentru porțiunea CD, și relația (9.14.4) se scrie

$$0{,}0826\frac{\lambda_1 l_1}{D^5}Q_1^2 = 0{,}0826\frac{\lambda_2 l_2}{D^5}Q_2^2$$

de unde $$Q_1 = Q_2\sqrt{\frac{\lambda_2 l_2}{\lambda_1 l_1}} = Q_2\sqrt{\frac{l_2}{l_1}} = 2Q_2.$$

Din relația (9.14.3), rezultă $2Q_2 + Q_2 = Q$, adică $Q_2 = Q/3 = 4$ l/s, iar $Q_1 = 8$ l/s.

Cu aceste valori, se calculează numerele Reynolds ale mișcării

$$\mathbf{Re}_1 = \frac{V_1 D}{\nu} = \frac{4Q_1}{\pi D\nu} = \frac{4\cdot 0{,}004}{\pi\cdot 0{,}1\cdot 110^{-6}} = 51\,000,$$

$$\mathbf{Re}_2 = \frac{V_2 D}{\nu} = \frac{4Q_2}{\pi D\nu} = \frac{4\cdot 0{,}008}{\pi\cdot 0{,}1\cdot 110^{-6}} = 102\,000.$$

Deci, în ambele cazuri, mișcarea este în zona prepătratică, iar coeficienții lui Darcy au valorile

$$\lambda_1^{(1)} = 0{,}11(68/\mathbf{Re}_1 + k/D)^{0{,}25} = 0{,}11(68/51\,000 + 0{,}2/100)^{0{,}25} = 0{,}026,$$

$$\lambda_2^{(1)} = 0{,}11(68/\mathbf{Re}_2 + k/D)^{0{,}25} = 0{,}11(68/102\,000 + 0{,}2/100)^{0{,}25} = 0{,}025.$$

Cu aceasta, se obține $$Q_1 = Q_2\sqrt{\frac{\lambda_2 l_2}{\lambda_1 l_1}} = Q_2\sqrt{\frac{0{,}025\cdot 200}{0{,}026\cdot 50}} = 1{,}96Q_2,$$

de unde $Q_1 = 7{,}95$ l/s și $Q_2 = 4{,}05$ l/s. Deoarece aceste valori diferă puțin de valorile precedente, se consideră iterația încheiată.

Cu aceasta, se poate scrie $$H = 0{,}0826\left[\frac{\lambda_1 l_1}{D^5}Q_1^2 + \left(\frac{\lambda_3 l_3}{D^5} + \frac{1}{D^4}\right)Q^2\right],$$

$$H = 0{,}0826\left[\frac{0{,}026\cdot 50}{0{,}1^5}0{,}00795^2 + \left(\frac{0{,}025\cdot 50}{0{,}1^5} + \frac{1}{0{,}1^4}\right)0{,}012^2\right] = 2{,}15 \text{ m}.$$

2) Pentru determinarea înălțimii maxime h a punctului C, se scrie relația lui Bernoulli între punctele C și D.

$$\alpha_C V_C^2/2 + p_C/\rho + gz_C = \alpha_D V_D^2/2 + p_D/\rho + gz_D + gh_{rC,D}.$$

Știind că $\alpha_C = \alpha_D$; $V_C = V_D$, $p_D = p_{at}$, $p_C = p_{min}$, iar $z_C - z_D = h$, se obține

$$h = \frac{p_{at} - p_C}{\rho g} + h_{rC,D} = \frac{p_{at} - p_C}{\rho g} + 0{,}0826\frac{\lambda_3 l_3}{D^5}Q^2,$$

$$h = 10{,}24 - 0{,}24 + 0{,}0826\frac{0{,}0245\cdot 50}{0{,}1^5}0{,}012^2 = 11{,}46 \text{ m}.$$

Problema 9.15. Între cele două rezervoare din figura 9.15, se găsește o conductă de lungime $2l$ și cu diametrul D. La o denivelare H între suprafețele libere ale celor două rezervoare, conducta transportă debitul Q_1. Pentru mărirea capacității de transport a conductei, se montează în paralel cu ultima porțiune a ei o conductă de lungime l și același diametru D, debitul transportat fiind Q_2.

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine lungimea echivalentă a conductei şi raportul debitelor Q_2/Q_1 dacă:

a) regimul de mişcare din conductă este laminar $\lambda = 64/\mathbf{Re}$;

b) regimul de mişcare din conductă este turbulent neted $\lambda = 0{,}3164/\mathbf{Re}^{0.25}$;

c) regimul de mişcare este turbulent rugos $\lambda = 0{,}11(k/D)^{0,25}$ — relaţia lui Şifrinson.

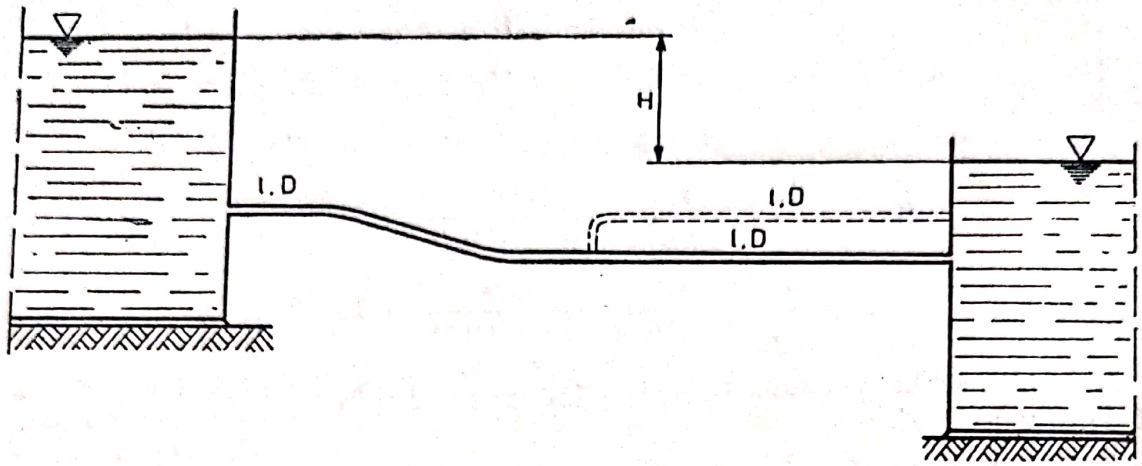


Fig. 9.15.

Rezolvare: a) Din relaţia lui Bernoulli scrisă între două puncte pe suprafeţele libere ale celor două rezervoare, rezultă

$$H = h_d, \tag{9.15.1}$$

în care h_d este pierderea distribuită de sarcină. În cazul în care se consideră conducta monofilară, se scrie

$$H = \lambda \frac{2l}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} = 0{,}0826 \frac{2l\lambda}{D^5} Q_1^2, \tag{9.15.2}$$

iar în cazul conductei suplimentare în paralel, se scrie

$$H = \lambda_1 \frac{l}{D} \frac{V_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l}{D} \frac{V_2^2}{2g} = 0{,}0826 \frac{l}{D^5} \left(\lambda_1 Q_2^2 + \lambda_2 \frac{Q_2^2}{4} \right). \tag{9.15.3}$$

Dacă mişcarea este laminară, $\lambda = 64/\mathbf{Re} = 64\pi D\nu/(4Q)$, relaţiile (9.15.2) şi (9.15.3) devin

$$H = 0{,}0826 \frac{2l}{D^5} \frac{64\pi D\nu}{4Q_1} Q_1^2 = 8{,}30 \frac{\nu l}{D^4} Q_1, \tag{9.15.4}$$

$$H = 0{,}0826 \frac{l}{D^5} \left[\frac{64\pi D\nu}{4Q_2} Q_2^2 + \frac{64\pi D\nu}{4(Q_2/2)} \frac{Q_2^2}{4} \right] = 6{,}23 \frac{\nu l}{D^4} Q_2 \tag{9.15.5}$$

De unde rezultă $Q_2/Q_1 = 8{,}3/6{,}23 = 1{,}33$.

Pentru determinarea lungimii echivalente L, (lungimea unei conducte de acelaşi diametru şi care produce aceeaşi pierdere de sarcină ca a sistemului de conducte considerat), se scrie

$$H = 0{,}0826 \frac{\lambda L}{D^5} Q_2^2 = 0{,}0826 \frac{64\pi D\nu}{4Q_2} \cdot \frac{L}{D^5} Q_2^2 = 4{,}15 \frac{L\nu}{D^4} Q_2, \tag{9.15.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care L este lungimea echivalentă. Împărțind (9.15.5) și (9.15.6) rezultă

$$L = 1{,}5l.$$

b) În cazul conductelor netede, coeficientul lui Darcy se exprimă cu relația lui Blasius $\lambda = 0{,}3164/\mathrm{Re}^{0{,}25} = 0{,}3164(\pi D\nu/4Q)^{0{,}25}$ și relațiile (9.15.2) și (9.15.3) devin

$$H = 0{,}0826\,\frac{2l}{D^5}\lambda Q_1^2 = 0{,}0826\,\frac{2l}{D^5}\,0{,}3164\left(\frac{\pi D\nu}{4Q_1}\right)^{0{,}25}\cdot Q_1^2 = 0{,}049\,\frac{l}{D^{4{,}75}}\,\nu^{0{,}25}\cdot Q_1^{1{,}75}, \tag{9.15.7}$$

respectiv

$$H = 0{,}0826\,\frac{l}{D^5}\left[0{,}3164\left(\frac{\pi D\nu}{4Q_2}\right)^{0{,}25}\cdot Q_2^2 + 0{,}3164\left(\frac{\pi D\nu}{4\,\frac{Q_2}{2}}\right)^{0{,}25}\left(\frac{Q_2}{2}\right)^2\right] =$$

$$= 0{,}032\,\frac{l}{D^{4{,}75}}\,\nu^{0{,}25}Q_2^{1{,}75}. \tag{9.15.8}$$

De unde rezultă prin împărțire $(Q_2/Q_1)^{1{,}75} = 0{,}049/0{,}032 = 1{,}53$, $Q_2/Q_1 = 1{,}27$.

Se scrie și aici pierderea pentru conducta echivalentă

$$H = 0{,}0826\,\frac{\lambda L}{D^5}Q_2^2 = 0{,}0826\cdot 0{,}3164\left(\frac{\pi D\nu}{4Q_2}\right)^{0{,}25}\frac{L}{D^5}Q_2^2 = 0{,}024\,\frac{L}{D^{4{,}75}}\,\nu^{0{,}25}\,Q^{1{,}75},$$

de unde se obține $L = 1{,}33\ l.$

c) În cazul conductelor rugoase, pentru coeficientul lui Darcy, se aplică formula lui Șifrinson $\lambda = 0{,}11(k/D)^{0{,}25}$ în relațiile (9.15.2) și (9.15.3), care devin

$$H = 0{,}0826\,\frac{l}{D^5}\,0{,}11\left(\frac{k}{D}\right)^{0{,}25}Q_1^2 = 9\cdot 10^{-3}\,\frac{k^{0{,}25}}{D^{5{,}25}}\,Q_1^2, \tag{9.15.9}$$

$$H = 0{,}0826\,\frac{l}{D^5}\left[0{,}11\left(\frac{k}{D}\right)^{0{,}25}\cdot Q_2^2 + 0{,}11\left(\frac{k}{D}\right)^{0{,}25}\left(\frac{Q_2}{2}\right)^2\right] =$$

$$= 11{,}4\cdot 10^{-3}\,\frac{k^{0{,}25}}{D^{5{,}25}}\,Q_2^2. \tag{9.15.10}$$

De unde rezultă $\dfrac{Q_2^2}{Q_1^2} = \dfrac{11{,}4\cdot 10^{-3}}{9\cdot 10^{-3}} = 1{,}266$ și $\dfrac{Q_2}{Q_1} = 1{,}13.$

Pentru determinarea lungimii echivalente, se scrie

$$H = 0{,}0826\,\frac{L}{D^5}\cdot 0{,}11\left(\frac{k}{D}\right)^{0{,}25}\cdot Q_2^2 = 9\cdot 10^{-3}\,\frac{L}{D^{5{,}25}}\,k^{0{,}25}Q_2^2$$

și, împărțind cu relația (9.15.10), rezultă

$$L = 1{,}27l.$$

Problema 9.16. Pentru transportul uleiului din rezervorul A în rezervorul B, s-a montat o conductă formată din trei tronsoane de lungime $l = 50$ m și diametrul $D = 25$ mm figura 9.16, *b*.

Scanned with OKEN Scanner

1) Să se determine sarcina H pentru ca debitul de ulei în rezervorul B să fie $Q = 0{,}2$ l/s, temperatura uleiului fiind $\theta_1 = 10°C$.

2) Să se determine debitul de ulei, pentru aceeaşi sarcină H, dacă temperatura uleiului este $\theta_2 = 20°C$.

Se consideră că pierderile locale sînt de 20% din valoarea celor distribuite. Viscozitatea cinematică a uleiului în funcţie de temperatură este prezentată în figura 9.16, *a*.

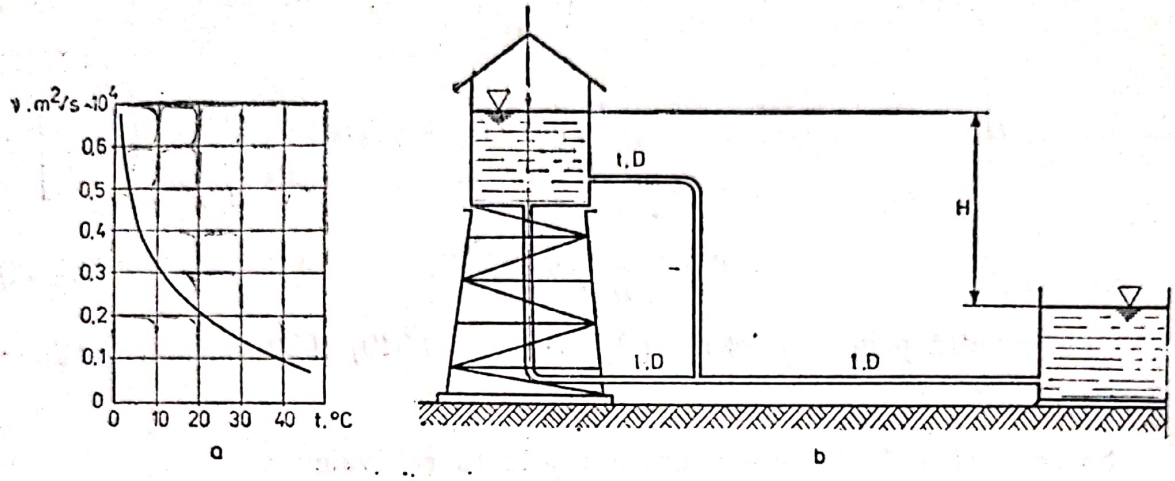


Fig. 9.16.

Rezolvare : 1) Pentru determinarea sarcinii H, se scrie relaţia lui Bernoulli între punctul *1* de pe suprafaţa liberă a rezervorului A şi punctul *3* de pe suprafaţa liberă a rezervorului B

$$\alpha_1 V_1^2/2 + p_1/\rho + gz_1 = \alpha_3 V_3^2/2 + p_3/\rho + gz_3 + h_{r1,3} \qquad (9.16.1)$$

şi se consideră $V_1 = V_3 = 0$; $p_1 = p_3 = p_{at}$ respectiv $z_1 - z_3 = H$, de unde rezultă $H = h_{r1,3} = h_{r1,2} + h_{r2,3}$.

Deoarece conductele de la rezervor la punctul *2* sînt identice, debitele transportate de ele sînt egale şi egale cu jumătate din debitul conductei *2—3* şi pierderile de sarcină pe cele două ramuri sînt de asemenea egale şi, ţinînd seama că pierderile locale sînt 20% din cele distribuite, se obţine

$$H = 1{,}2(h_{d1,2} + h_{d2,3}) = 1{,}2\left(0{,}0826\,\frac{Q^2}{D^5}\lambda_{2,3}l + 0{,}0826\,\frac{(Q/2)^2}{D^5}\lambda_{1,2}l\right),$$

$$H = 1{,}2 \cdot 0{,}0826\,\frac{Q^2}{D^5}\,l\left(\lambda_{2,3} + \frac{\lambda_{1,2}}{4}\right), \qquad (9.16.2)$$

de unde $$Q = \sqrt{\frac{HD^5}{1{,}2 \cdot 0{,}0826(\lambda_{2,3} + \lambda_{1,2}/4)}}. \qquad (9.16.3)$$

Pentru determinarea coeficientului lui Darcy, λ, se determină regimul de mişcare din conductă, deci numărul Reynolds al mişcării

$$\mathrm{Re}_{2,3} = \frac{VD}{\nu_1} = \frac{4Q_{2,3}}{\pi D\nu_1} = \frac{4 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}025} = 340,$$

$$\mathrm{Re}_{1,2} = \frac{VD}{\nu_1} = \frac{4Q_{1,2}}{\pi D\nu_1} = \frac{4 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-4}} = 170\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci, în ambele cazuri, mişcarea este laminară. (Din diagrama din figura 9.16, *a*, s-a găsit, pentru $\theta_1 = 10°C$, $\nu_1 = 0{,}3 \cdot 10^{-4}$ m²/s).

Pentru aceasta, coeficienţii lui Darcy sînt :

$$\lambda_{1,2} = 64/\mathbf{Re}_{1,2} = 64/170 = 0{,}376 ;$$

$$\lambda_{2,3} = 64/\mathbf{Re}_{2,3} = 64/340 = 0{,}188.$$

Sarcina necesară se determină cu relaţia (9.16.2)

$$H = 1{,}2 \cdot 0{,}0826 \frac{Q_{2,3}^2}{D^5}\left(\lambda_{2,3} + \frac{\lambda_{1,2}}{4}\right) l = 1{,}2 \cdot 0{,}0826 \frac{(0{,}2 \cdot 10^{-3})^2}{0{,}025^5} \cdot$$

$$\cdot \left(0{,}188 + \frac{0{,}376}{4}\right) 50 = 5{,}72 \text{ m} ;$$

$$H = 5{,}72 \text{ m}.$$

2) Dacă se consideră sarcina $H = 5{,}72$ m şi temperatura uleiului $\theta_2 = 20°C$, debitul se calculează cu relaţia (9.16.3), dar coeficienţii lui Darcy sînt funcţie de regimul de mişcare deci de numărul Reynolds, deci de debitul transportat, care este necunoscut. Rezolvarea se poate face iterativ, dacă se presupune că mişcarea nu se păstrează laminară sau se poate înlocui expresia coeficientului lui Darcy şi a numărului Reynolds în relaţia (9.16.2) pentru mişcarea laminară, urmînd a se verifica această ipoteză.

$$H = 1{,}2 \cdot 0{,}0826 \frac{Q^2 l}{D^5}\left(\frac{64\pi D\nu_2}{4Q} + \frac{1}{4}\frac{64\pi D\nu_2}{4\frac{Q}{2}}\right),$$

$$H = 1{,}2 \cdot 0{,}0826 \frac{Q}{D^4} l \cdot 16 \cdot \pi\nu_2 \left(1 + \frac{1}{2}\right),$$

$$H = 1{,}2 \cdot 0{,}0826 \cdot 16 \cdot 1{,}5 \frac{Q}{D^4} l\pi\nu_2.$$

Deci $$Q = \frac{HD^4}{1{,}2 \cdot 0{,}0826 \cdot 16 \cdot 1{,}5 \cdot l\pi\nu_2} = \frac{5{,}72 \cdot 0{,}025^4}{1{,}2 \cdot 0{,}0826 \cdot 16 \cdot 1{,}5 \cdot 50 \cdot \pi \cdot 0{,}21 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= 0{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 0{,}3 \text{ l/s}.$$

Cu aceasta, numerele Reynolds ale mişcării sînt :

$$\mathbf{Re}_{2,3} = \frac{VD}{\nu_2} = \frac{4Q}{\pi D\nu_2} = \frac{4 \cdot 0{,}0003}{\pi \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}21 \cdot 10^{-4}} = 510 ;$$

$$\mathbf{Re}_{1,2} = \frac{VD}{\nu_2} = \frac{4Q}{\pi D\nu_2} = \frac{4 \cdot 0{,}00015}{\pi \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}21 \cdot 10^{-4}} = 255.$$

În ambele cazuri, mişcarea rămîne laminară, deci ipoteza iniţială este valabilă.

Problema 9.17. O galerie de aducţiune sub presiune (fig. 9.17) a unei centrale hidroelectrice are lungimea $L = 4$ km şi transportă debitul instalat $Q_i = 50$ m³/s. În urma perforării galeriei, a rezultat un diametru echivalent $D_e = 6$ m şi o rugozitate medie a peretelui $k = 0{,}6$ m. Se cere :

1) să se determine numărul Reynolds al mişcării dacă viscozitatea cinematică a apei este $\nu = 1{,}11 \cdot 10^{-6}$ m²/s şi să se precizeze regimul de mişcare din galerie ;

Scanned with OKEN Scanner

2) să se determine pierderile de sarcină pe galerie ;

3) să se determine pierderea de putere corespunzătoare ;

4) datorită calităţilor slabe ale rocii, s-a procedat la betonarea aducţiunii, rezultînd o secţiune circulară cu diametrul $D = 4{,}8$ m şi rugozitatea $k = 1$ mm. Să se determine pierderile de sarcină în acest caz şi economia de energie anuală faţă de cazul precedent, pentru o durată de utilizare $T = 2\,500$ ore/an, în care se funcţionează cu debitul instalat.

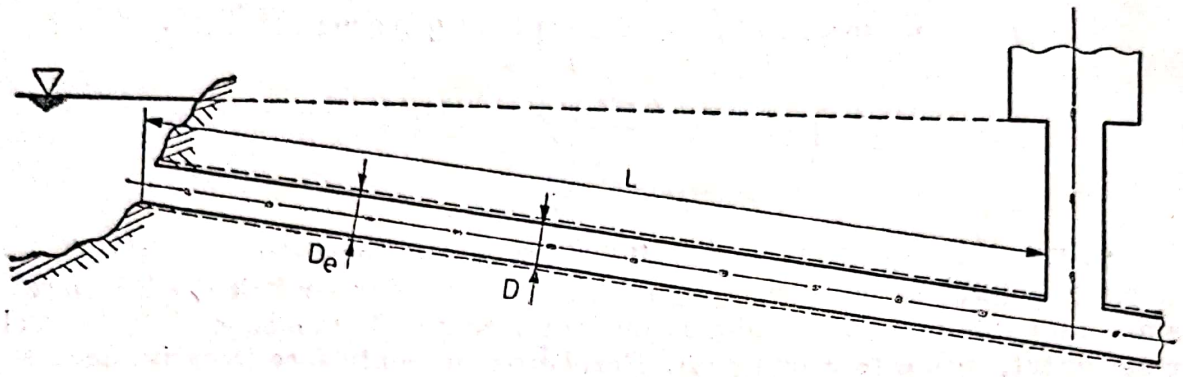


Fig. 9.17.

Rezolvare : 1) Numărul Reynolds al mişcării este

$$\mathbf{Re} = \frac{VD_e}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D_e \nu} = \frac{4 \cdot 50}{\pi \cdot 6 \cdot 1{,}11 \cdot 10^{-6}} = 9{,}56 \cdot 10^6.$$

Valoarea limită a numărului Reynolds care delimitează zona prepătratică de zona pătratică (rugoasă) este

$$\mathbf{Re}_{lim\ 2} = 560D/k = 560 \cdot 6/0{,}6 = 5\,600,$$

deci mişcarea în galerie este turbulentă în zona conductelor rugoase din punct de vedere hidraulic.

2) Coeficientul lui Darcy în această zonă se poate calcula cu relaţia

$$\lambda = \frac{1}{(2 \lg(D/k) + 1{,}14)^2} = \frac{1}{(2 \lg(6/0{,}6) + 1{,}14)^2} = 0{,}101,$$

iar pierderile de sarcină pe galerie sînt $h_r = \lambda \frac{L}{D_e} \frac{V^2}{2g} = 0{,}0826 \frac{Q^2}{D_e^5} \lambda L =$

$$= 0{,}0826 \frac{50^2}{6^5} \cdot 0{,}101 \cdot 4\,000 = 10{,}62 \text{ m}.$$

3) Puterea hidraulică disipată este

$$P_d = \rho g Q h_r = 9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10{,}62 = 5{,}209 \cdot 10^6 \text{ W} = 5{,}209 \text{ MW}.$$

4) După betonare, numărul Reynolds al mişcării este

$$\mathbf{Re} = \frac{VD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4 \cdot 50}{\pi \cdot 4{,}8 \cdot 1{,}11 \cdot 10^{-6}} = 11{,}95 \cdot 10^6,$$

iar valoarea limită a numărului Reynolds este

$$\mathbf{Re}_{lim\ 2} = \frac{560D}{k} = \frac{560 \cdot 4{,}8}{1 \cdot 10^{-3}} = 2{,}688 \cdot 10^6,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci mişcarea este tot în zona pătratică, iar coeficientul lui Darcy are expresia

$$\lambda_1 = \frac{1}{(2\lg(D/k) + 1{,}14)^2} = \frac{1}{(2\lg(4{,}8/1\cdot 10^{-3}) + 1{,}14)^2} = 0{,}014.$$

Cu aceasta, pierderile de sarcină pe galerie sînt

$$hr_1 = \lambda_1 \frac{L}{D}\frac{V_1^2}{2g} = 0{,}0826\frac{Q^2}{D^5}\lambda_1 L = 0{,}0826\frac{50^2}{4{,}8^5}\cdot 0{,}014\cdot 4\,000 = 4{,}54 \text{ m}.$$

Puterea pierdută, în acest caz, este

$$P_{d1} = \rho g Q h_{r1} = 9{,}81\cdot 10^3\cdot 50\cdot 4{,}54 = 2{,}267\cdot 10^6 \text{ W} = 2{,}267 \text{ MW},$$

respectiv economia de energie anuală este

$$\Delta E = (P_d - P_{d1})T = (5{,}209 - 2{,}267)\cdot 2\,500 = 7\,355 \text{ MWh/an}.$$

S-a presupus că centrala funcţionează cu debitul instalat Q_i întreaga perioadă de timp T. Dacă debitul turbinat $Q = Q(t)$ este variabil în timp, pentru evaluarea pierderilor de energie, se foloseşte debitul mediu cubic — acel debit, considerat constant, care produce aceeaşi pierdere de energie ca şi $Q(t)$ = definit astfel

$$Q_{mc} = \left[\frac{1}{T}\int_0^T Q^3(t)\,dt\right]^{1/3}.$$

Problema 9.18. O reţea de distribuţia apei este alcătuită din următoarele părţi (fig. 9.18).

— o priză de apă dintr-un rîu a cărui suprafaţă liberă se găseşte la cota $z_1 = +20$ m;

— o staţie de pompare care ridică apa într-un rezervor compensator, al cărui prea-plin se găseşte la cota $z_2 = 80$ m, printr-o conductă de refulare cu lungimea $l = 500$ m şi diametrul $D = 100$ mm;

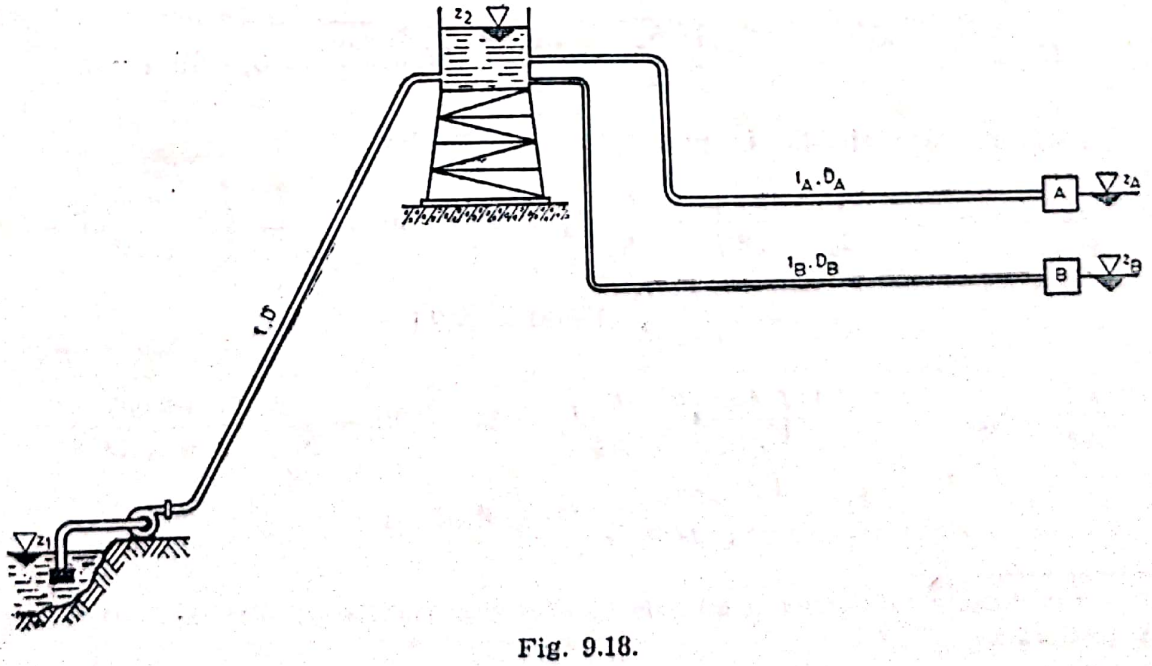


Fig. 9.18.

— două conducte de distribuție, pornind de la rezervor, una cu lungimea $l_A = 1\,000$ m și diametrul $D_A = 50$ mm care alimentează punctul A situat la cota $z_A = 50$ m și alta cu lungimea $l_B = 2\,000$ m și diametrul $D_B = 80$ mm care alimentează punctul B situat la cota $z_B = 60$ m.

Știind că coeficientul lui Chézy* pentru diferitele conducte din rețea este egal $C = 80$ unități SI, se cere :

1) să se determine presiunea în punctul A pentru debitul $Q_A = 2{,}5$ l/s și presiunea în punctul B pentru debitul $Q_B = 5$ l/s ;

2) să se determine parametrii (debit, sarcină și putere) pompei, care alimentează rețeaua, dacă randamentul pompei este $\eta = 0{,}7$.

Rezolvare : 1) Pentru determinarea presiunii în punctele A și B, se scrie relația lui Bernoulli între punctul 2 de pe suprafața liberă a rezervorului și punctul A, respectiv între punctul 2 și punctul B.

$$v_2^2/2 + p_2/\rho + gz_2 = v_A^2/2 + p_A/\rho + gz_A + h_{r,2,A}$$

$$v_2^2/2 + p_2/\rho + gz_2 = v_B^2/2 + p_B/\rho + gz_B + h_{r2,B} ;$$

se știe că $p_2 = p_{at}$ și se consideră $v_2 \cong 0$, de unde suprapresiunile în punctele A și B sînt :

$$\frac{p_{rA}}{\rho g} = \frac{p_A - p_{at}}{\rho g} = z_2 - z_A - \frac{v_A^2}{2g} - h_{r2,A} ;$$

$$\frac{p_{rB}}{\rho g} = \frac{p_B - p_{at}}{\rho g} = z_2 - z_B - \frac{v_B^2}{2g} - h_{r2,B}.$$

Pentru calcularea pierderilor de sarcină, se determină modulele de debit ale celor două conducte :

$$K_A = AC\sqrt{R} = \frac{\pi D_A^2}{4} C \sqrt{\frac{D_A}{4}} = \frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4} \cdot 80 \sqrt{\frac{0{,}05}{4}} = 0{,}0176 \text{ m}^3/\text{s} ;$$

$$K_B = AC\sqrt{R} = \frac{\pi D_B^2}{4} C \sqrt{\frac{D_B}{4}} = \frac{\pi \cdot 0{,}08^2}{4} \cdot 80 \sqrt{\frac{0{,}08}{4}} = 0{,}0569 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Deci suprapresiunile în punctele A și B sînt

$$\frac{p_{rA}}{\rho g} = z_2 - z_A - \frac{1}{2g}\left(\frac{4Q_A}{\pi D_A^2}\right)^2 - \frac{Q_A^2}{K_A^2} l_A = 80 - 50 - \frac{1}{2 \cdot 9{,}81}\left(\frac{4 \cdot 0{,}0025}{\pi \cdot 0{,}05^2}\right)^2 -$$

$$- \frac{0{,}0025^2}{0{,}0176^2} 1\,000 = 9{,}74 \text{ m},$$

$$\frac{p_{rB}}{\rho g} = z_2 - z_B - \frac{1}{2g}\left(\frac{4Q_B}{\pi D_B^2}\right)^2 - \frac{Q_B^2}{K_B^2} l_B = 80 - 60 - \frac{1}{2 \cdot 9{,}81}\left(\frac{4 \cdot 0{,}005}{\pi \cdot 0{,}08^2}\right)^2 -$$

$$- \frac{0{,}005^2}{0{,}0569^2} \cdot 2\,000 = 4{,}51 \text{ m}.$$

* Coeficientul lui Chézy este echivalent coeficientului lui Darcy, între ele existînd relația de legătură $\lambda = \sqrt{8g/C^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

2) Pentru determinarea parametrilor pompei, se scrie sarcina

$$H = H_g + \frac{Q^2}{K^2} l = z_2 - z_1 + \frac{Q^2}{K^2} l, \text{ cu } Q = Q_A + Q_B = 7{,}5 \text{ l/s},$$

în care $K = AC\sqrt{R} = \frac{\pi D^2}{4} C \sqrt{\frac{D}{4}} = \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4} \cdot 80 \sqrt{\frac{0{,}1}{4}} = 0{,}1 \text{ m}^3/\text{s}.$

Deci $$H = z_2 - z_1 + \frac{Q^2}{K^2} l = 80 - 20 + \frac{0{,}0075^2}{0{,}1^2} \cdot 500 = 62{,}81 \text{ m},$$

$$P = \frac{\rho g Q \cdot H}{\eta} = \frac{9{,}81 \cdot 10^3 0075 \cdot 62{,}81}{0{,}7} = 6{,}6 \text{ kW}.$$

Problema 9.19. Să se determine distribuţia debitelor în tronsoanele reţelei din figura 9.19, *a*, ştiind că nodul *1* este alimentat cu debitul $Q_1 = 310$ l/s, iar în celelalte noduri sînt furnizate debitele din tabel

Nodul N_i	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9
Q_i, l/s	310	46,5	15,5	31	46,5	31	31	46,5	31

Pe tronsonul *5—8* este furnizat debitul $Q_d = 31$ l/s distribuit uniform. Lungimile diferitelor tronsoane de conductă sînt următoarele:

Tronsonul T_{ij}	T_{12}	T_{23}	T_{14}	T_{25}	T_{36}	T_{45}	T_{47}	T_{56}	T_{58}	T_{69}	T_{78}	T_{89}
Lungimea $l_{i,j}$, m	500	500	455	364	546	409	364	455	410	273	500	341

Rugozitatea echivalentă a conductelor este $k = 0{,}5$ mm; iar viscozitatea cinematică a lichidului este $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ m²/s (apă la 20°C).

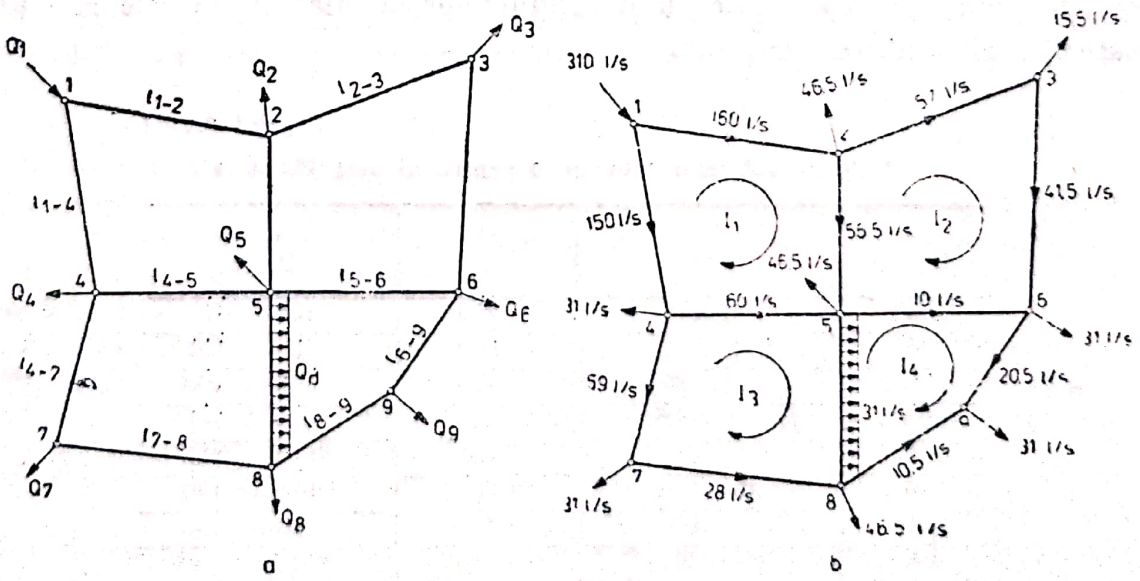


Fig. 9.19.

Să se determine, de asemenea, sarcina pompei care alimentează rețeaua, dacă aceasta este situată într-un plan orizontal, iar presiunea de serviciu ce trebuie asigurată la consumator este $p_s/\rho g = 40$ m.

Rezolvare: Rețeaua considerată este o rețea inelară plană, adică un sistem sub presiune format din $n = 9$ noduri, $m = 12$ trosoane, dispuse astfel încît în fiecare nod să conveargă cel puțin două tronsoane, două noduri oarecare să fie unite prin cel mult un tronson, iar tronsoanele să nu se intersecteze în puncte care nu sînt noduri, Nodurile și tronsoanele formează $r = 4$ inele și este valabilă relația $r = m - n + 1$.

Calculul hidraulic al unei rețele inelare presupune determinarea repartiției debitelor în tronsoanele rețelei, dimensionarea acestor tronsoane și determinarea presiunii în noduri. Pentru rezolvare, se dispune de ecuația continuității în noduri și de relația lui Bernoulli pentru fiecare inel. Deoarece problema este nedeterminată, se recurge și la alte criterii de dimensionare (de exemplu cel economic), iar rezolvarea se face iterativ.

Se adoptă sensuri de curgere pe tronsoane, astfel încît consumatorii îndepărtați să fie alimentați pe drumul cel mai scurt, apoi se aleg debitele inițiale $Q_{ij}^{(0)}$ pe fiecare tronson, astfel încît consumatorilor să le fie furnizate debitele cerute, iar în nodurile rețelei să fie satisfăcută ecuația continuității

$$\sum_{j=1}^{a_i} Q_{ij}^{(0)} \pm Q_i = 0, \qquad (9.19.1)$$

în care N_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) este un nod oarecare, a_i este numărul tronsoanelor care converg în nodul N_i; T_{ij} ($j = 1, 2. \ldots, a_i$) este tronsonul care unește nodurile N_i și N_j; $Q_{ij}^{(0)}$ este debitul prin tronsonul T_{ij} în prima aproximație, iar Q_i este debitul de alimentare sau de consum din nodul N_i. Se consideră pozitive debitele care intră în nodul N_i și negative cele care ies din nodul N_i (reprezintă $n - 1$ ecuații liniar independente). Sensurile de curgere și debitele $Q_{ij}^{(0)}$, alese pentru fiecare tronson sînt reprezentate în figura 9.19, *b*, Pentru tronsonul T_{58} cu debit distribuit uniform se consideră $Q_{58N5}^{(0)} = 60$ l/s și $Q_{58N8}^{(0)} = 29$ l/s, diferența reprezentînd $Q_d = 31$ l/s.

Cu aceste debite se aleg diametrele tronsoanelor. De exemplu se poate folosi pentru alegere un criteriu economic. În tabelul 9.19.1 sînt prezentate debitele economice care corespund conductelor cu diametrele cele mai utilizate în alimentarea cu apă.

Tabelul 9.19.1

Valorile debitelor economice pentru diverse diametre

D [mm]	Q_e [l/s]	D [mm]	Q_e [l/s]
100	5,4	500	168— 237
125	5,4—9	600	237— 355
150	9— 15	700	355— 490
200	15—28,5	800	490— 685
250	28,5—45	900	685— 882
300	45—68	1 000	882—1 120
350	68—96	1 100	1 120—1 390
400	96—130	1 200	1 390—1 640
450	130—168	1 400	1 640—2 250

Scanned with OKEN Scanner

În continuare, repartiția debitelor, propusă inițial, va fi verificată și corectată. Diametrele alese pentru fiecare tronson T_{ij}, precum și calculul în continuare, se prezintă în tabelul 9.19.2.

Deoarece se dispune de $n-1$ ecuații în care sînt m necunoscute — debitele Q_{ij} ale tronsoanelor — pentru completarea numărului de ecuații, se scrie relația lui Bernoulli pentru fiecare inel format. Pierderea de sarcină pe un tronson T_{ij} este $h_{r,ij} = M_{ij}Q_{ij}^2$, în care M_{ij} este modulul de rezistență al tronsonului. Dacă I_k ($k = 1, 2, \ldots, r$) este un inel al rețelei, iar b_k este numărul de tronsoane care formează inelul și dacă se alege un sens pozitiv de parcurgere a tuturor inelelor (de exemplu sensul orar), atunci, din relația lui Bernoulli, rezultă că suma pierderilor de sarcină h_{rk} pe întregul inel este nulă

$$h_{rk} = \sum_k h_{r,ij} = \sum_k (\pm M_{ij} \cdot Q_{ij}^2) = 0, \qquad (9.19.2)$$

în care $\sum_k$ se referă la cele b_k tronsoane ale inelului I_k, semnul $+$ corespunde cazului în care sensul de curgere pe tronsonul T_{ij} coincide cu sensul de parcurgere ales pentru inel, iar semnul — corespunde cazului în care sensul de curgere din tronsonul T_{ij} este opus sensului de parcurgere a inelului. Pentru fiecare inel, se poate scrie cîte o relație de forma (9.19.2), deci pentru întreaga rețea se pot scrie r ecuații, în total $(n+1) + r = m$ ecuații cu m necunoscute, debitele Q_{ij}. Acest sistem nu se poate rezolva direct, deoarece nu se cunosc diametrele conductelor și nici regimul de mișcare, deci coeficienții pierderilor de sarcină.

Deoarece cele r ecuații de tipul (9.19.2) sînt neliniare, sistemul se rezolvă prin metode de aproximare, de exemplu metoda Cross-Lobacev.

Debitele $Q_{ij}^{(0)}$, alese pentru tronsoanele T_{ij}, satisfac ecuațiile de tipul (9.19.1), dar nu satisfac ecuațiile de tipul (9.19.2) și, pentru a fi satisfăcute și aceste ecuații, în inelul I_k se introduce debitul de corecție, sau debitul de contur ΔQ_k ($k = 1, 2, \ldots, r$), unde

$$\Delta Q_k^{(l+1)} = \frac{\sum_k (\pm M_{ij} Q_{ij}^{(l)2})}{2 \sum_k M_{ij} Q_{ij}^{(l)}}.$$

Acest debit corespunde iterației $(l+1)$ și folosește valorile debitelor din iterația anterioară (l).

Adunînd aceste debite $\Delta Q_k^{(l+1)}$ și $\Delta Q_0^{(l+1)}$ la valorile anterioare ale debitelor $Q_{ij}^{(l)}$ se obțin valorile $Q_{ij}^{(l+1)}$ corespunzătoare pasului următor al rezolvării:

$$Q_{ij}^{(l+1)} = Q_{ij}^{(l)} + \Delta Q_k^{(l+1)} + \Delta Q_o^{(l+1)}$$

în care s-a considerat că T_{ij} face parte din inelele I_k și I_o.

Se admite că aproximația dată de iterația p este suficientă dacă $h_{r,k}^{(p)} < 0{,}5$ m pe fiecare inel și dacă $h_{r,C}^{(p)} < 1$ m, unde $h_{r,C}$ este pierderea de sarcină pe conturul C al rețelei (soluțiile exacte ale ecuațiilor (9.19.2) dau $h_{r,k} = 0$ și $h_{r,C} = 0$).

Calculul este efectuat tabelar și este prezentat în tabelul 9.19.2.

Pentru tronsonul T_{58}, cu debit distribuit uniform, diametrul economic a fost ales pentru debitul mediu (semisuma debitelor de la capetele tronsonului), iar pierderea de sarcină s-a calculat cu relația

$$h_r = M(Q_t + 0{,}55Q_d)^2,$$

în care $Q_t^{(0)} = 29$ l/s este debitul tranzitat de tronson, iar $Q_d = 31$ l/s este debitul distribuit uniform de-a lungul întregului tronson.

Scanned with OKEN Scanner

I_k	T_{ij}	l_{ij} [m]	$Q_{ij}^{(0)}$ [m³/s]	D_{ij} [m]	Re_{ij} [—]	k_{ij}/D_{ij} [—]
I_1	1—2	500	0,160	0,450	$0,410 \cdot 10^6$	$1,11 \cdot 10^{-3}$
	2—5	364	0,0565	0,300	$0,216 \cdot 10^6$	$1,66 \cdot 10^{-3}$
	5—4	409	0,060	0,300	$0,229 \cdot 10^6$	$1,66 \cdot 10^{-3}$
	4—1	455	0,150	0,450	$0,382 \cdot 10^6$	$1,11 \cdot 10^{-3}$
I_2	2—3	500	0,057	0,300	$0,218 \cdot 10^6$	$1,66 \cdot 10^{-3}$
	3—6	546	0,0415	0,250	$0,190 \cdot 10^6$	$2,00 \cdot 10^{-3}$
	6—5	455	0,010	0,150	$0,076 \cdot 10^6$	$3,33 \cdot 10^{-3}$
	5—2	364	0,0565	0,300	$0,216 \cdot 10^6$	$1,66 \cdot 10^{-3}$
I_3	4—5	409	0,060	0,300	$0,229 \cdot 10^6$	$1,66 \cdot 10^{-3}$
	5—8	410	0,060 0,029	0,300	$0,172 \cdot 10^6$	$1,66 \cdot 10^{-3}$
	8—7	500	0,028	0,200	$1,161 \cdot 10^6$	$2,50 \cdot 10^{-3}$
	7—4	364	0,059	0,300	$0,226 \cdot 10^6$	$1,66 \cdot 10^{-3}$
I_4	5—6	455	0,010	0,150	$0,076 \cdot 10^6$	$3,33 \cdot 10^{-3}$
	6—9	273	0,0205	0,200	$0,118 \cdot 10^6$	$2,50 \cdot 10^{-3}$
	9—8	341	0,0105	0,150	$0,080 \cdot 10^6$	$3,33 \cdot 10^{-3}$
	8—5	410	0,060 0,029	0,300	$0,172 \cdot 10^6$	$1,66 \cdot 10^{-3}$

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul 9.19.2

Inelare

λ_{ij} [—]	M_{ij}	Valori inițiale		Iterația 1				
		$M_{ij}\ Q_{ij}^{(0)}$	$M_{ij}\ Q_{ij}^{(0)2}$	$\Delta Q_k^{(1)}$	$\Delta Q_0^{(1)}$	$Q_{ij}^{(1)}$	$M_{ij}\ Q_{ij}^{(1)}$	$M_{ij}\ Q_{ij}^{(1)2}$
0,021	47,00	7,52	+1,20	+0,0001	—	0,160	7,52	+1,20
0,023	284,58	16,08	+0,90	+0,0001	+0,002	0,0585	16,65	+0,97
0,023	319,76	19,19	—1.15	—0,0001	+0,006	0,066	21,10	—1,39
0,021	42,77	6,42	—0,96	—0,0001	—	0,150	6,42	—0,96
	$\sum_1$	49,21	—0,01				51,69	—0,18
0,023	390,90	22,28	+1,27	—0,002	—	0,055	21,50	+1,18
0,024	1 108,37	46,00	+1,91	—0,002	—	0,0395	43,78	+1,73
0,028	13 858,00	138,58	—1,39	+0,002	—0,0006	0,0114	157,98	—1,80
0,023	284,58	16,08	—0,90	+0,002	+0,0001	0,0585	16,65	—0,97
	$\sum_2$	222,94	+0,89				2 39,91	+0,14
0,023	319,76	19,19	+1,15	+0,006	—0,0001	0,066	21,10	+1,39
0,023	320,54	14,76	+0,68	+0,006	+0,0006	0,0666 0,0356	16,87	+0,89
0,026	3 355,60	93,96	—2,63	—0,006	—	0,022	73,82	—1,62
0,023	284,58	16,79	—0,99	—0,006	—	0,053	15,08	—0,80
	$\sum_3$	144,70	—1,79				126,87	—0,14
0,028	13 858,00	138,58	+1,39	—0,0006	+0,002	0,0114	157,98	+1,80
0,026	1 832,17	37,56	+0,77	—0,0006	—	0,0199	36,46	+0,73
0,028	10 386,00	109,05	—1,15	+0,0006	—	0,0111	115,28	—1,28
0,023	320,54	14,76	—0,68	+0,0006	+0,006	0,0666 0,0356	16,87	—0,89
	$\sum_4$	299,95	+0,33				326,59	+0,36

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că la primul inel I_1, debitul de corecție $\Delta Q_1^{(1)} = 0{,}1$ l/s a fost neglijat, fiind mic în comparație cu debitele tronsoanelor.

Verificarea suplimentară ce trebuie făcută este pierderea de sarcină pe contur

$$h_{r,c}^{(1)} = h_{r1,2} + h_{r2,3} + h_{r3,6} + h_{r6,9} - h_{r9,8} - h_{r8,7} - h_{r7,4} -$$

$$- h_{r4,1} = 1{,}20 + 1{,}18 + 1{,}73 + 0{,}73 - 1{,}28 - 1{,}62 - 0{,}80 - 0{,}96 = 0{,}18 \text{ m} < 1 \text{ m}.$$

Pentru determinarea sarcinii pompei care alimentează rețeaua, trebuie să se determine sarcina necesară în nodul N_1, astfel încît în punctul cel mai îndepărtat, aici nodul N_9, să se asigure presiunea de serviciu $p_s/(\rho g) = 40$ m.

Dacă sarcina nodului N_j este $h_j = p_j/(\rho g) + z_j$, sarcina nodului N_i situat imediat amonte de N_j este

$$H_i = p_i/(\rho g) + z_i = h_i + h_{r,ij} = p_j/(\rho g) + z_j + h_{rij}.$$

Dacă se ține seama că rețeaua este situată într-un plan orizontal și că sarcina nodului N_9 este $p_s/(\rho g)$, se poate calcula, mergînd pe diverse drumuri, sarcina nodului N_1.

Se consideră drumul $N_1N_2N_5N_6N_9$; rezultă sarcina nodului N_1

$$p_1/(\rho g) = p_s/(\rho g) + h_{r9,6} + h_{r6,5} + h_{r5,2} + h_{r2,1} =$$

$$= 40 + 0{,}73 + 1{,}80 + 0{,}97 + 1{,}20 = 44{,}70 \text{ m}.$$

Se poate considera, de asemenea, drumul $N_1N_4N_7N_8N_9$ și rezultă sarcina nodului N_1

$$p_1/(\rho g) = p_s/(\rho g) + h_{r9,8} + h_{r8,7} + h_{r7,4} + h_{r4,1} =$$

$$= 40 + 1{,}28 + 1{,}62 + 0{,}80 + 0{,}96 = 44{,}66 \text{ m}.$$

Deoarece suma pierderilor de sarcină pe toate inelele este foarte aproape de zero, valorile sarcinii nodului N_1 diferă foarte puțin de la un drum la altul, astfel încît se poate considera $h_1 = p_1/(\rho g) = 45$ m.

Problema 9.20. Pentru transportarea gazului de sondă prin conducte, se dispun stații de compresoare de-a lungul acestora, distanța dintre două stații fiind $l = 15$ km (fig. 9.20). Conducta are diametrul $D = 600$ mm și transportă debitul masic $Q_m = 35$ kg/s de gaz metan, presiunea la ieșirea din stația de compresoare fiind $p_1 = 0{,}7$ MPa pentru care densitatea gazului este $\rho_1 = 4{,}95$ kg//m³. Se admite că gazul metan se comportă ca un gaz perfect și curgerea prin conductă este izotermă. Se cere:

a) să se determine presiunea p_2 la capătul aval al conductei;

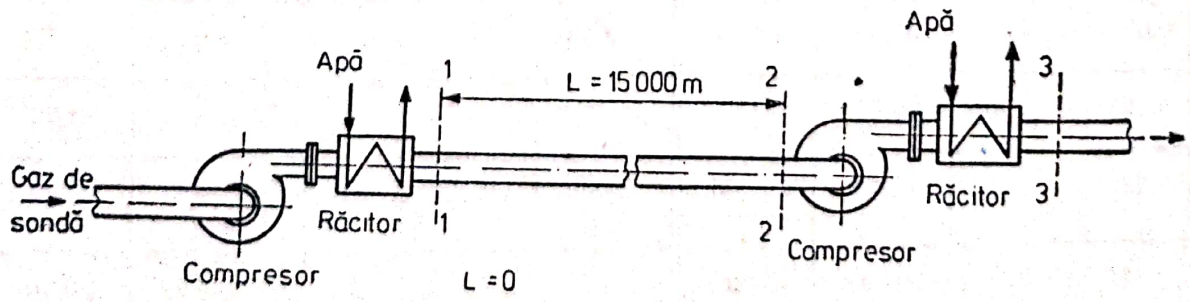


Fig. 9.20

b) să se determine puterea consumată pentru comprimarea gazului în stația de compresoare dacă se presupune comprimarea adiabatică cu exponent $\varkappa = 1{,}3$.

Rezolvarea : În cazul mișcării gazelor prin conducte, se urmărește determinarea variației presiunii, respectiv capacitatea de transport a conductei. Pentru rezolvarea acestor probleme, se folosesc ecuația energiei (Bernoulli), ecuația continuității și ecuația de stare

$$v\,dv + \frac{dp}{\rho} + \frac{\lambda}{D}\frac{v^2}{2}ds = 0\,; \tag{9.20.1}$$

$$\rho v A = \rho_1 v_1 A_1 = Q_m\,; \tag{9.20.2}$$

$$p/\rho^{\varkappa} = p_1/\rho_1^{\varkappa} = C. \tag{9.20.3}$$

Relațiile (9.20.1)...(9.20.3) formează un sistem de ecuații, în care necunoscutele sînt p, ρ și v. Din relația (9.20.2), se poate scrie

$$v = \frac{1}{\rho}\frac{Q_m}{A},$$

de unde

$$dv = -\frac{Q_m}{A}\cdot\frac{d\rho}{\rho^2},$$

respectiv

$$v\,dv = -\left(\frac{Q_m}{A}\right)^2\frac{d\rho}{\rho^3}. \tag{9.20.4}$$

Din relația, (9.20.3), se obține $\rho = (p/p_1)^{1/\varkappa}\rho_1$, iar prin derivare rezultă

$$d\rho = \frac{1}{\varkappa}\cdot\frac{\rho_1}{p_1^{1/\varkappa}}p^{(1-\varkappa)/\varkappa}\,dp. \tag{9.20.5}$$

Înlocuind pe $d\rho$ cu expresia (9.20.5) și pe ρ în funcție de p, relația (9.20.4 devine

$$vdv = -\frac{Q_m^2}{\varkappa A^2}\frac{p_1^{2/\varkappa}}{\rho_1^2}p^{(-2-\varkappa)/\varkappa}\,dp. \tag{9.20.6}$$

Cu aceasta, ecuația energiei (9.20.1) devine

$$-\left(\frac{Q_m}{A}\right)^2\frac{1}{\varkappa}\frac{p_1^{2/\varkappa}}{\rho_1^2}p^{(-2-\varkappa)/\varkappa}dp + \frac{p_1^{1/\varkappa}}{\rho_1}p^{-1/\varkappa}\,dp + \frac{\lambda}{2D}\left(\frac{Q_m}{A}\right)^2\frac{p_1^{2/\varkappa}}{\rho_1^2}p^{-2/\varkappa}\,ds = 0,$$

respectiv, prin înmulțire cu $\left(\frac{Q_m}{A}\right)^2\frac{\rho_1^2}{p_1^{2/\varkappa}}\varkappa p^{2/\varkappa}$, se obține

$$\varkappa\left(\frac{A}{Q_m}\right)^2\frac{\rho_1}{p_1^{1/\varkappa}}p^{1/\varkappa}\,dp - \frac{dp}{p} + \frac{\lambda\varkappa}{2d}ds = 0. \tag{9.20.7}$$

Integrînd relația (9.20.7) între două secțiuni drepte ale conductei, secțiunea *1* și secțiunea curentă, situate la distanța x una față de cealaltă și admițînd $\lambda = \text{const.}$, adică mișcarea este considerată turbulentă în zona pătratică, se obține relația

$$\ln\frac{p}{p_1} + \frac{\varkappa^2}{\varkappa+1}\left(\frac{A}{Q_m}\right)^2\rho_1 p_1\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{(\varkappa+1)/\varkappa}\right] = \frac{\lambda\varkappa}{2D}x, \tag{9.20.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care s-au notat cu indice 1 mărimile din secțiunea *1*, iar fără indice, mărimile din secțiunea curentă.

Dacă evoluția gazului se consideră politropică cu exponentul n, relația (9.20.8) devine

$$\ln\frac{p}{p_1}+\frac{n^2}{n+1}\left(\frac{A}{Q_m}\right)^2\rho_1 p_1\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{(n+1)/n}\right]=\frac{\lambda n}{2D}x, \tag{9.20.9}$$

iar, dacă se consideră evoluția izotermă ($n \to 1$), se obține

$$\ln\frac{p}{p_1}+\left(\frac{A}{Q_m}\right)^2\frac{\rho_1 p_1}{2}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right]=\frac{\lambda}{2D}x. \tag{9.20.10}$$

În funcție de importanța termenilor relațiilor (9.20.8)...(9.20.10), se observă următoarele cazuri:

1) cazul conductelor cu lungime relativ mică, la care căderea de presiune este mare. În acest caz, toți termenii relațiilor (9.20.9) și următoarele au același ordin de mărime și deci nu poate fi neglijat niciunul;

2) cazul conductelor foarte lungi, sau cu căderi de presiune foarte mari. În acest caz, termenul logaritmic se poate neglija în raport cu ceilalți și rezultă

$$\frac{\varkappa}{\varkappa+1}\left(\frac{A}{Q_m}\right)^2\rho_1 p_1\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{(\varkappa+1)/\varkappa}\right]=\frac{\lambda\varkappa}{2D}x, \tag{9.20.11}$$

pentru evoluție adiabatică, respectiv

$$\left(\frac{A}{Q_m}\right)^2\cdot\frac{\rho_1 p_1}{2}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^2\right]=\frac{\lambda\varkappa}{2D}x, \tag{9.20.12}$$

pentru o evoluție izotermică.

Conductele pentru transportul și distribuția gazelor se comportă conform relațiilor (9.20.11) și (9.20.12);

3) cazul mișcării fluidelor incompresibile la care $0{,}97 \leqslant p/p_1 < 1$. Conductele de distribuție interioară a gazului, având căderi de presiune foarte mici, se încadrează în acest caz, caz care se caracterizează prin neglijabilitatea termenului logaritmic și printr-o valoare a presiunii medii aritmetice a conductei apropiată de p_1,

$$(p_1+p)/2 \cong p_1,$$

pentru care relația (9.20.8) ia forma particulară

$$p=p_1-\frac{\lambda}{2D}\left(\frac{Q_m^2}{A^2}\right)\frac{x}{\rho_1}. \tag{9.20.13}$$

Pentru mișcarea gazelor în conductele de transport și distribuție, procesul se poate considera ca având o evoluție izotermică. Debitul Q_m transportat se poate obține din relația (9.20.12), considerînd $x = l$ și $p = p_2$.

$$Q_m=A\sqrt{\frac{\rho_1 D(p_1^2-p_2^2)}{\lambda l p_1}}, \tag{9.20.14}$$

iar variația presiunii se exprimă cu relația

$$p=\sqrt{p_1^2-\frac{p_1^2-p_2^2}{l}x}. \tag{9.20.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

a) În cazul considerat, temperatura conductei fiind constantă, presiunea p_2, la capătul aval al unui tronson de conductă, între două stații de compresoare, se determină cu relația (9.20.13)

$$p_2 = p_1 - \frac{\lambda}{2D}\left(\frac{Q_m}{A}\right)^2 \frac{l}{\rho_1}.$$

Pentru determinarea coeficientului lui Darcy, considerînd mișcarea turbulentă rugoasă în zona pătratică, se poate aplica relația lui Weymouth

$$\lambda = \frac{0{,}009407}{\sqrt[3]{D}} = \frac{0{,}009407}{\sqrt[3]{0{,}6}} = 0{,}011.$$

Cu aceasta, rezultă $p_2 = p_1 - \frac{\lambda}{2D}\left(\frac{Q_m}{A}\right)^2 \frac{l}{\rho_1} = 0{,}7\cdot 10^6 -$

$$- \frac{0{,}011}{2\cdot 0{,}6}\left(\frac{35}{0{,}283}\right)^2 \frac{15\cdot 10^3}{4{,}95} = 275 \text{ kPa}.$$

Deci o stație de compresoare trebuie să ridice presiunea de la $p_2 = 275$ kPa la $p_3 = p_1 = 700$ kPa.

b) Presupunînd un compresor ideal care realizează o comprimare adiabatică, energia specifică Y (energia pentru o unitate de masă de fluid) are expresia

$$Y = \frac{1}{2}(v_3^2 - v_2^2) + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_2}{\rho_2}\left[\left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{(\varkappa-1)/\varkappa} - 1\right],$$

în care $\varkappa = 1{,}3$ este exponentul adiabatic. Cu $\rho_2 = 1{,}93$ kg/m³, $v_3 = v_1 = Q_m/(\rho_1 A) = 25$ m/s și $v_2 = Q_m/(\rho_2 A) = 64{,}4$ m/s, rezultă

$$Y = \frac{1}{2}(25^2 - 64{,}4^2) + \frac{1{,}3}{0{,}3}\cdot\frac{275\cdot 10^3}{1{,}93}\left[\left(\frac{700}{275}\right)^{0{,}3/1{,}3} - 1\right] = 146805 \text{ J/kg}.$$

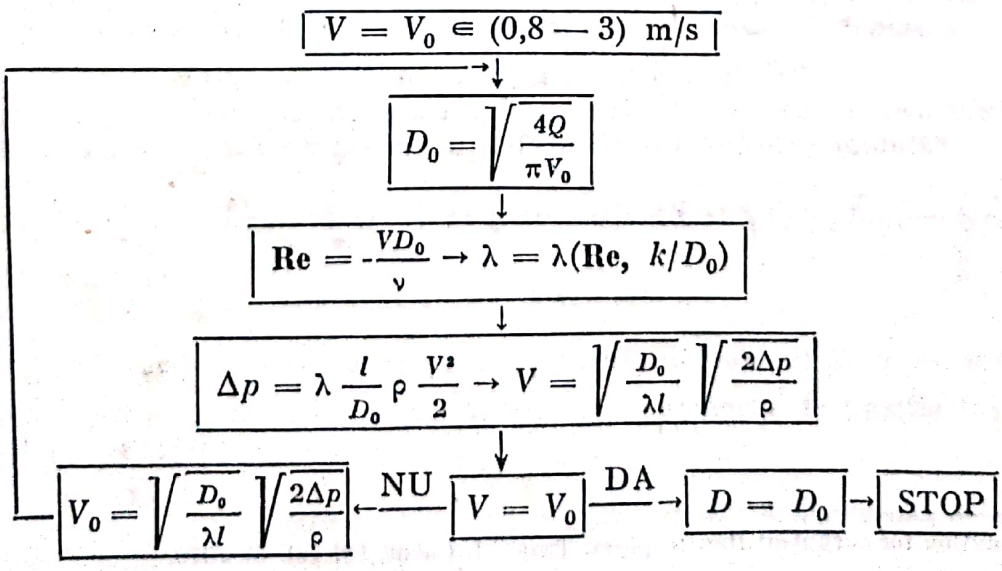
Cu aceasta, puterea necesară compresorului este

$$P = Q_m Y = 35\cdot 146\,805 = 5\,138\,204 \text{ W} \cong 5{,}14 \text{ MW}.$$

Problema 9.21. Să se dimensioneze diametrul unei conducte prin care se transportă debitul de apă $Q = 0{,}015$ m³/s. Se impune o cădere de presiune maximă pe lungimea $l = 1\,000$ m, $(\Delta p)_{max} = 0{,}2$ MPa.

Se cunosc : densitatea și viscozitatea apei $\rho = 1\,000$ kg/m³, $\nu = 10^{-6}$ m²/s și rugozitatea absolută a conductei $k = 0{,}5$ mm.

Rezolvare : Pentru determinarea diametrului D al conductei, se pot folosi metode iterative, conform organigramei de mai jos:



În cele ce urmează, se propune o metodă de calcul mai simplă, ce se bazează pe ipoteza următoare : în practică, cel mai frecvent regim de curgere în transportul apei este regimul de curgere turbulent rugos, în care λ nu este funcție decît de rugozitatea relativă k/D.

În această ipoteză, diametrul conductei se calculează cu formula*

$$D = 0{,}7442\ \beta\ |\lg(0{,}365k/\beta + 3{,}55\nu\beta/Q)|^{-0.4}, \qquad (9.21.1)$$

în care $\beta = (\rho l Q^2/\Delta p)^{1/5}$.

Rezultă $\beta = \left(\frac{1\,000 \cdot 1\,000 \cdot 0{,}015^2}{0{,}2 \cdot 10^6}\right)^{1/5} = 0{,}257$

$$D = 0{,}7442 \cdot 0{,}257\ |\lg(0{,}365 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}/0{,}257 +$$

$$+ 3{,}55 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}257/0{,}015^2)|^{-0.4} = 0{,}136\ \text{m}.$$

Se admite valoarea $D = 0{,}130$ m.

Viteza medie în conductă este $V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0{,}015}{\pi \cdot 0{,}13^2} = 1{,}13$ m/s, numărul Reynolds este $\mathbf{Re} = VD/\nu = 1{,}13 \cdot 0{,}13/10^{-6} \cong 1{,}5 \cdot 10^5$; cu $k/D = 0{,}5/130 = 0{,}004$, din anexa A.7, se obține $\lambda = 0{,}03$. În final, căderea de presiune este

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{D} \rho \frac{V^2}{2} = 0{,}03 \frac{1\,000}{0{,}13} 1000 \frac{1{,}13^2}{2} = 0{,}13\ \text{MPa} < (\Delta p)_{max}.$$

Pentru verificare, se recalculează debitul cu formula*

$$Q = 2{,}221 \frac{D^{5/2}}{\alpha} \lg\left(\frac{k}{3{,}7D} + \frac{1{,}775\nu\alpha}{D^{3/2}}\right), \quad \alpha = \sqrt{\frac{\rho l}{\Delta p}}. \qquad (9.21.2)$$

Se obține $\alpha = 1/\sqrt{0{,}13}$ și

$$Q = 2{,}221 \cdot 0{,}13^{5/2} \cdot \sqrt{0{,}13} \lg\left(\frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}}{3{,}7 \cdot 0{,}13} + \frac{1{,}775 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{0{,}13} \cdot 0{,}13^{3/2}}\right) = 0{,}0156\ \text{m}^3/\text{s},$$

o valoare foarte apropiată de cea inițială.

---

* Solution for turbulent flow in pipes. Trans. I. Chem. E., vol. 57/1979.

Scanned with OKEN Scanner

10

FUNCȚIONAREA MAȘINILOR HIDRAULICE

Problema 10.1. O turbină hidraulică de tip Francis (fig. 10.1, *a*), turbinează la regimul de calcul, un debit $Q = 15$ m³/s la o cădere netă teoretică $H_t = 305$ m și se rotește cu turația $n = 428{,}6$ rot/min. Turbina are diametrul muchiei de intrare în rotor $D_1 = 2{,}45$ m, iar înălțimea canalului rotoric la intrare este $B_1 = 0{,}26$ m, realizînd un coeficient de contracție $\varepsilon_1 = 0{,}94$. La ieșirea din rotor, diametrul mediu al muchiei este $D_{2m} = 1{,}3$ m, lățimea canalului rotoric este $B_2 = 0{,}5$ m, iar coeficientul de contracție realizat este $\varepsilon_2 = 0{,}92$. Se cere :

1) să se calculeze elementele triunghiului vitezelor la intrarea în rotor și la ieșirea din rotor ;

2) să se determine unghiul β_1 al palei la intrarea în rotor, respectiv β_2 la ieșirea din rotor.

Se admite că fluidul este ideal, deci schimbul de energie se realizează fără pierderi, respectiv că, fiind vorba de o turbină, se neglijează efectul vîrtejului relativ format între pale.

Rezolvare : Se urmărește în primul rînd determinarea expresiei momentului cuplului exercitat de apa care circulă prin turbină asupra palelor și coroanelor rotorului — momentul motor al turbinei.

Pentru aceasta, se consideră o suprafață de control S, formată din două suprafețe cu simetrie axială S_1 și S_2, care conțin muchiile de intrare și de ieșire din pală, suprafața coroanei interioare S_I, suprafața coroanei exterioare S_E, respectiv suprafețele S_{L1} și S_{L2} care izolează palele, astfel încît $S = S_1 \cup S_2 \cup S_I \cup S_E \cup S_{L1} \cup S_{L2}$ să fie o suprafață închisă, iar domeniul limitat de ea să fie simplu conex, ca în figura 10.1, *c*. Suprafața de control S este solidară cu rotorul în mișcare și deci se deplasează cu viteza $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}_1$ față de reperul $O_1x_1y_1z_1$, considerat fix.

Pentru suprafața de control S, se aplică teorema momentului cantității de mișcare, ținînd seama că suprafața de control este mobilă*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{V}} (\vec{r}_1 \times \rho\vec{v})\mathrm{d}\mathcal{V} + \oint_S (\vec{r}_1 + \rho\vec{v})[(\vec{v} - \vec{u})]\vec{n}\,\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \vec{r}_1 \times \rho\vec{f}\,\mathrm{d}\mathcal{V} - \oint_S \vec{r}_1 \times p\vec{n}\,\mathrm{d}S \tag{10.1.1}$$

în care $\mathcal{V}$ este volumul limitat de suprafața de control S, $\vec{n}$ — versorul normalei exterioare a suprafeței S, iar $\vec{r}_1$ — vectorul de poziție față de sistemul de referință $O_1x_1y_1z_1$.

* Isbășoiu, E. C., Rădulescu, V. Vane, stavile și rețele hidropneumatice — partea întîi — Hidrodinamica turbinelor, București, I.P.B., 1986

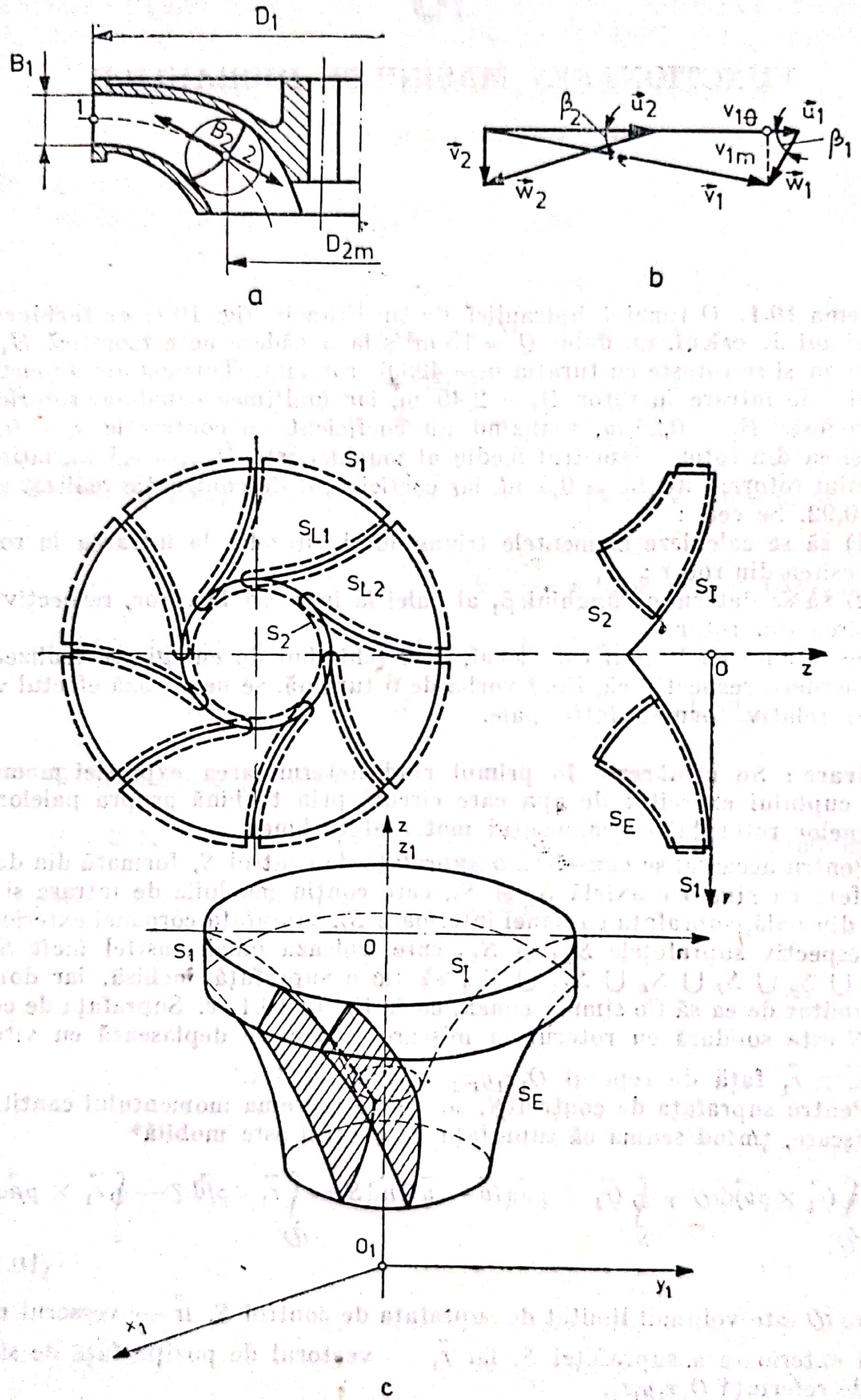

D1
B1
1
2
D2m
a
β2
u2
v1θ
u1
β1
v2
v1m
w2
v1
w1
b
S1
SL1
SL2
S2
SI
S2
0
z
SE
S1
z
z1
S1
0
SI
SE
01
y1
x1
c

Fig. 10.1.

Dacă se admite că mişcarea relativă este permanentă, cantitatea de mişcare cuprinsă în suprafaţa de control este constantă şi atunci $\mathrm{d}/\mathrm{d}t \int_{\mathcal{V}} (\vec{r}_1 \times \rho\vec{v})\mathrm{d}\mathcal{V} = 0$ şi, ştiind că viteza relativă este $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$, rezultă

$$\oint_S (\vec{r}_1 \times \rho\vec{v})\,(\vec{w}\cdot\vec{n})\mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \vec{r}_1 \times \rho\vec{f}\mathrm{d}\mathcal{V} - \oint_S \vec{r}_1 \times p\vec{n}\mathrm{d}S.$$

Pentru rezolvarea integralelor de suprafaţă, se consideră suprafaţa de control S alcătuită din elementele ei, astfel încît se poate scrie

$$\oint_S (\vec{r}_1 \times \rho\vec{v})\,(\vec{w}\cdot\vec{n})\mathrm{d}S = \int_{S_1} (\vec{r}_1 \times \rho\vec{v})\,(\vec{w}\cdot\vec{n})\mathrm{d}S_1 +$$

$$+\int_{S_2} (\vec{r}_1 \times \rho\vec{v})\,(\vec{w}\cdot\vec{n})\mathrm{d}S_2 + \int_{S_I \cup S_E \cup S_{L1} \cup S_{L2}} (\vec{r}_1 \times \rho\vec{v})\,(\vec{w}\cdot\vec{n})\mathrm{d}S.$$

Deoarece S_I, S_E, S_{L1} şi S_{L2} sînt suprafeţe de curent în mişcare relativă, ultima integrală este nulă ($\vec{w}\cdot\vec{n} = 0$) şi se poate scrie

$$\oint_S (\vec{r}_1 \times \rho\vec{v})\,(\vec{w}\cdot\vec{n})\mathrm{d}S = \int_{S_1} (\vec{r}_1 \times \rho\vec{v})(\vec{w}\cdot\vec{n}_1)\mathrm{d}S_1 + \int_{S_2} (\vec{r}_1 + \rho\vec{v})\,(\vec{w}\cdot\vec{n}_2)\mathrm{d}S_2.$$

Deoarece suprafeţele S_1 şi S_2 au simetrie axială, direcţiile normalelor lor $\vec{n}_1$ şi $\vec{n}_2$ trec prin axa turbinei şi deci $\vec{v}_1\cdot\vec{n}_1\mathrm{d}S_1 = -w_{1m}\mathrm{d}S_1 = -v_{1m}\mathrm{d}S_1 = -\mathrm{d}Q_1$, respectiv $\vec{v}_2\cdot\vec{n}_2 dS_2 = w_{2m}\mathrm{d}S_2 = v_{2m}\mathrm{d}S_2 = \mathrm{d}Q_2$, rezultînd

$$\oint_S (\vec{r}_1 \times \rho\vec{v})(\vec{w}\cdot\vec{n})\mathrm{d}S = \int_{S_2} (\vec{r}_1 \times \rho\vec{v})\mathrm{d}Q_2 - \int_{S_1} (\vec{r}_1 \times \rho\vec{v})\mathrm{d}Q_1.$$

Se observă că

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{r}_1 \times \rho\vec{f}\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \vec{r}_1 \times \rho\vec{g}\mathrm{d}\mathcal{V} = \vec{r}_{1G} \times m\vec{g},$$

unde m este masa fluidului din interiorul suprafeţei S, iar $\vec{r}_{1G}$ este raza vectoarea centrului de masă al volumului $\mathcal{V}$.

Se poate scrie, de asemenea,

$$-\oint_S \vec{r}_1 \times p\vec{n}\mathrm{d}S = -\int_{S_1} \vec{r}_1 \times p\vec{n}_1\mathrm{d}S_1 - \int_{S_2} \vec{r}_1 \times p\vec{n}_2\mathrm{d}S_2 - \int_{S_I \cup S_E \cup S_{L1} \cup S_{L2}} \vec{r}_1 \times p\vec{n}\mathrm{d}S,$$

în care $-\int_{S_I \cup S_E \cup S_{L1} \cup S_{L2}} \vec{r}_1 \times p\vec{n}\mathrm{d}S$ reprezintă momentul, faţă de O_1, al forţelor de legătură cu care coroanele şi palele acţionează asupra fluidului conţinut în suprafaţa de control. În cazul turbinelor, se foloseşte momentul forţelor de presiune asupra palelor şi coroanelor

$$\vec{M}_{01} = \int_{S_I \cup S_E \cup S_{L1} \cup S_{L2}} \vec{r}_1 \times p\vec{n}\mathrm{d}S,$$

care produce momentul motor al turbinei. Cu aceasta, relaţia (10.1.1.) devine

$$\int_{S_2} (\vec{r}_1 \times \rho\vec{v})\mathrm{d}Q_2 - \int_{S_1} (\vec{r}_1 \times \rho\vec{v})\mathrm{d}Q_1 = \vec{r}_{1G} \times m\vec{g} - \int_{S_1} \vec{r}_1 \times p\vec{n}_1\mathrm{d}S_1 -$$

$$-\int_{S_1} \vec{r}_1 \times p\vec{n}_2\mathrm{d}S_2 - \vec{M}_{01}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentul motor al turbinei este proiecția lui M_{01} pe axa mașinii Oz.

$$M_H = \vec{e}_z \cdot \vec{M}_{01} = \vec{e}_z \int_{S_1} (\vec{r}_1 \times \rho\vec{v}) dQ_1 - \int_{S_2} (\vec{r}_1 \times \rho\vec{v}) dQ_2, \qquad (10.1.2)$$

deoarece, datorită simetriei, forța de greutate trece prin axa turbinei și nu dă moment, iar $\int_{S_i} \vec{e}_z(\vec{r}_1 \times p\vec{n}_i) dS_i = 0$, $i = 1, 2$.

Deoarece $\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_0\vec{e}_0 + v_z\vec{e}_z$, iar $\vec{r}_1 = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$, relația (10.1.2) devine

$$M_H = \int_{S_1} \rho r v_{10} dQ_1 - \int_{S_2} \rho r v_{20} dQ_2. \qquad (10.1.3)$$

Relația (10.1.3) reprezintă momentul hidraulic al turbinei. Dacă se introduc componentele tangențiale medii, definite prin relația

$$\bar{v}_{i0} = \frac{1}{\rho Q r_i} \int_{S_i} \rho r_i v_{i0} dQ_i, \; i = 1, 2,$$

relația (10.1.3) se poate scrie

$$M_H = \rho Q(r_1\bar{v}_{10} - r_2\bar{v}_{20}), \qquad (10.1.4)$$

r_1 și r_2 fiind razele medii ale secțiunilor S_1 și S_2.

Puterea hidraulică a rotorului $P_H = M_H\omega$ se poate scrie

$$P_H = \rho Q(u_1\bar{v}_{10} - u_2\bar{v}_{20}). \qquad (10.1.5)$$

Relațiile (10.1.4) și (10.1.5) sînt cunoscute ca relațiile lui Euler, reprezentînd puterea și cuplul hidraulic al unei turbine. Știind că puterea hidraulică schimbată în turbină este $P_H = \rho g Q H_t$ (s-a presupus fluidul ideal) se obține

$$H_t = \frac{1}{g}(u_1\bar{v}_{10} - u_2\bar{v}_{20}), \qquad (10.1.6)$$

în care H_t reprezintă căderea teoretică — corespunzătoare fluidului ideal ;

1) În cazul considerat, se poate scrie, pentru intrarea în rotor :

$$v_{1m} = \frac{Q}{\pi D_1 B_1 \varepsilon_1} = \frac{15}{\pi \cdot 2{,}45 \cdot 0{,}26 \cdot 0{,}94} = 7{,}98 \text{ m/s} ;$$

$$u_1 = \pi D_1 n/60 = \pi \cdot 2{,}45 \cdot 428{,}6/60 = 54{,}95 \text{ m/s}.$$

Pentru determinarea componentei tangențiale v_{10}, se folosește relația (10.1.6), în care se consideră ieșirea ortogonală pentru regimul de calcul, adică $v_{20} = 0$. Deci

$$H_t = \frac{1}{g} u_1\bar{v}_{10},$$

de unde se obține $\bar{v}_{10} = g \cdot H_t/u_1 = 9{,}81 \cdot 305/54{,}95 = 54{,}45$ m/s.

Respectiv, la ieșirea din rotor, $v_{2m} = \frac{Q}{\pi D_{2m} B_2 \varepsilon_2} = \frac{15}{\pi \cdot 1{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}92} = 7{,}99$ m/s ;

$$u_2 = \pi D_{2m} \cdot n/60 = \pi \cdot 1{,}3 \cdot 428{,}6/60 = 29{,}16 \text{ m/s}.$$

Triunghiurile vitezelor sînt reprezentate în figura 10.1, *b*.

Scanned with OKEN Scanner

2) Pentru determinarea unghiului palei turbinei în zona muchiei de intrare, se foloseşte relaţia

$$\operatorname{tg}\ \beta_1 = v_{1m}/(u_1 - \bar{v}_{10}) = 7{,}98/(54{,}95 - 54{,}45) = 15{,}96,$$

iar $\beta_1 = \text{Arc tg}(15{,}96) = 86{,}65°$,

respectiv, pe muchia de ieşire din pală (la raza medie),

$$\operatorname{tg}\ \beta_2 = v_{2m}/u_2 = 7{,}99/29{,}16 = 0{,}274,$$

iar $\beta_2 = \text{Arc tg}(0{,}274) = 18{,}25°$.

Problema 10.2. Pentru turbina Francis din problema 10.1, funcţionînd la regimul de calcul cu debitul $Q = 15$ m³/s şi căderea teoretică $H_t = 305$ m şi avînd turaţia $n = 428{,}6$ rot/min, se cunoaşte presiunea relativă în rotor în punctul *1* pe muchia de intrare $p_1 = 1{,}478$ MPa. Să se determine presiunea relativă în rotor, în punctul *2* plasat pe muchia de ieşire din pală.

Se admite că fluidul este ideal şi deci curgerea prin rotor se face fără pierderi de sarcină.

Rezolvare : Mişcarea apei prin rotorul unei turbine poate fi raportată la un sistem de referinţă fix — mişcarea numită absolută sau la un sistem de referinţă mobil, legat de rotorul turbinei — mişcarea relativă.

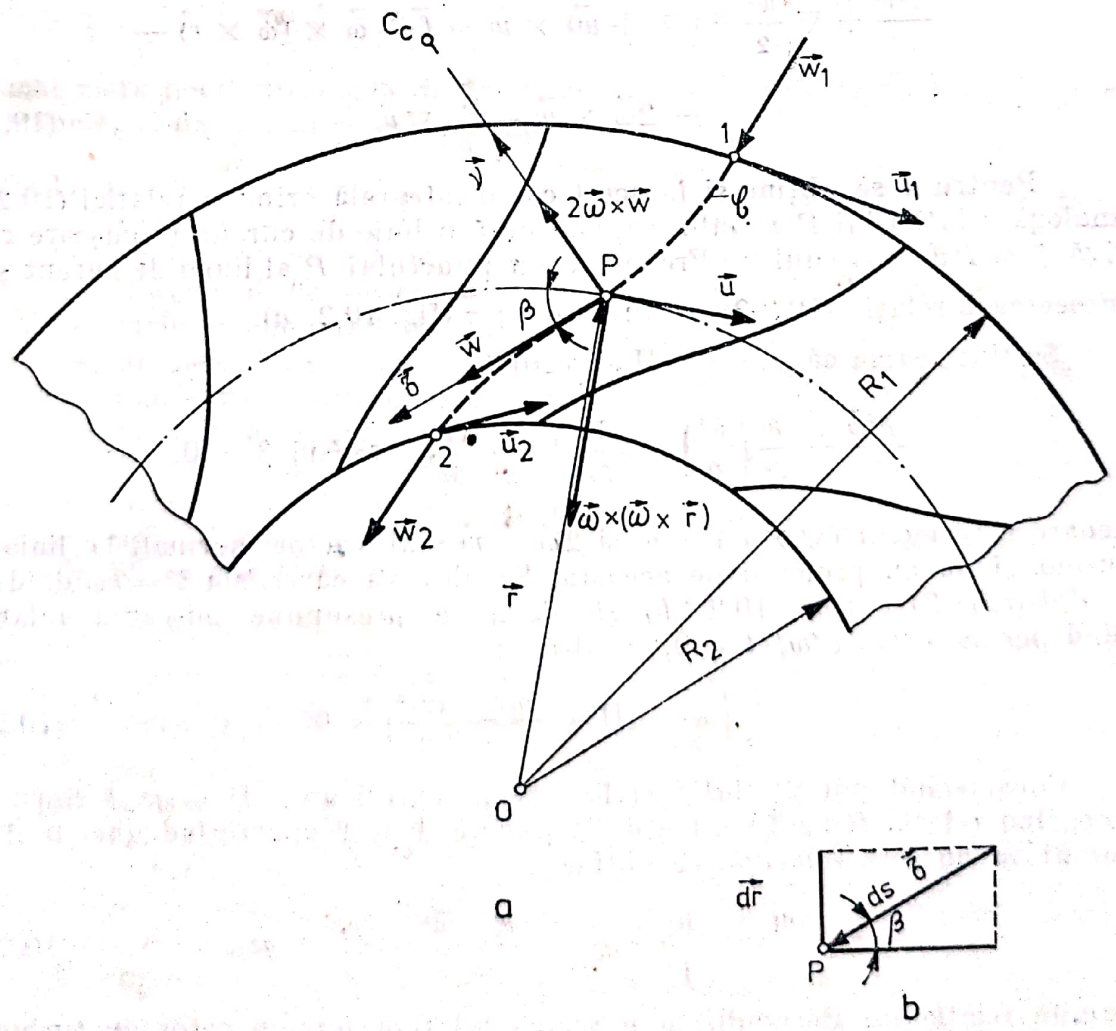


Fig. 10.2.

În cazul mișcării relative, considerînd apa un fluid ideal, se obține ecuația de mișcare

$$\frac{d^*\vec{w}}{dt} = \vec{f}^* - \frac{1}{\rho}\nabla p, \qquad (10.2.1)$$

analogă celei din mișcarea absolută, în care $d^*\vec{w}/dt$ este derivata totală a cîmpului vitezei relative $\vec{w}(\vec{r}, t)$ față de reperul neinerțial, iar $\vec{f}^*$ este cîmpul forțelor masice unitare compus din cîmpul forțelor exterioare și cîmpul forțelor complementare de inerție rezultat din raportarea mișcării la un reper neinerțial, adică

$$\vec{f}^* = \vec{f} + \vec{f}_{tr} + \vec{f}_c = \vec{f} - \vec{a}_{tr} - \vec{a}_c,$$

unde $\vec{f}_{tr} = -\vec{a}_{tr}$ este forța complementară de inerție datorită accelerației de transport, iar $\vec{f}_c = -\vec{a}_c$ este forța complementară de inerție datorită accelerației Coriolis. Deci se poate scrie

$$\vec{f}^* = \vec{f} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{w},$$

unde s-a considerat turația turbinei constantă $\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{const.}}$

Cu aceasta, ecuația de mișcare (10.1.1) devine

$$\frac{\partial^*\vec{w}}{\partial t} + \nabla\frac{w^2}{2} + (\nabla + \vec{w}) \times \vec{w} = \vec{f} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) -$$

$$- 2\vec{\omega} \times \vec{w} - \frac{1}{\rho}\nabla p. \qquad (10.2.2)$$

Pentru a se obține și în acest caz o integrală primă a relației (10.2.2), analogă relației lui Bernoulli, se consideră o linie de curent în mișcare relativă $\mathcal{C}$ și $P\tau\nu\beta$, triedul lui Frenet atașat punctului P al liniei de curent și se proiectează relația (10.2.2) pe direcția lui $\vec{\tau}$ (fig. 10.2, *a*).

Se ține seama că $\vec{f} = -\nabla\Pi$ și rezultă

$$\frac{\partial^*\vec{w}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{w^2}{2}\right) + \frac{\partial\Pi}{\partial s} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - r\omega^2\sin\beta = 0,$$

deoarece termenii $(\nabla \times \vec{w}) \times \vec{w}$ și $2\vec{\omega} \times \vec{w}$ sînt vectori normali la linia de curent și nu au proiecții pe aceasta. Se observă că $r\omega^2\sin\beta = r\omega^2 dr/ds = d/ds(\omega^2r^2/2)$ — (fig. 10.2, *b*) și, dacă se presupune mișcarea relativă fiind permanentă, $\partial^*w/\partial t = 0$, rezultă

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{w^2}{2} + \Pi + \frac{p}{\rho} - \frac{\omega^2r^2}{2}\right) = 0. \qquad (10.2.3)$$

Considerînd potențialul forțelor masice exterioare, $\Pi = gz + \text{const.}$ și integrînd relația (10.2.3.) între două puncte *1* și *2* aparținînd unei linii de curent în mișcare relativă, se obține

$$\frac{w_1^2 - u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{w_2^2 - u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2, \qquad (10.2.4)$$

numită relația lui Bernoulli în mișcarea relativă într-un rotor de turbină. Această relație arată că energia specifică, raportată la reperul mobil, $e^* =$

$= \frac{w^2 - u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz$, este constantă în toate punctele unei linii de curent în mişcare relativă în rotorul turbinei.

Pentru determinarea presiunii la ieşirea din rotor, se consideră linia de curent în mişcare relativă, între punctele *1* la intrarea în rotor şi punctul *2* care constituie axa canalului rotoric la ieşirea din rotor. Pentru această linie de curent, se scrie relaţia lui Bernoulli în mişcare relativă (10.2.4)

$$(w_1^2 - u_1^2)/2 + p_1/\rho + gz_1 = (w_2^2 - u_2^2)/2 + p_2/\rho + gz_2.$$

În această relaţie, se consideră că $z_1 \cong z_2$ şi rezultă

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}[(w_1^2 - u_1^2) - (w_2^2 - u_2^2)];$$

folosind rezultatele problemei 10.1, se obţine

$$w_1 = \sqrt{v_{1m}^2 + (u_1 - \bar{v}_{10})^2} = \sqrt{7{,}98^2 + (54{,}95 - 54{,}45)^2} = 8 \text{ m/s},$$

$$w_2 = \sqrt{v_{2m}^2 + u_2^2} = \sqrt{7{,}99^2 + 29{,}16^2} = 30{,}23 \text{ m/s}.$$

Cu aceasta, rezultă

$$p_2 = 1{,}478 \cdot 10^6 + \frac{1\,000}{2}[(8^2 - 54{,}95^2) - (30{,}23^2 - 29{,}16^2)]$$

$$p_2 = -31 \text{ kPa},$$

mai mare decît presiunea de vaporizare $p_v = -76$ kPa, deci nu se produce fenomenul de cavitaţie în turbină.

Problema 10.3. O pompă centrifugă (fig. 10.3, *a*) cu arborele orizontal are următoarele caracteristici :

— diametrul de intrare în rotor $D_1 = 90$ mm ;
— diametrul de ieşire din rotor $D_2 = 240$ mm ;
— lăţimea canalului la ieşirea din rotor $b_2 = 22$ mm ;
— diametrul de ieşire din aparatul director paletat $D_3 = 360$ mm ;
— diametrul secţiunii de ieşire din camera spirală $D_4 = 180$ mm ;
— randamentul hidraulic $\eta_h = 0{,}85$;
— sarcina netă $H = 70$ m ;
— turaţia $n = 2\,870$ rot/min ;
— debitul pompat $Q = 30$ l/s.

1) Să se determine :

a) viteza $\vec{v}_1$ la intrarea în rotor ;

b) unghiul între $\vec{v}_2$ şi $\vec{u}_2$ la ieşirea din rotor (unghiul α_2) ;

c) viteza absolută $\vec{v}_2$ la ieşirea din rotor ;

d) unghiul β_2 al palei la ieşirea din rotor [între $\vec{u}_2$ şi $-\vec{w}_2$)].

2) În aparatul director (difuzor), palele sînt dispuse astfel încît traiectoriile sînt spirale logaritmice cu ecuaţia $r = r_0 e^{a\theta}$. Să se determine :

a) unghiul α_2 al palelor difuzorului la intrare, considerînd un minim al pierderilor de energie şi că diametrul de intrare în difuzor este egal cu cel de ieşire din rotor ;

b) unghiul α_3 al palelor la ieşirea din aparatul director :

c) viteza $\vec{v}_3$ la ieşirea din aparatul director ;

d) viteza $\vec{v}_4$ la ieşirea din camera spirală.

Scanned with OKEN Scanner

3) Pierderile de sarcină se pot scrie : în conducta de aspirație $h_{r0,1} = 0{,}43\ v_1^2/2g$; în rotor $h_{r1,2} = 0{,}07\ H$; în difuzor $h_{r2,3} = 0{,}35\ \frac{v_2^2 - v_3^2}{2g}$ și în camera spirală $h_{r3,4} = 0{,}165\ v_3^2/2g$. Originea cotelor se consideră suprafața liberă a apei în bazinul de aspirație. Să se determina presiunea și sarcina, în metri, în următoarele puncte :

a) la intrarea în rotor ; b) la ieșirea din rotor ; c) la ieșirea din aparatul director ; d) la ieșirea din camera spirală.

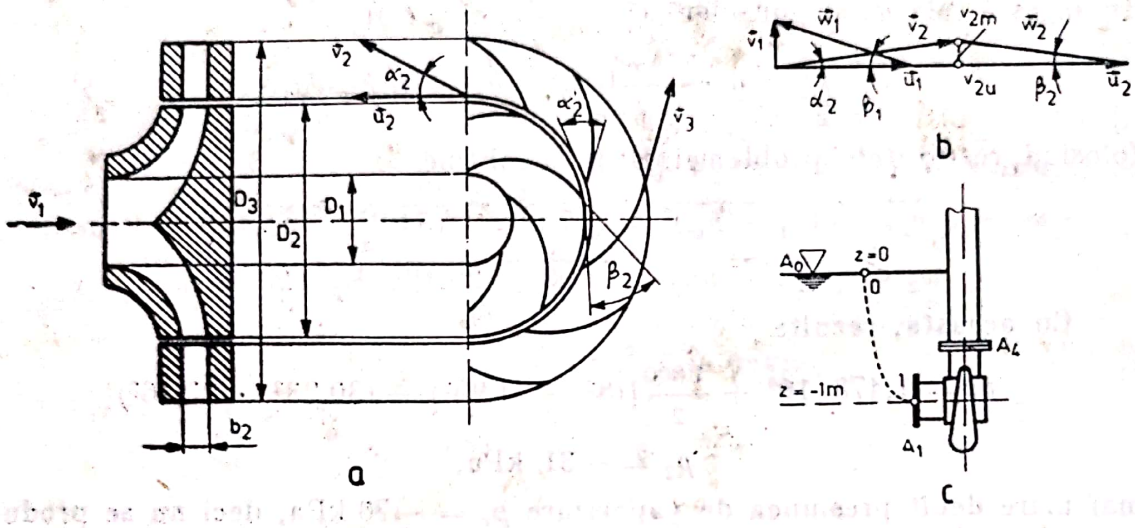


Fig. 10.3.

Rezolvare : 1) Calculul rotorului

a) Viteza $\vec{v}_1$ la intrarea în rotor se poate calcula din ecuația continuității

$$Q = \frac{\pi D_1^2}{4}\, v_1,$$

de unde $$v_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}03}{\pi \cdot 0{,}09^2} = 4{,}72 \text{ m/s},$$

deoarece s-a presupus intrarea ortogonală $\bar{v}_{1\theta} = 0$, deci $v_1 = v_{1m}$.

b) Pentru determinarea elementelor triunghiurilor de viteze, se ține seama de ecuația fundamentală, scrisă în cazul pompelor

$$H_t = \frac{1}{g}\,(v_{2\theta} u_2 - v_{1\theta} u_1),$$

în care $H_t = H/\eta_h$. Pentru regimul de calcul, intrarea apei în rotor este ortogonală ($v_{1\theta} = 0$) și rezultă

$$H = \frac{\eta_h}{g}\, u_2 v_{2\theta},$$

de unde $$v_{2\theta} = \frac{gH}{\eta_h u_2}.$$

Viteza de transport la intrare este $u_1 = \frac{\pi D_1 n}{60} = 13{,}52$ m/s, iar la ieșire este $u_2 = \frac{\pi D_2 n}{60} = 36{,}00$ m/s. Cu aceasta rezultă

$$v_{2\theta} = \frac{gH}{\eta_h u_2} = \frac{9{,}81 \cdot 70}{0{,}85 \cdot 36} = 22{,}44 \text{ m/s}.$$

Componenta meridiană la ieşirea din rotor se obţine din ecuaţia continuităţii

$$v_{2m} = \frac{Q}{\pi D_2 b_2} = \frac{0{,}03}{\pi \cdot 0{,}24 \cdot 0{,}022} = 1{,}81 \text{ m/s}.$$

Cu aceasta rezultă $\operatorname{tg} \alpha_2 = v_{2m}/v_{20} = 1{,}81/22{,}44 = 0{,}081$,

iar $\alpha_2 = \text{Arc tg } 0{,}081 = 4{,}61°$.

c) Viteza absolută la ieşire este

$$v_2 = \sqrt{v_{2m}^2 + v_{20}^2} = \sqrt{1{,}81^2 + 22{,}44^2} = 22{,}51 \text{ m/s}.$$

d) Unghiul β_2 al palei la ieşire este

$$\operatorname{tg} \beta_2 = v_{2m}/(u_2 - v_{20}) = 1{,}81/(36 - 22{,}44) = 0{,}133,$$

iar

$$\beta_2 = \text{Arc tg } (0{,}133) = 7{,}60°.$$

Similar, la intrare, $\operatorname{tg} \beta_1 = v_{1m}/u_1 = v_1/u_1 = 4{,}72/13{,}52 = 0{,}349$;

$$\beta_1 = \text{Arc tg } (0{,}349) = 19{,}24°.$$

Triunghiurile vitezelor la intrarea în rotor şi la ieşirea din rotor sînt prezentate în figura 10,4, *b*.

2) Studiul aparatului director

a) Deoarece se cere o intrare în aparatul director fără şoc (fără pierdere de sarcină) şi se presupune că diametrul de intrare este egal cu cel de la ieşirea din rotor, cele două unghiuri trebuie să fie egale, deci

$$\alpha_2' = \alpha_2 = 4{,}61°.$$

b) Deoarece palele aparatului director sînt spirale logaritmice, unghiul acestora cu cercurile concentrice cu rotorul este constant, astfel încît

$$\alpha_3 = \alpha_2' = \alpha_2 = 4{,}61°.$$

c) La ieşirea din aparatul director, viteza $\vec{v}_3$ are componenta meridiană

$$v_{3m} = \frac{Q}{\pi D_3 b_2} = \frac{0{,}03}{\pi \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}022} = 1{,}21 \text{ m/s},$$

iar, din triunghiul vitezelor, rezultă viteza absolută

$$v_3 = v_{3m}/\sin \alpha_3 = 1{,}21/\sin 4{,}61° = 15{,}05 \text{ m/s}.$$

d) La ieşirea din camera spirală, viteza $\vec{v}_4$ se obţine din ecuaţia continuităţii

$$v_4 = \frac{4Q}{\pi D_4^2} = \frac{4 \cdot 0{,}03}{\pi \cdot 0{,}18^2} = 1{,}18 \text{ m/s}.$$

3) Studiul presiunii şi sarcinii în pompă

a) Se aplică relaţia lui Bernoulli (fig. 10.4, *c*) între suprafaţa liberă din bazinul de aspiraţie (cu aria A_0) şi intrarea în pompă (cu aria A_1) şi rezultă

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} + z_0 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 + h_{r0.1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci sarcina barometrică în punctul *1*, considerînd suprafața liberă din bazinul de aspirație ca nivel de referință, este

$$H_1 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{p_{at}}{\rho g} - h_{r0\,1},$$

deoarece $v_0 \cong 0$ și $p_0 = p_{at}$. Sarcina manometrică în *1* este

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1 - p_{at}}{\rho g} + z_1 = -h_{r0.1} = -0{,}43\ \frac{v_1^2}{2g},$$

adică $$h_1 = -0{,}43\ \frac{v_1^2}{2g} = -0{,}43\ \frac{4{,}72^2}{2 \cdot 9{,}81} = -0{,}49 \text{ m}.$$

Presiunea în punctul *1* rezultă

$$p_{r1} = \frac{p_1 - p_{at}}{\rho g} = z_0 - z_1 - \frac{v_1^2}{2g} - h_{r0.1} = z_0 - z_1 - \frac{v_1^2}{2g}\,(1 + 0{,}43)$$

$$p_{r1} = \frac{p_1 - p_{at}}{\rho g} = 1 - \frac{4{,}72^2}{2 \cdot 9{,}81}\,(1 + 0{,}43) = -0{,}62 \text{ m}.$$

b) La ieșirea din rotor

$$h_2 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2 - p_{at}}{\rho g} + z_2 = h_1 + H_t - h_{r1.2}$$

$$h_2 = h_1 + H/\eta - 0{,}07 \cdot H = -0{,}49 + 70/0{,}85 - 0{,}07 \cdot 70 = 77{,}0 \text{ m},$$

respectiv $$\frac{p_{r2}}{\rho g} = \frac{p_2 - p_{at}}{\rho g} = h_2 - \frac{v_2^2}{2g} - z_2 = 77{,}0 - \frac{22{,}51^2}{2 \cdot 9{,}81} - (-1) = 52{,}17 \text{ m}.$$

c) La ieșirea din difuzor

Se aplică relația lui Bernoulli între punctul *2'* la intrarea în difuzor și punctul *3* la ieșirea din difuzor (se consideră că sarcina absolută în punctul *2'* este aceeași cu cea din punctul *2*, la ieșirea din rotor, deoarece pierderile sînt nule între cele două puncte)

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = \frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g} + z_3 + h_{r2.3},$$

de unde $$h_3 = \frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_3 - p_{at}}{\rho g} + z_3 = h_2 - h_{r2.3},$$

deci $$h_3 = h_2 - 0{,}35\ \frac{v_2^2 - v_3^2}{2g} = 77{,}0 - 0{,}35\ \frac{22{,}51^2 - 15{,}05^2}{2 \cdot 9{,}81} = 72{,}00 \text{ m},$$

respectiv $$\frac{p_{r3}}{\rho g} = \frac{p_3 - p_{at}}{\rho g} = h_3 - \frac{v_3^2}{2g} - z_3 = 72{,}00 - \frac{15{,}05^2}{2 \cdot 9{,}81} + 1 = 61{,}45 \text{ m}.$$

d) La ieșirea din camera spirală.

Se procedează similar

$$h_4 = \frac{v_4^2}{2g} + \frac{p_4}{\rho g} + z_1 = h_3 - h_{r3.4},$$

sau $$h_4 = h_3 - 0{,}165\ \frac{v_3^2}{2g} = 72{,}00 - 0{,}165\ \frac{15{,}05^2}{2 \cdot 9{,}81} = 70{,}10 \text{ m},$$

respectiv $$\frac{p_{r4}}{\rho g} = \frac{p_4 - p_{at}}{\rho g} = h_4 - \frac{v_4^2}{2g} - z_4 = 70{,}10 - \frac{1{,}18^2}{2 \cdot 9{,}81} + 1 = 70{,}93 \text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Problema 10.4. O morișcă Segner, figura 10.4, *a*, funcționează la suprapresiunea constantă de alimentare $p_a = 0{,}1$ MPa. Să se determine randamentul maxim de funcționare al mașinii, dacă se neglijează pierderile prin frecare în lagăre și, presupunînd că morișca funcționează la randamentul maxim, să se calculeze turația aparatului și debitul prin cele două conducte presupuse identice. Se cunosc : diametrul $d = 5$ mm, raza $r = 20$ mm, coeficientul de pierdere de sarcină locală la ieșirea jetului $\zeta_1 = 0{,}1$, coeficientul de pierdere de sarcină locală în cot, care se calculează după formula $\zeta_c = 0{,}95 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2{,}05 \sin^4 \frac{\alpha}{2}$, și $\rho_a = 1\,000$ kg/m³.

Rezolvare : Cuplul produs de curgerea lichidului este calculat cu relația (10.1.4)

$$M = \rho Q(r_1 v_{10} - r_2 v_{20}). \qquad (10.4.1)$$

Din triunghiul de viteze, figura 10.4, *b*, rezultă :

$$r_2 = r\ ;\ v_{20} = v_0 = u - w \cos \beta.$$

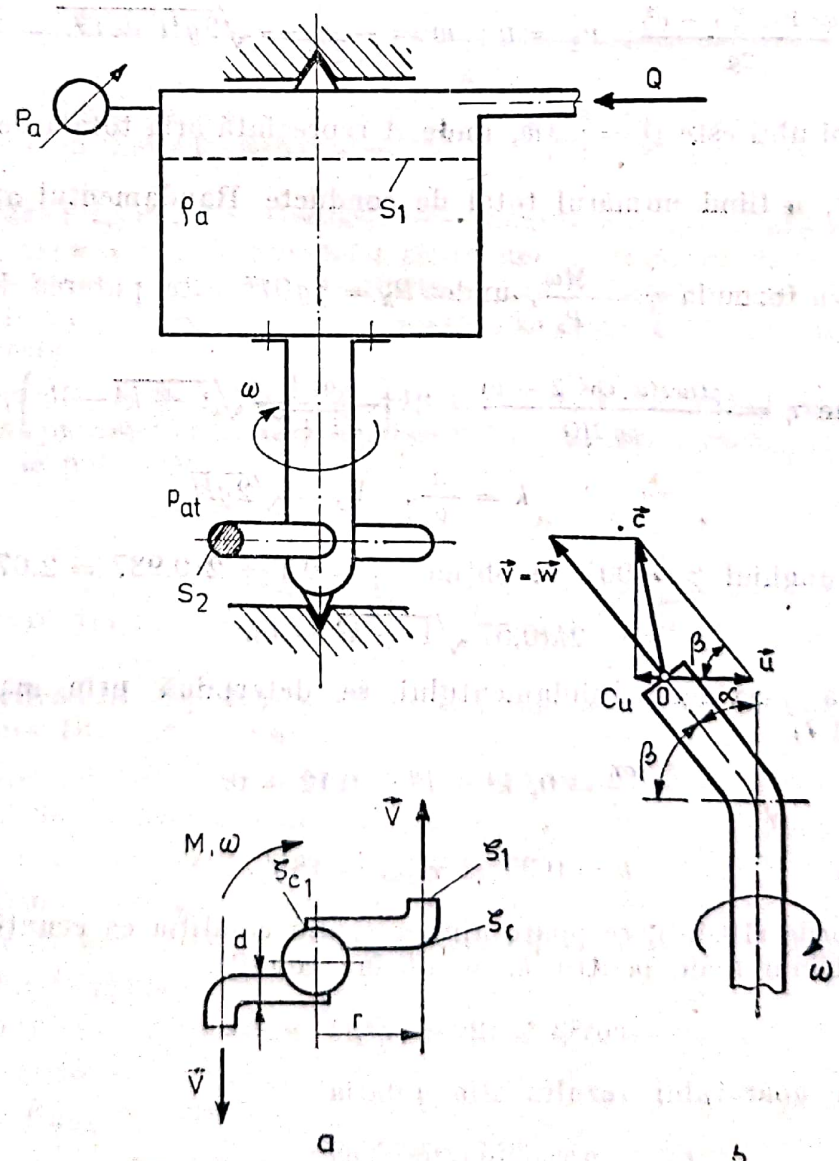


Fig. 10.4.

Neglijînd viteza la suprafața S_1, $v_1 \cong 0$, rezultă :

$$M = \rho Q r(w\cos\beta - u). \tag{10.4.2}$$

Pentru determinarea vitezei $\vec{w}$ în conductă, se aplică relația lui Bernoulli (10.2.4) între S_1 și S_2, pentru mișcarea relativă permanentă.

$$(w_1^2 - u_1^2)/2 + p_1/\rho + gz_1 = (w_2^2 - u_2^2)/2 + p_2/\rho + gz_2 + gh_{r1,2}. \tag{10.4.3}$$

Avînd în vedere traseul scurt parcurs de fluid, pierderea de sarcină are forma

$$h_{r1,2} = (\zeta_1 + \zeta_{c1} + \zeta_c)\frac{w^2}{2g} = \zeta_t \frac{w^2}{2g}, \tag{10.4.4}$$

unde ζ_1 este coeficientul de pierderi la ieșirea jetului în atmosferă, ζ_{c1} — coeficientul de pierderi în cotul cu $\alpha = 90°$, ζ_c — coeficientul de pierderi în cot, $\zeta_c = \zeta_c(\beta)$.

Din (10.4.3), rezultă :

$$H = \frac{p_a}{\rho g} = \frac{w^2(1+\zeta_t) - u^2}{2g}, \quad u_2 = u\,; \quad w = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta_t}}\sqrt{2gH + u^2}. \tag{10.4.5}$$

Expresia debitului este $Q = \mu A w$, unde A reprezintă aria totală de curgere, $A = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi d_k^2}{4}$, n fiind numărul total de conducte. Randamentul aparatului se definește cu formula $\eta = \frac{M\omega}{P_h}$, unde $P_h = \rho g Q H$ este puterea hidraulică disponibilă.

Se obține $\eta = \frac{\rho Q w r(w\cos\beta - u)}{\rho g HQ} = 2k\left(\frac{\cos\beta}{\sqrt{1+\zeta_t}}\sqrt{1+k^2} - k\right)$, (10.4.6)

unde $$k = \frac{u}{V_0}, \quad V_0 = \sqrt{2gH}.$$

Pentru unghiul $\beta = 90°$. se obține $\zeta_t = 0{,}1 + 2\cdot 0{,}987 = 2{,}075$,

deci $$\eta = 2k(0{,}57\sqrt{1+k^2} - k). \tag{10.4.7}$$

Valoarea maximă a randamentului se determină prin maximizarea relației (10.4.7)

$$\frac{\partial\eta}{\partial k} = 0, \quad k^4 + k^2 - 0{,}12 = 0.$$

Rezultă $$k = 0{,}33 \text{ și } \eta_{max} = 18\%. \tag{10.4.8}$$

La valorile (10.4.8), se poate ajunge și din condiția ca ecuația (10.4.6) să aibă rădăcini reale pentru k. Se obține condiția

$$\cos^2\beta \geqslant (2\eta - \eta^2)(1 + \zeta_t). \tag{10.4.9}$$

Turația aparatului rezultă din relația

$$\omega = \frac{kV_0}{r} = \frac{0{,}33\sqrt{2\cdot 0{,}1\cdot 10^6/1\,000}}{0{,}02} = 233{,}3 \text{ s}^{-1},$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde $n = 2\,228$ rot/min.

Debitul are valoarea

$$Q = \mu A w = \frac{0{,}6 \cdot 2\pi 0{,}005^2}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 2{,}075}} \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 10^6}{1\,000} + (0{,}02 \cdot 233{,}3)^2};$$

$$Q = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 0{,}72 \text{ m}^3/\text{h}.$$

Problema 10.5. O pompă centrifugă cu turația $n = 1\,450$ rot/min a fost încercată cu apă și are următoarele caracteristici :

Q/Q_n [—]	0,6	0,8	1	1,2
Q [m³/h]	60	80	100	120
H [m]	27,5	26,5	25	21
η [%]	70	78	80	72
P [kW]	6,42	7,41	8,52	9,54

Să se determine caracteristicile pompei în cazul în care aceasta funcționează cu un ulei cu viscozitatea 15° E și densitatea $\rho = 920$ kg/m³.

Rezolvare : În cazul vehiculării unor lichide cu viscozitate mai mare decît a apei, caracteristicile pompelor centrifuge se modifică în funcție de viscozitatea lichidului vehiculat. Datorită creșterii forțelor de viscozitate, cresc pierderile de sarcină, debitul și presiunea se micșorează, iar puterea consumată se mărește.

Dacă Q, H și η sînt parametrii pompei funcționînd cu apă, iar Q_v, H_v și η_v sînt parametrii pompei funcționînd cu un lichid vîscos, la aceeași turație, aceștia se pot scrie :

$$Q_v = K_Q Q \; ; \; H_v = K_H H \text{ și } \eta_v = K_\eta \eta, \qquad (10.5.1)$$

în care K_Q K_H și K_η sînt coeficienți de trecere, care depind de regimurile de mișcare din pompă în cele două cazuri, caracterizate prin numerele Reynolds.

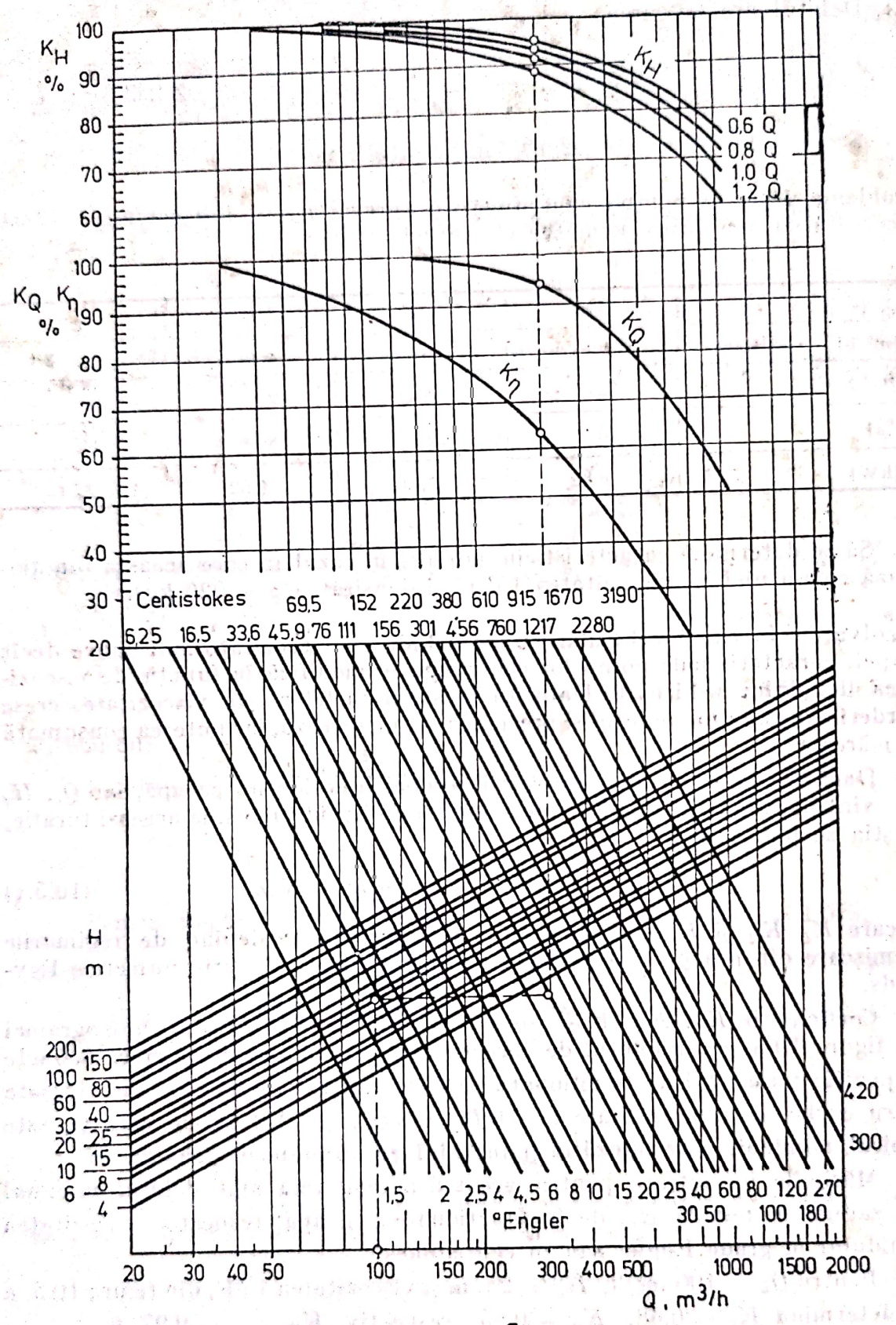
Coeficienții K_Q, K_H și K_η se pot determina cu ajutorul nomogramei din figura 10.5, *a**. Factorul de corecție K_H pentru sarcina pompei depinde de poziția punctului de funcționare pe caracteristica pompei, fiind trasate patru curbe, corespunzătoare la 0,6 Q_n, 0,8 Q_n, Q_n, 1,2 Q_n, în care Q_n este debitul nominal, corespunzător punctului cu randament maxim.

Mărimile de intrare pentru această nomogramă sînt debitul nominal Q_n, sarcina nominală H_n, de la funcționarea cu apă, respectiv viscozitatea lichidului în grade Engler sau în centistokes.

Pentru $Q_n = 100$ m³/h, $H_n = 25$ m și viscozitatea 15°E, din figura 10.5, *a* se determină $K_\eta = 0{,}68$, $K_Q = 0{,}95$, respectiv $K_{H0.6\,Q_n} = 0{,}97$, $K_{H0.8\,Q_n} = 0{,}95$, $K_{HQ_n} = 7{,}92$, $K_{H1.2\,Q_n} = 0{,}9$.

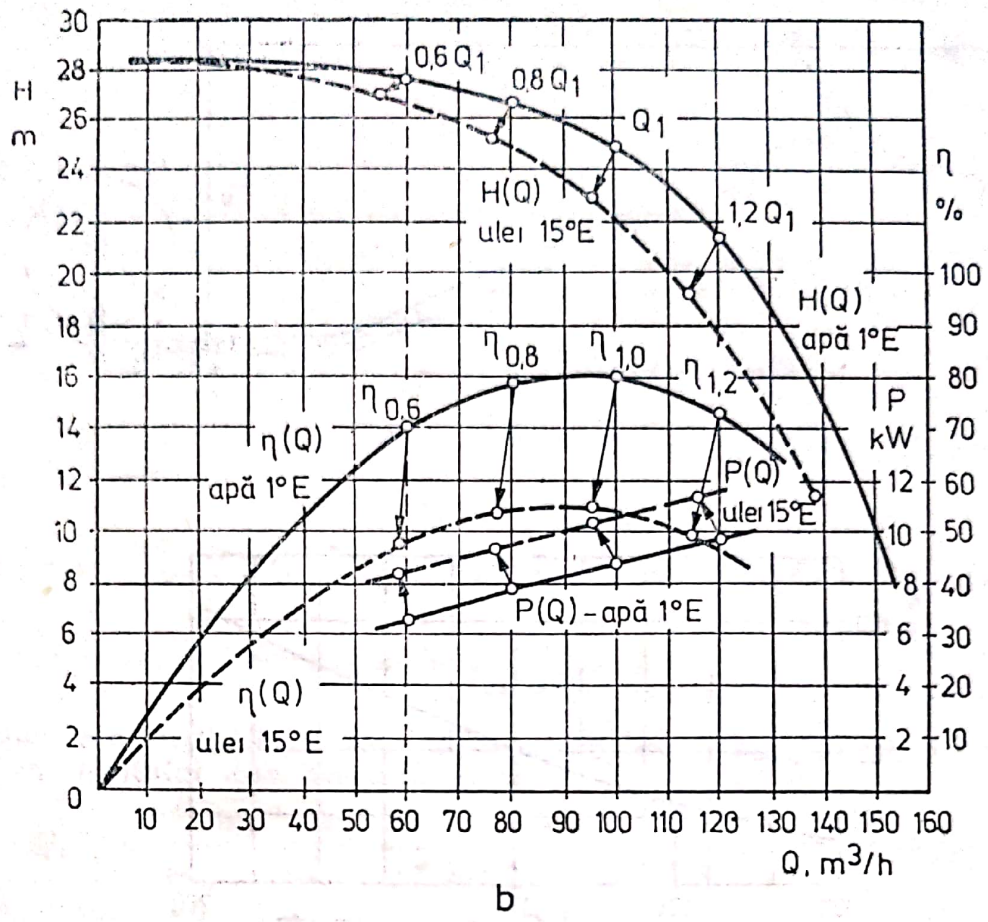
* KSB-AMAG. Handbuch. Band I, 2. Auflage, 1959.

Scanned with OKEN Scanner


K_H %
100
90
80
70
60
K_H
0,6 Q
0,8 Q
1,0 Q
1,2 Q
K_Q K_η %
100
90
80
70
60
50
40
30
20
K_Q
K_η
Centistokes
69,5 152 220 380 610 915 1670 3190
6,25 16,5 33,6 45,9 76 111 156 301 456 760 1217 2280
H m
200
150
100
80
60
40
30
25
20
15
10
8
6
4
420
300
1,5 2 2,5 4 4,5 6 8 10 15 20 25 40 60 80 120 270
°Engler
30 50 100 180
20 30 40 50 100 150 200 300 400 500 1000 1500 2000
Q, m³/h

a

Fig. 10.5, *a*



b

Fig. 10.5, *b*

Cu aceste date se recalculează caracteristicile pompei :

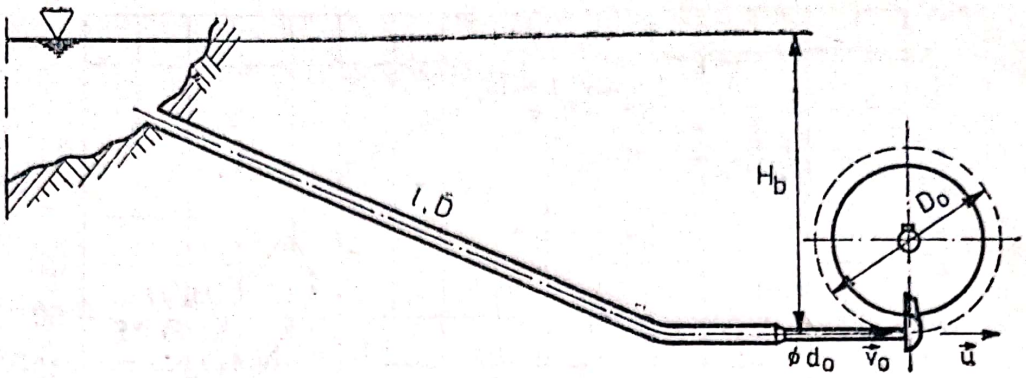
Q_v [m³/h]	57	76	95	114
H_v [m]	26,6	25	23	19
η_v [%]	47	53	54	49
P_v [kW]	8,1	9,0	10,1	11,1

Curbele caracteristice, atît pentru funcţionarea cu apă, cît şi pentru funcţionarea cu ulei, sînt trasate în figura 10.5, *b*.

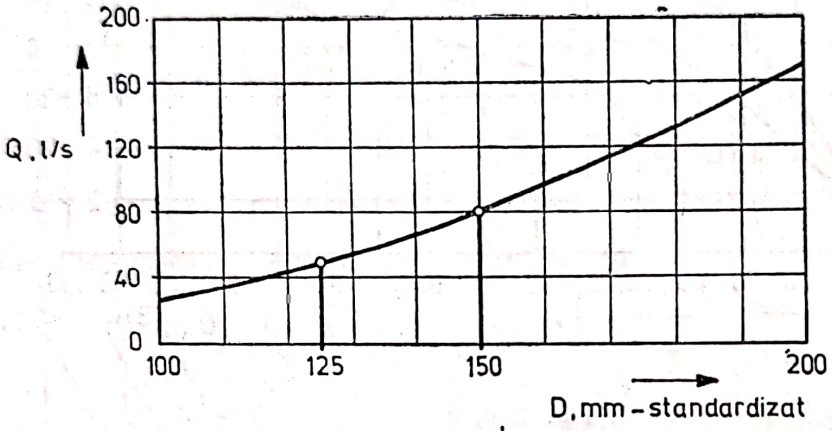
Problema 10.6. Se urmăreşte producerea unei puteri electrice $P_E = 100$ kW la o cădere $H = 200$ m, cu o turbină Pelton avînd un rotor şi un injector. Turaţia sincronă a alternatorului este $n = 750$ rot/min şi randamentul său este $\eta_g = 0{,}92$. Randamentul hidraulic al turbinei este $\eta_h = 0{,}94$, iar randamentul mecanic este $\eta_m = 0{,}95$. Conducta forţată are lungimea $l = 300$ m, este din fontă şi are rugozitatea $k = 1$ mm, pentru care coeficientul lui Darcy se calculează cu relaţia $\lambda = (2\lg(D/k) + 1{,}14)^{-2}$, propusă de Nikuradse şi Prand.

1) Să se arate că debitul necesar este superior unei valori minime şi să se determine această valoare.

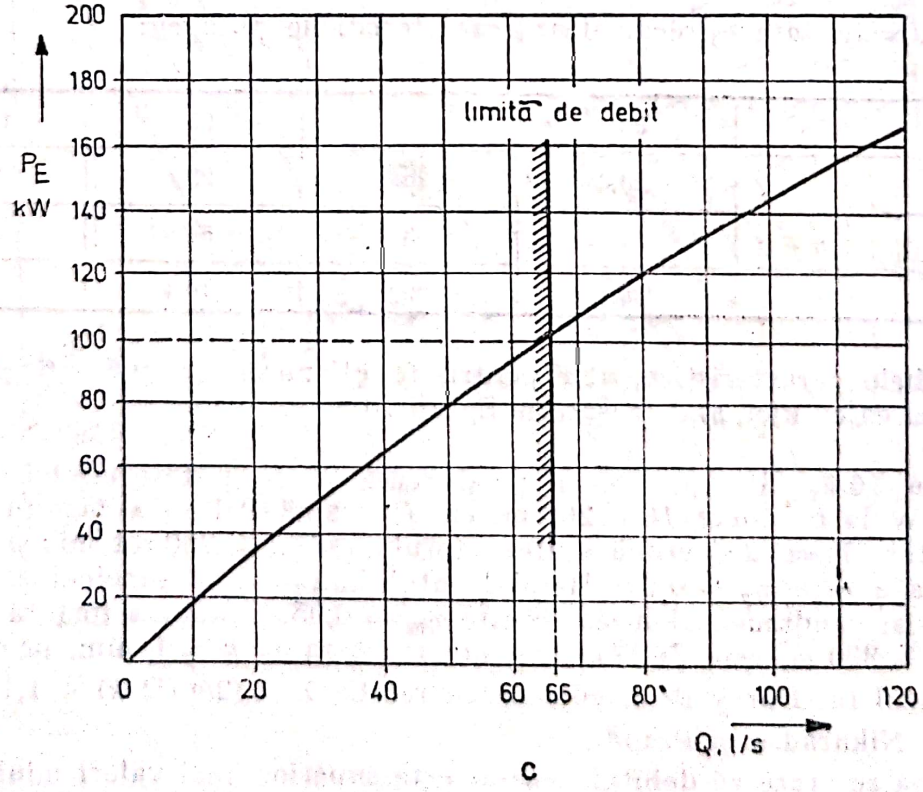
Scanned with OKEN Scanner


l, δ
H_b
D_o
ϕd_o
$\vec{v}_o$
$\vec{u}$

a


Q, l/s
200
160
120
80
40
0
100
125
150
200
D, mm – standardizat

b


P_E
kW
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
limită de debit
0
20
40
60
66
80
100
120
Q, l/s

c

Fig. 10.6.

2) Să se determine variaţia puterii produse în funcţie de debit, pentru un diametru dat al conductei. Care este raportul h_r/H, între pierderile de sarcină şi căderea brută, pentru care puterea obţinută este maximă ?

3) Să se determine astfel debitul optim turbinat.

4) Să se aleagă diametrul conductei forţate din următoarele valori standardizate : 100 mm, 125 mm ; 150 mm şi 200 mm.

5) Să se traseze curba puterii electrice produse în funcţie de debitul turbinat admiţînd diversele randamente constante. Să se determine diametrul d_0 al jetului.

6) Să se determine diametrul D_0 şi rapiditatea turbinei.

Rezolvare : 1) Debitul Q turbinat la căderea netă $H_n = H_b - h_r$ produce o putere electrică

$$P_E = \rho g Q H_n \eta,$$

în care $\eta = \eta_g \eta_h \eta_m$ este randamentul global al amenajării, deci se poate scrie

$$Q = \frac{P_E}{\rho g \eta_g \eta_h \eta_m (H_b - h_r)}.$$

Deoarece pierderile de sarcină în conductele amenajării nu pot fi nule, valoarea debitului este limitată inferior de valoarea Q_{min}

$$Q_{min} = \frac{P_E}{\rho g \eta_g \eta_h \eta_m H_b} = \frac{100 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}94 \cdot 0{,}95 \cdot 200} = 0{,}062 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Deci debitul turbinat va fi $Q > 62$ l/s.

2) Puterea electrică produsă este

$$P_E = \rho g \eta_g \eta_h \eta_m Q (H_g - h_r),$$

în care $h_r = 0{,}0826 \frac{Q^2}{D^5} \lambda l$, considerînd conducta de alimentare ca o conductă lungă şi neglijînd pierderile locale de sarcină. Cu aceasta rezultă

$$P_E = \rho g \eta_g \eta_h \eta_m Q \left(H_b - 0{,}0826 \frac{\lambda l}{D^5} Q^2 \right).$$

S-a presupus mişcarea în conductă în zona pătratică şi deci $\lambda = \lambda(k/D)$ nu depinde de numărul lui Reynolds şi nici de debit.

Deci puterea electrică produsă se poate scrie

$$P_E = AQ - BQ^3,$$

în care s-a notat $A = \rho g \eta_g \eta_h \eta_m H_b$, respectiv $B = 0{,}0826\, \rho g \eta_g \eta_h \eta_m \lambda l / D^5$. Variaţia puterii electrice cu debitul este dată de o parabolă de gradul trei.

Pentru determinarea maximului acestei variaţii, se consideră

$$dP/dQ = A - 3BQ^2 = 0,$$

de unde rezultă

$$Q_{opt}^2 = \frac{A}{3B} = \frac{H_b}{3 \cdot 0{,}0826 \frac{\lambda l}{D^5}};$$

$$h_{r\,opt} = 0{,}0826 \frac{\lambda l}{D^5} Q_{opt}^2 = \frac{H_b}{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci, pentru o conductă dată, maximul puterii electrice produse se obţine cînd pierderile de sarcină sînt a treia parte din căderea brută.

3) Puterea obţinută prin optimizare este

$$P_E = \rho g \eta_g \eta_h \eta_m Q_{opt}(H_b - h_r) = \frac{2}{3} \rho g \eta_g \eta_h \eta_m Q_{opt} H_b,$$

de unde debitul optim rezultă $Q_{opt} = \dfrac{P_E}{\frac{2}{3} \rho g \eta_h \eta_m \eta_g H_b} =$

$$= \frac{100\,000}{\frac{2}{3} \cdot 9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}94 \cdot 0{,}95 \cdot 200} = 0{,}093 \text{ m}^3/\text{s}.$$

4) Debitul optim determinat mai sus are expresia

$$Q_{opt} = \sqrt{\frac{H_b D^5}{3 \cdot 0{,}0826 \lambda l}} = 2{,}0088 H_b^{1/2} D^{5/2} \lambda^{-1/2} l^{-1/2},$$

iar din relaţia lui Nikuradse şi Prandtl se obţine $\lambda^{-1/2} = 2 \lg \frac{D}{k} + 1{,}14$

şi debitul devine $Q_{opt} = 2{,}0088\, H_b^{1/2} D^{5/2} \left(2 \lg \frac{D}{k} + 1{,}14\right) l^{-1/2},$

respectiv $Q_{opt} = 2{,}0088 \cdot 200^{1/2} [2 \lg (1\,000\, D) + 1{,}14] \cdot 300^{-1/2} D^{5/2},$

sau $Q_{opt} = 1{,}64 \cdot [2 \lg (1\,000\, D) + 1{,}14] \cdot D^{5/2}.$

Debitul necesar 93 l/s va fi obţinut de un diametru care este o soluţie a ecuaţiei

$$Q = 1{,}64[2 \lg (1\,000\, D) + 1{,}14] D^{5/2}.$$

Pentru rezolvare, se construieşte graficul funcţiei $Q(D)$, iar calculul este prezentat în tabelul următor :

D [m]	0,100	0,125	0,150	0,200
g $(1000D)$	2	2,097	2,176	2,301
$2\lg (1000D) + 1{,}14$	5,14	5,334	5,492	5,742
$D^{5/2}$	0,00316	0,00552	0,00871	0,0179
$Q = 1{,}64[2\lg(1000D) + 1{,}14]\, D^{5/2}$	0,0266	0,0483	0,0784	0,1686

Reprezentarea grafică a debitului în funcţie de diametrele standardizate este prezentată în figura 10.6, *b*.

Se observă că este necesar să se adopte un diametru $D = 200$ mm, deoarece cu valori mai mici nu se poate asigura puterea electrică necesară.

5) Pentru valoarea adoptată $D = 200$ mm, puterea electrică obţinută are expresia

$$P_E = \rho g \eta_g \eta_h \eta_m Q \left(H_b - 0{,}0826 \frac{Q^2}{D^5} \lambda l\right).$$

Coeficientul lui Darcy are valoarea

$$\lambda = \frac{1}{(2 \lg (D/k) + 1{,}14)^2} = \frac{1}{(2 \lg 200 + 1{,}14)^2} = 0{,}0303,$$

Scanned with OKEN Scanner

respectiv puterea electrică devine

$$P_E = 8\,060\,Q(200 - 2\,346\,Q^2), \text{ în W.}$$

Calculul puterii în funcție de debit se execută tabelar și este prezentat în tabelul următor:

Q [m³/s]	0,020	0,040	0,060	0,080	0,100	0,120
$h_r = 2\,346Q^2$	0,938	3,754	8,446	15,014	23,460	33,782
$H_n = 200 - h_r$	199,062	196,246	191,554	184,986	176,540	166,218
$8\,060Q$	161,2	322,4	483,6	644,8	806,0	967,2
P_E [kW]	32,09	63,27	92,63	119,28	142,29	160,77

Reprezentarea variației puterii $P_E(Q)$ în funcție de debit este reprezentată în figura 10.6, *c*. Se observă că, obținerea unei puteri $P_E = 100$ kW necesită un debit $Q = 0{,}066$ m³/s.

În acest caz căderea netă este $H_n = H_b - h_r = 200 - 2\,346\,Q^2 = 189{,}78$ m,

iar viteza la ieșirea din injector este

$$v_0 = \sqrt{2gH_n} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 189{,}78} = 61 \text{ m/s.}$$

Ecuația continuității la ieșirea din injector se scrie

$$Q = \frac{\pi d_0^2}{4} \cdot v_0, \text{ de unde rezultă}$$

$$d_0 = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v_0}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}066}{\pi \cdot 61}} = 0{,}037 \text{ m.}$$

6) Dacă $\vec{u}$ reprezintă viteza tangențială a roții, iar $\vec{v}_0$ viteza apei în jet, acesta produce puterea

$$P = \rho Qu(v_0 - u),$$

care este maximă pentru $u = v_0/2$.

Deci $u = \pi D_0 n/60 = 30{,}5$ m/s și, cum turația roții este impusă, rezultă

$$D_0 = \frac{60u}{\pi n} = \frac{60 \cdot 30{,}5}{\pi \cdot 750} = 0{,}776 \text{ m.}$$

Puterea mecanică la arborele acestei turbine este $P = P_E/\eta_v = 100/0{,}92 = 108{,}7$ kW,

iar rapiditatea sa este $n_s = \frac{n}{H}\sqrt{\frac{1{,}36\,P}{\sqrt{H}}} = \frac{750}{200}\sqrt{\frac{1{,}36 \cdot 108{,}7}{\sqrt{200}}} = 12{,}12.$

Problema 10.7. Un ventilator, refulează aerul printr-o cameră de aer, cu volum foarte mare, către o conductă cu lungimea $l = 2$ m și diametrul $D_1 = 200$ mm. La capătul aval al conductei, care debușează în atmosferă, se găsește un ajutaj cu diametrul $D_2 = 175$ mm (fig. 10.7, *a*).

Scanned with OKEN Scanner

Coeficientul lui Darcy pentru conductă este $\lambda = 0{,}02$, iar coeficientul de pierdere locală de sarcină al ajutajului este $\zeta_a = 0{,}06$.

Să se determine suprapresiunea p_c în camera de aer și debitul ventilatorului, dacă caracteristica ce leagă debitul Q de sarcina statică H_{st} în cameră este următoarea:

Q [m³/h]	0	500	1 000	1 500	2 000	2 500
H_{st} [m]	50	47	42	35	26	18

Se va neglija compresibilitatea aerului și se va considera densitatea acestuia $\rho = 1{,}2$ kg/m³.

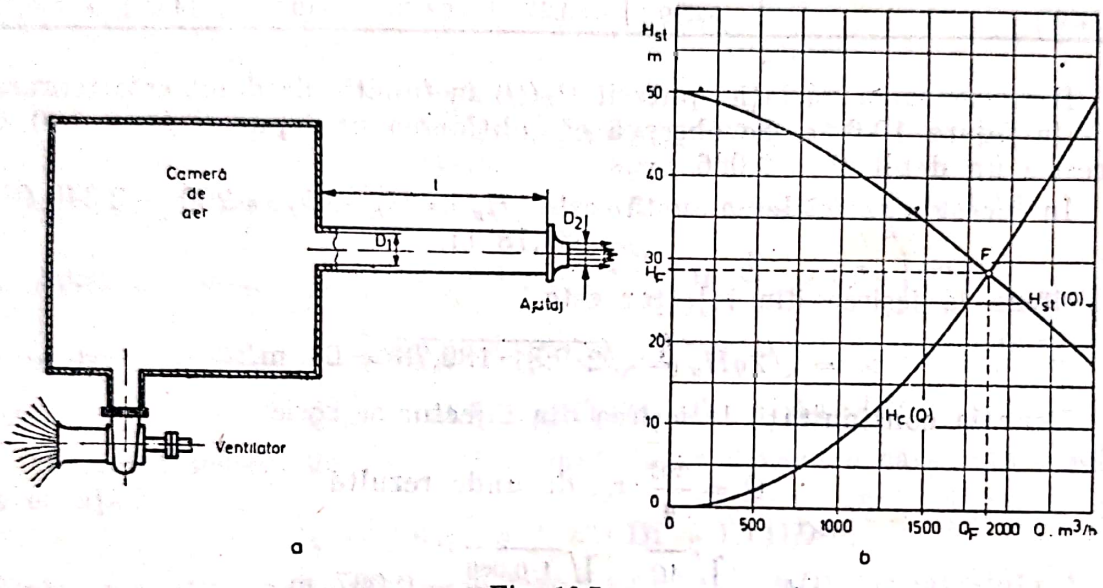


Fig. 10.7.

Rezolvare : Deoarece camera de aer are volum foarte mare, se poate considera ca în această cameră aerul este în repaus și din relația lui Bernoulli scrisă între această cameră și ieșirea din ajutaj rezultă

$$\frac{p_c}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \lambda \frac{l}{D_1} \frac{v_1^2}{2} + \zeta_a \frac{v_2^2}{2},$$

respectiv sarcina statică din cameră este

$$H_c = \frac{p_c}{\rho g} = \lambda \frac{l}{D_1} \frac{v_1^2}{2g} + (1 + \zeta_a) \frac{v_2^2}{2g} = 0{,}0826\, Q^2 \left(\lambda \frac{l}{D_1^5} + \frac{1 + \zeta_a}{D_2^4} \right),$$

adică

$$H_c = 0{,}0826\, Q^2 \left(0{,}02 \frac{2}{0{,}2^5} + \frac{1 + 0{,}06}{0{,}175^4} \right) = 103{,}7\, Q^2. \qquad (10.7.1)$$

Pentru determinarea punctului de funcționare a instalației — punctul în care debitul Q produce o pierdere de sarcină și termen cinetic cît este sarcina statică din camera de aer — se calculează și caracteristica instalației, dată de relația (10.7.1)

Q [m³/h]	0	500	1 000	1 500	2 000	2 500
Q [m³/s]	0	0,139	0,268	0,417	0,555	0,694
$H_c = 103{,}7Q^2$ [m]	0	2	8	18	32	50

Scanned with OKEN Scanner

În figura 10.7, *b*, s-a trasat, atît caracteristica $H_{ct}(Q)$ a ventilatorului, cît și $H_c(Q)$ a instalației, conform celor două tabele.

Punctul de funcționare are coordonatele $Q_F = 1\,875$ m³/h $= 0{,}52$ m³/s, respectiv $H_F = 28{,}5$ m.

Corespunzător acestei sarcini, presiunea în camera de aer este

$$p_c = \rho g H_F = 335{,}5 \text{ Pa}.$$

Problema 10.8. Pentru încercarea unei pompe centrifuge, s-a construit un stand ca în figura 10.8. Conducta de aspirație are diametrul $D_1 = 80$ mm, iar cea de refulare $D_2 = 60$ mm. La încercarea pompei. s-au obținut următoarele rezultate :

— indicația manometrului montat la ieșirea din pompă $p_2 = 125$ kPa ;

— indicația vacuummetrului montat la intrare în pompă $p_1 = 30$ kPa ;

— distanța, măsurată pe verticală între secțiunea de intrare în pompă și cea de ieșire $h = 80$ mm ;

— cota manometrului deasupra secțiunii de ieșire din pompă $a = 120$ mm ;

— debitul pompei $Q = 10$ l/s ;

— momentul cuplului de rotație la arborele pompei $M = 10$ Nm ;

— turația pompei $n = 2\,000$ rot/min.

Se cere să se determine sarcina, puterea și randamentul pompei.

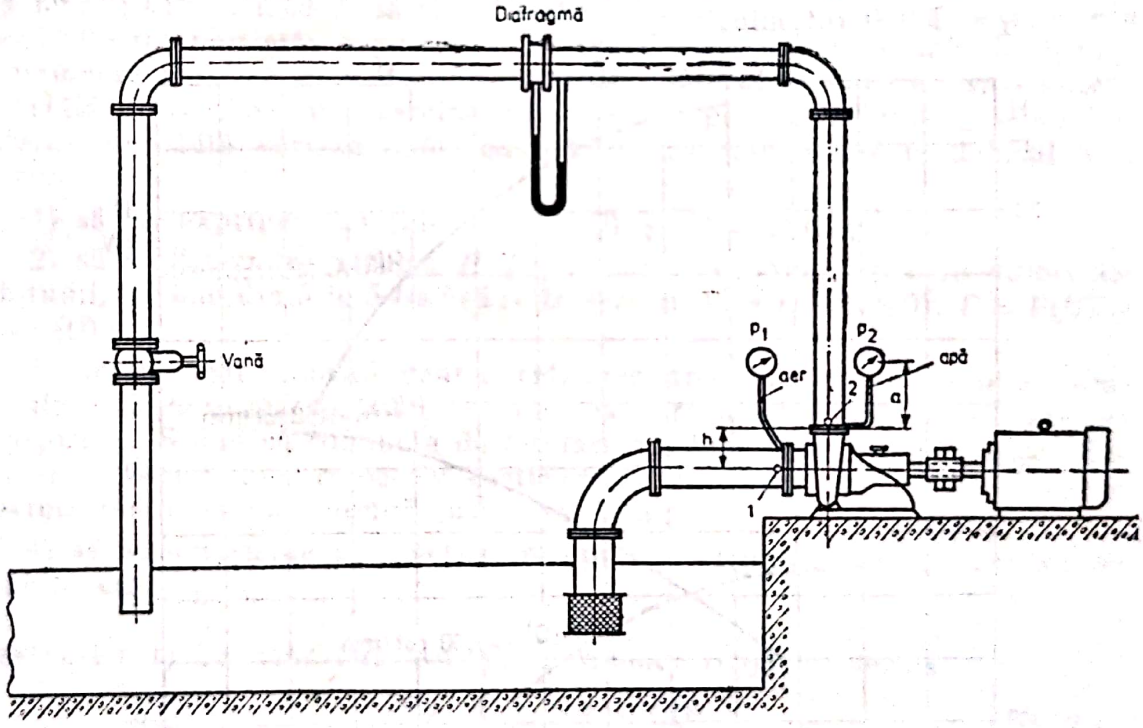


Fig. 10.8.

Rezolvare : Dacă se notează cu *i* un punct la intrarea în pompă și cu *e* un punct la ieșirea din pompă, atunci sarcina pompei este

$$H = \frac{V_e^2 - V_i^2}{2g} + \frac{p_e - p_i}{\rho g} + z_e - z_i.$$

În cazul considerat sarcina devine

$$H = \frac{1}{2g}\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right) Q^2 + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + h + a.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $$H = \frac{Q^2}{2g}\left[\left(\frac{4}{\pi D_2^2}\right) - \left(\frac{4}{\pi D_1^2}\right)\right] + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + h + a,$$

$$H = \frac{0{,}01^2}{2 \cdot 9{,}81}\left[\left(\frac{4}{\pi \cdot 0{,}06^2}\right) - \left(\frac{4}{\pi \cdot 0{,}08^2}\right)\right] + \frac{125 + 30}{9{,}81 \cdot 10^3}\, 10^3 + 0{,}08 + 0{,}12,$$

$$H = 16 \text{ m}.$$

Pentru determinarea puterii se ştie că

$$P = M\omega = \frac{\pi n}{30}\, M = \frac{\pi 2\,000}{30}\, 10 = 2\,094 \text{ W}; \quad P \cong 2{,}1 \text{ kW}.$$

Randamentul pompei este $\eta = \frac{\rho g Q H}{P} = \frac{9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 0{,}01 \cdot 16}{2\,094} = 0{,}75.$

Problema 10.9. O pompă centrifugă *Cerna* 200-150-315 cu turaţia $n =$ $= 1\,450$ rotaţii/min are caracteristicile următoare :

Q [m³/h]	250	300	350	400	450	500
H [m]	33,75	33	31,5	30	28	25
P [kW]	31	34	37	39	41	42,5

Să se determine caracteristicile pompei dacă aceasta funcţionează cu turaţia $n_1 = 1\,000$ rot/min.

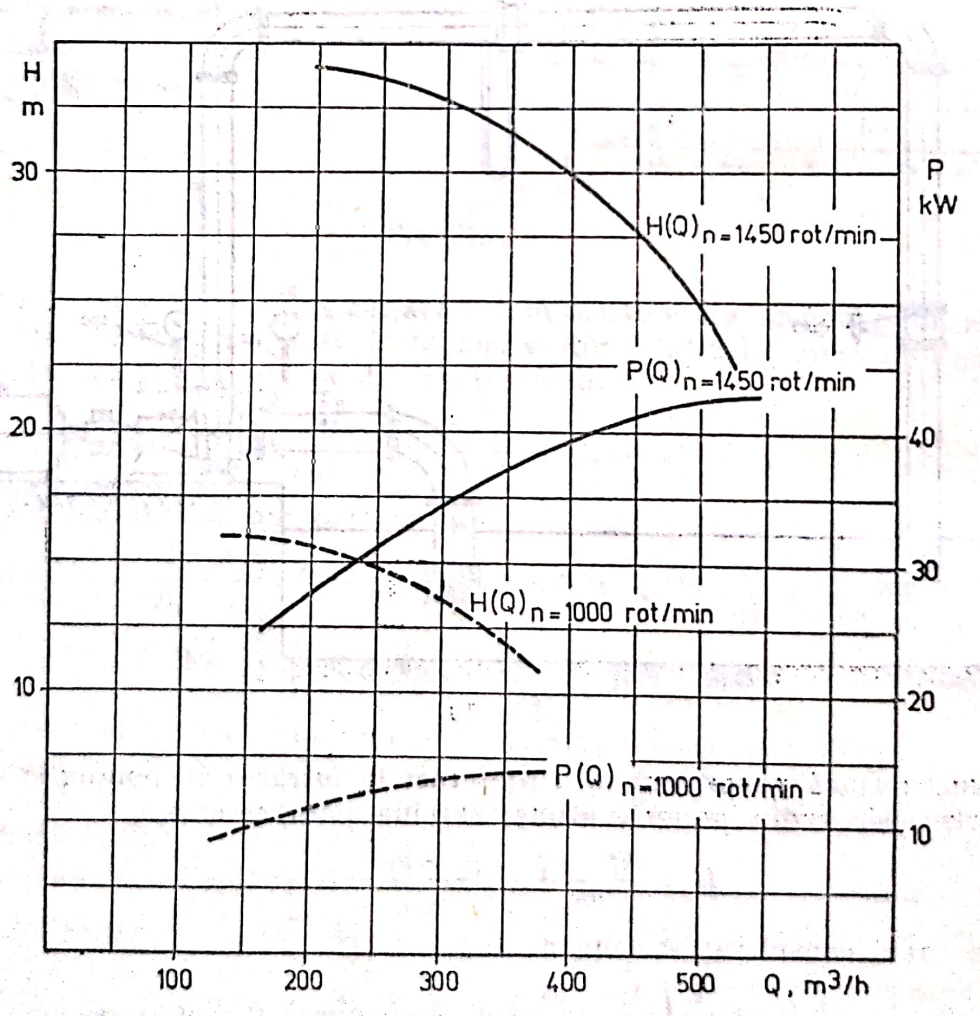


Fig. 10.9.

Rezolvare : Parametrii Q_1, H_1, P_1, de funcţionare ai unei pompe cu turaţia n_1 se calculează în funcţie de parametrii Q, H, P, de funcţionare cu turaţia n cu relaţiile :

$$Q_1 = Qn_1/n\,;\quad H_1 = H(n_1/n)^2\,;\quad P_1 = P(n_1/n)^3. \tag{10.9.1}$$

În cazul considerat se obţine

$$Q_1 = Q\ 1\,000/1\,450 = 0{,}69\ \ Q\,;\quad H_1 = H(1\,000/1\,450)^2 = 0{,}476\ \ H\,;$$

$$P_1 = P(1\,000/1\,450)^3 = 0{,}328\ \ P.$$

Caracteristicile pompei la turaţia $n_1 = 1\,000$ rot/min, considerînd randamentul constant, sînt următoarele :

Q_1 [m³/h]	172,4	207	241,4	276	310,3	345
H_1 [m]	16,1	15,7	15	14,3	13,3	11,9
P_1 [kW]	10,2	11,1	12,1	12,8	13,5	14,0

Curbele caracteristice $H(Q)$ şi $P(Q)$ pentru turaţia $n = 1\,450$ rot/min şi $n_1 = 1\,000$ rot/min sînt prezentate în figura 10.9.

Problema 10.10. Curba de sarcină $H(Q)$ a unei pompe centrifuge cu turaţia $n = 1\,500$ rot/min este o parabolă cu axa de simetrie verticală. Înălţimea de pompare maximă este $H = 50$ m pentru debitul $Q = 15$ l/s şi o putere absorbită $P = 12{,}5$ kW ; sarcina se anulează pentru debitul $Q = 40$ l/s. Puterea absorbită variază liniar cu debitul, ea este 5 kW la debitul nul. Se cere :

1) să se exprime funcţiile $H = H(Q)$ şi $P = P(Q)$;

2) să se determine sarcina H şi puterea P a pompei pentru valori ale debitului, variind din 5 în 5 l/s ; să se traseze curbele $H = H(Q)$, $P = P(Q)$ şi $\eta = \eta(Q)$;

3) pompa este folosită pentru ridicarea apei într-un rezervor a cărui suprafaţă liberă se găseşte la $H_g = 23$ m deasupra suprafeţei libere din bazinul de aspiraţie. Ştiind că conducta de refulare are lungimea $l = 400$ m şi diametrul $D = 160$ mm, respectiv coeficientul lui Chezy este $C = 50$, să se exprime pierderea de sarcină prin conductă ;

4) să se determine parametrii corespunzători punctului de funcţionare în acest caz.

Rezolvare : 1) Se consideră ecuaţia parabolei $H(Q)$ de forma

$$H = A + BQ + CQ^2. \tag{10.10.1}$$

Pentru determinarea constantelor A, B şi C, se pun condiţiile :

— sarcina maximă este $H_{max} = 50$ m, pentru $Q_1 = 15$ l/s ;

adică $$\left.\frac{\partial H}{\partial Q}\right|_{Q=Q_1} = B + 2CQ_1 = 0 \rightarrow B + 2C\cdot 0{,}015 = 0\,;$$

$$H_{max} = A + BQ_1 + CQ_1^2 \rightarrow A + 0{,}015\,B + 0{,}015^2\cdot C = 50\,; \tag{10.10.2}$$

— sarcina se anulează pentru $Q_2 = 40$ l/s :

$$H = A + BQ_2 + CQ_2^2 = 0 \rightarrow A + 0{,}04\,B + 0{,}04^2\,C = 0. \tag{10.10.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

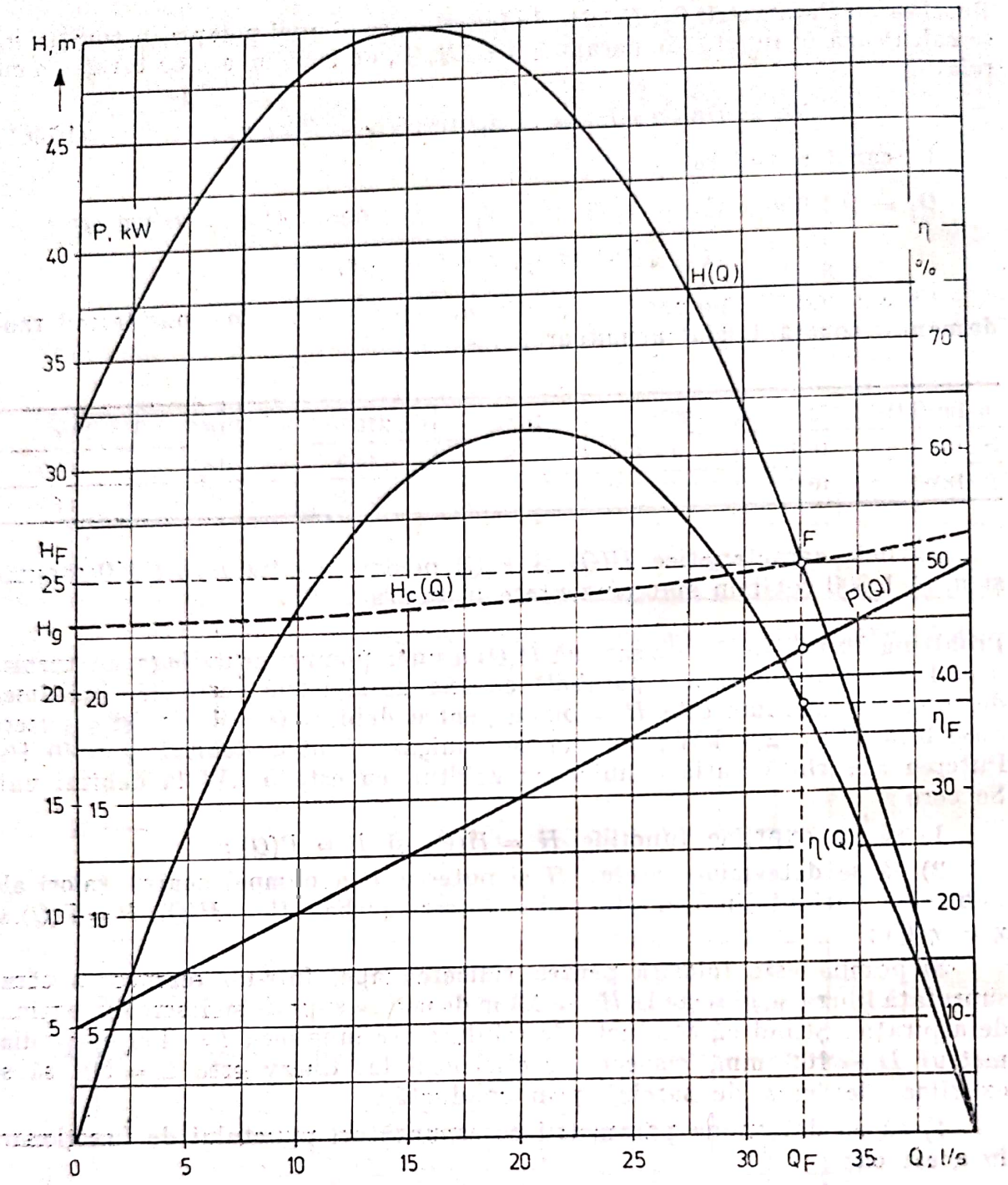


Fig. 10.10.

Rezolvînd sistemul format din relaţiile (10.10.1), (10.10.2), (10.10.3), se obţine

$$H = 32 + 2{,}4 \cdot 10^3\, Q - 80 \cdot 10^3 Q^2 \text{ [m]}, \tag{10.10.4}$$

în care Q este exprimat în m^3/s.

Pentru determinarea dependenţei $P = P(Q)$, se consideră că aceasta este de forma

$$P = D + EQ, \tag{10.10.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar pentru determinarea constantelor, se pun condițiile :

— puterea la debit nul este $P(0) = 5\,000$ W ;

$$P(0) = D + EQ = 5\,000 \rightarrow D = 5\,000 \text{ W} ; \qquad (10.10.6)$$

— puterea la debitul $Q_1 = 15$ l/s este $P(0{,}015) = 12\,500$ W;

$$P(0{,}015) = D + EQ_1 = 12\,500 \rightarrow D + E \cdot 0{,}015 = 12\,500. \qquad (10.10.7)$$

De unde se obține

$$P = 5\,000 + 500\,Q \text{ (W)}, \qquad (10.10.8)$$

cu Q exprimat de asemenea în m³/s.

2) Pentru determinarea variației randamentului $\eta = \eta(Q)$ se știe că expresia randamentului este

$$\eta = P_H/P = \rho g Q H/P,$$

în care $P_H = \rho g Q H$ este puterea hidraulică.

Calculul caracteristicilor $H = H(Q)$, $P = P(Q)$ și $\eta = \eta(Q)$ este efectuat în tabelul următor :

Q [l/s]	0	5	10	15	20	25	30	35	40
H [m]	32	42	48	50	48	42	32	18	0
P_H[kW]	0	2,06	4,7	7,4	9,4	10,3	9,4	6,2	0
P [kW]	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20	22,5	25
η [%]	0	27,5	47,0	59,2	62,7	58,9	47,0	27,6	0

În figura 10.10, sînt trasate curbele $H = H(Q)$, $P = P(Q)$ și $\eta = \eta(Q)$.

3) Pentru determinarea pierderii de sarcină pe conducta de refulare, se folosește relația lui Chezy

$$h_r = \frac{Q^2}{K^2} l, \qquad (10.10.9)$$

în care $K = AC\sqrt{R}$ este modulul de debit, iar l este lungimea conductei.

$$K = \frac{\pi D^2}{4} \cdot C \sqrt{\frac{D}{4}} = \frac{\pi \cdot 0{,}16^2}{4} \cdot 50 \sqrt{\frac{0{,}16}{4}} = 0{,}201.$$

Deci pierderea de sarcină este

$$h_r = (Q^2/K^2) l = (400/0{,}201^2) Q^2 = 9\,900\,Q^2,$$

respectiv caracteristica externă este $H_c = H_g + h_r = 23 + 9\,900\,Q^2$. (10.10.10)

4) Punctul de funcționare reprezintă soluția sistemului format din $H = H(Q)$ și $H_c = H_c(Q)$

$$H = 32 + 2\,400\,Q - 80\,000\,Q^2 ;$$

$$H_c = 23 + 9\,900\,Q^2. \qquad (10.10.11)$$

Soluția sistemului (10.10.11) este $Q_F = 32{,}6$ l/s, respectiv $H_F = 25{,}1$ m. Aceleași valori se pot obține și grafic în figura 10.10, prin intersectarea celor două curbe caracteristice $H = H(Q)$ și $H_c = H_c(Q)$. Rezultă $P_F = 21{,}3$ kW și $\eta_F = 37{,}8\%$.

Scanned with OKEN Scanner

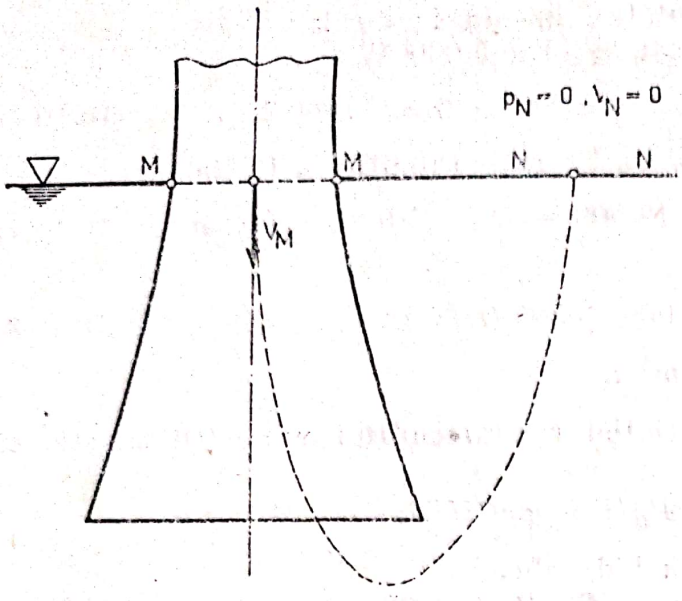


Fig. 10.11.

Problema 10.11. Constructorul unei turbine hidraulice, care funcţioncază cu o cădere $H = 5$ m şi o turaţie $n = 300$ rot/min, a garantat un randament $\eta = 70\%$ pentru puteri cuprinse între $P_1 = 200$ kW şi $P_2 = 300$ kW. Se cere :

1) să se specifice ce tip de turbină este, în funcţie de rapiditatea n_s ;

2) să se determine ce puteri va furniza această turbină, dacă funcţionează cu acelaşi randament la căderea $H' = 3$ m ;

3) căderea de $H' = 3$ m nu este suficientă pentru obţinerea unei puteri $P'' = 150$ kW cu randamentul $\eta = 70\%$; să se arate că acest lucru este posibil cu o cădere $H'' = 3{,}2$ m şi, în aceste condiţii, să se determine turaţia maşinii şi pentru ce gamă de debite se poate asigura un randament $\eta = 70\%$;

4) pierderile de sarcină în aspiratorul turbinei se pot pune sub forma $h_{r,a} = 0{,}3 \frac{V_M^2}{2g}$, unde V_M este viteza medie în secţiunea de intrare în aspirator care are aria $A_M = 1$ m^2 — pentru a se estima riscul apariţiei cavitaţiei să se calculeze presiunea în această secţiune, considerînd că este dispusă la aceeaşi cotă cu suprafaţa liberă din aval ;

5) considerînd condiţiile de la punctul 3) şi ştiind că aria secţiunii de intrare în rotor este $A_1 = 0{,}5$ m^2, unghiul vitezei absolute la intrarea în rotor este $\alpha_1 = 70°$ şi că diametrul mediu al rotorului este $D = 400$ mm, să se determine randamentul maxim, considerînd că el se obţine la un debit egal cu semisuma celor două debite corespunzătoare randamentului $\eta = 70\%$.

Rezolvare : 1) Se calculează rapiditatea turbinei

$$n_s = \frac{n}{H}\sqrt{\frac{1{,}36P}{\sqrt{H}}}.$$

Pentru $P = P_1$ rezultă $n_{s1} = \frac{n}{H}\sqrt{\frac{1{,}36P_1}{\sqrt{H}}} = \frac{300}{5}\sqrt{\frac{1{,}36 \cdot 200}{\sqrt{5}}} = 662$ respectiv,

pentru $P = P_2$, se obţine $n_{s2} = \frac{300}{5}\sqrt{\frac{1{,}36 \cdot 300}{\sqrt{5}}} = 810$.

Deci rapiditatea variază în intervalul (662...810) şi este vorba de o turbină Kaplan.

2) Regimul de funcţionare al turbinei la căderea $H' = 3$ m este similar cu cel de la căderea $H = 5$ m, în consecinţă turaţia unitară n_{11} este aceeaşi ($n_{11} = n'_{11}$), respectiv rapiditatea este aceeaşi ($n_s = n'_s$), deci se poate scrie :

$$n_{11} = n'_{11} \text{ şi } n_s = n'_s, \text{ adică, } \frac{nD}{\sqrt{H}} = \frac{n'D}{\sqrt{H}} \text{ şi } \frac{n}{H}\sqrt{\frac{1{,}36P}{\sqrt{H}}} = \frac{n'}{H'}\sqrt{\frac{1{,}36P'}{\sqrt{H'}}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din cele două relaţii, rezultă $n' = n(H'/H)^{1/2} = 300\sqrt{3/5} = 232$ rot/min respectiv $P' = P(H'/H)^{3/2} = P(3/5)^{3/2} = 0{,}465\ P$.

Deci $P'_1 = 93$ kW, respectiv $P'_2 = 140$ kW.

3) În cazul căderii $H'' = 3{,}2$ m, se poate scrie

$$P'' = P(H''/H)^{3/2} = P(3{,}2/5)^{3/2} = 0{,}512\ P.$$

Deci puterea variază de la $P''_1 = 102$ kW la $P''_2 = 154$ kW, fiind deci posibilă obţinerea puterii de 150 kW cu un randament $\eta = 70\%$. În mod similar, rezultă $n'' = n(H''/H)^{1/2} = 300(3{,}2/5)^{1/2} = 240$ rot/min ;

$$\text{respectiv } Q'' = \frac{10^3 P''}{\rho g H'' \eta} = \frac{10^3 P''}{9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 3{,}2 \cdot 0{,}7} = 0{,}0455\ P'',$$

de unde $Q''_1 = 4{,}64$ m³/s şi $Q''_2 = 7$ m³/s.

4) Aplicînd relaţia lui Bernoulli între secţiunea MM situată la ieşirea din rotor şi intrarea în aspirator şi secţiunea NN la suprafaţa liberă (fig. 10.10), se obţine

$$\alpha_M V_M^2/2 + p_M/\rho + g z_M = \alpha_M V_N^2/2 + p_N/\rho + g z_N + g h_{r,a}$$

şi, ştiind că $\alpha_M \cong 1$, $z_M = z_N$, $p_N = 0$ (presiunea relativă) şi $V_N = 0$, se obţine

$$V_M^2/2 + p_M/\rho = 0{,}3 V_M^2/2,$$

deci

$$p_M = \frac{\rho}{2} \cdot V_M^2(0{,}3 - 1) = -0{,}7 \cdot \frac{\rho}{2} V_M^2,$$

iar, pentru debitul maxim $Q''_2 = 7$ m³/s, se obţine

$$p''_{M2} = -17{,}15 \text{ kPa} = -1{,}75 \text{ m } H_2O;$$

deci nu există riscul de a apare cavitaţia.

5) Debitul este $Q'' = (Q''_1 + Q''_2)/2 = (4{,}64 + 7)/2 = 5{,}82$ m³/s, căderea turbinei este $H = 3{,}2$ m, viteza la intrarea în rotor este $V_1 = Q''/A_1 = 11{,}64$ m/s, iar viteza de transport este $u = \pi D n/60 = 5{,}03$ m/s.

Expresia puterii (10.1.5) se scrie

$$P_u = \rho Q(u_1 v_1 \cos \alpha_1 - u_2 v_2 \cos \alpha_2),$$

cu $\alpha_1 = 70°$ şi, admiţînd ieşirea ortogonală $\alpha_2 = 90°$, rezultă

$$P_u = 10^3 \cdot 5{,}82(5{,}03 \cdot 11{,}64 \cos 70°) = 136{,}5 \text{ kW},$$

respectiv

$$\eta_{max} = \frac{P_u}{\rho g Q H} = 0{,}74.$$

Problema 10.12. O pompă centrifugă cu turaţia $n = 1\,450$ rot/min are următoarea caracteristică :

Q [l/s]	0	5	10	15	20	25	30	35	40
H [m]	29	31	32,5	33	32	29	24	17	8

Pompa aspiră apa din rezervoarele R_1 şi R_2, ale căror suprafeţe libere se găsesc la cotele $z_1 = -6$ m şi $z_2 = 0$ m şi o refulează în rezervorul R_3, a cărui suprafaţă liberă se găseşte la cota $z_3 = +9$ m.

Scanned with OKEN Scanner

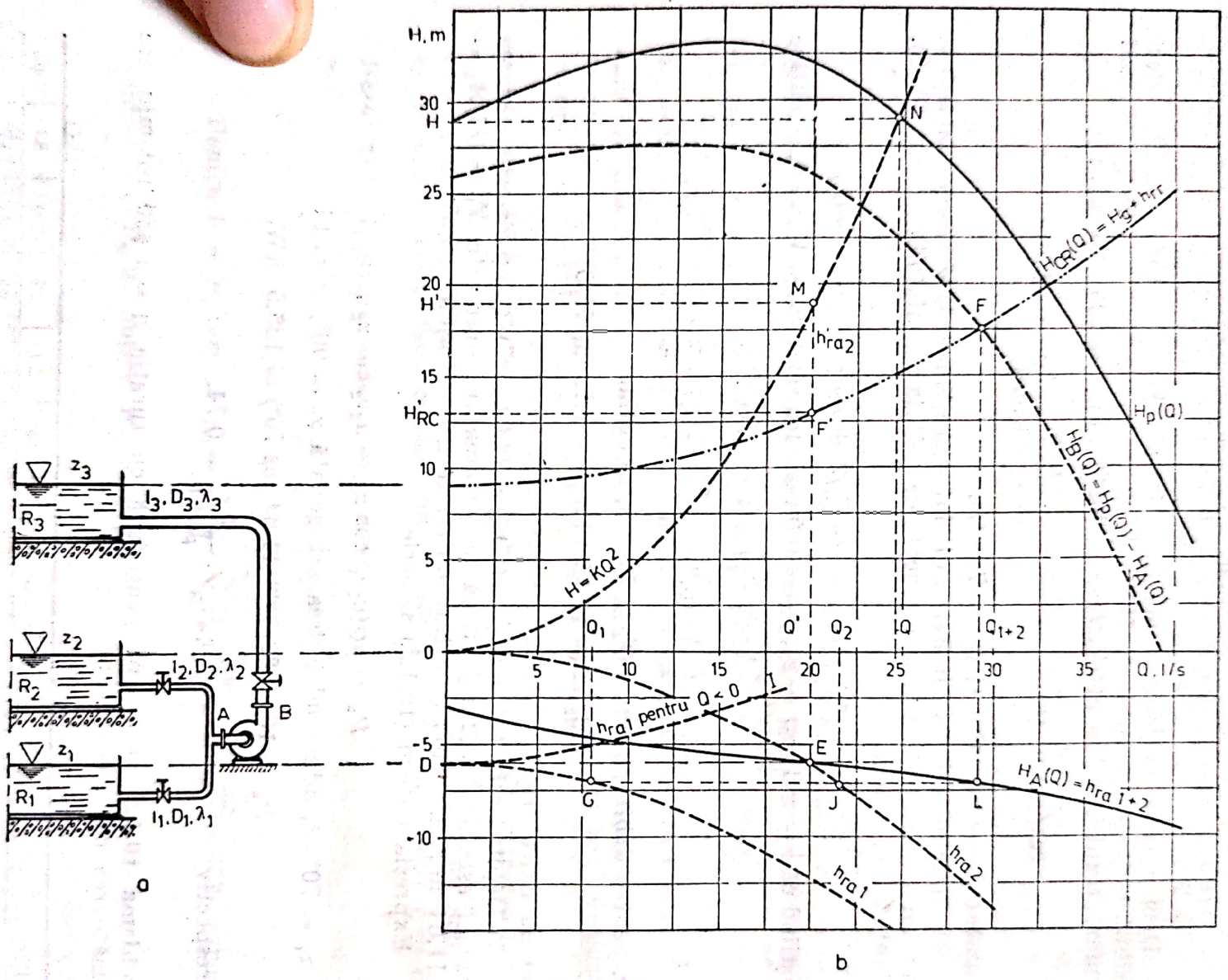

z3
R3
l3, D3, λ3
z2
R2
l2, D2, λ2
A
B
z1
R1
l1, D1, λ1
a
H, m
30
H
25
20
H'
15
H'RC
10
5
0
-5
D
-10
N
M
F
F'
E
G
J
L
hra2
hra1 pentru Q < 0
hra1
hra2
HCR(Q) = Hg + hrr
Hp(Q)
Hg(Q) = Hp(Q) - HA(Q)
H = KQ2
HA(Q) = hra 1+2
Q1
Q'
Q2
Q
Q1+2
5
10
15
20
25
30
35
Q, l/s
b

Fig. 10.12.

Cele două conducte de aspirație au aceeași lungime $l_1 = l_2 = 15$ m și același diametru $D_1 = D_2 = 80$ mm, respectiv coeficientul lui Darcy $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}04$, iar conducta de refulare are lungimea $l_3 = 35$ m, diametrul $D_3 = 100$ mm și coeficientul lui Darcy $\lambda_3 = 0{,}035$. Se cere :

1) să se determine debitele aspirate de pompă din rezervoarele R_1 și R_2 și sarcina pompei la turația $n = 1\,450$ rot/min ;

2) să se afle turația n' a pompei pentru care debitul primului rezervor este nul, $Q_1 = 0$.

Rezolvare : 1) Problema se poate rezolva grafic. În acest scop, se determină pierderile de sarcină pe conductele de aspirație,

$$h_{ra,1} = 0{,}0826 \frac{\lambda_1 l_1}{D_1^5} Q_1^2 = 0{,}0826 \frac{0{,}04 \cdot 15}{0{,}08^5} Q_1^2 = 15\,124{,}5\, Q_1^2,$$

$$h_{ra,2} = 0{,}0826 \frac{\lambda_2 l_2}{D_2^5} Q_2^2 = 0{,}0826 \frac{0{,}04 \cdot 15}{0{,}08^5} Q_2^2 = 15\,124{,}5\, Q_2^2.$$

Corespunzător acestor relații rezultă următoarele valori ale pierderilor de sarcină pentru diverse debite :

Q_1, Q_2 [l/s]	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$h_{ra,1} = h_{a,2}$ [m]	0	0,38	1,51	3,40	6,05	9,45	13,61	18,53	24,20

Conductele fiind identice, au rezultat și pierderi de sarcină egale la același debit transportat. Deoarece suprafețele libere ale celor două rezervoare diferă, pierderile de sarcină sînt parabolele DG, pentru conducta de aspirație a rezervorului R_1, respectiv OE, pentru conducta de aspirație a rezervorului R_2. La oprirea pompei sau la debite pompate mici prin conducta rezervorului R_1, se schimbă sensul de curgere și parabola DI reprezintă transpunerea caracteristicii în acest caz. Prin însumarea celor două caracteristici (ținînd seama că ordonatele parabolei DI sînt negative), s-a obținut curba caracteristică a celor două conducte și rezervoare lucrînd în paralel — reprezintă de fapt sarcina punctului A de la aspirația pompei pentru diverse valori ale debitului $H_A = H_A(Q)$.

Se trasează curba caracteristică a pompei $H_p = H_p(Q)$ pentru turația $n = 1\,450$ rot/min și din ordonatele acestei curbe se scad ordonatele curbei $H_A = H_A(Q)$, respectiv pierderile de sarcină și sarcina geometrică pe aspirație, rezultînd curba $H_B = H_B(Q)$, care reprezintă sarcina disponibilă în punctul B, aval de pompă pentru diverse debite.

Pentru determinarea punctului de funcționare, se trasează și curba caracteristică a conductei de refulare.

$$H_{CR} = H_g + h_{rr} = H_g + 0{,}0826 \frac{\lambda_3 l_3}{D_3^5} Q^2 = H_g + 0{,}0826 \frac{0{,}035 \cdot 35}{0{,}1^5} Q^2,$$

$$H_{CR}(Q) = 9 + 10\,118{,}5\, Q^2.$$

Valorile pierderilor de sarcină pe conducta de refulare și a sarcinii conductei sînt prezentate în tabelul următor :

Q [l/s]	0	5	10	15	20	25	30	35	40
h_{rr} [m]	0	0,30	1,00	2,30	4,10	6,30	9,10	12,40	16,20
H_{CR} [m]	9	9,30	10,00	11,30	13,10	15,30	18,10	21,40	25,20

Scanned with OKEN Scanner

Intersecția curbelor caracteristice $H_D(Q)$ și $H_{CR}(Q)$ dă punctul de funcționare F, ai cărui parametri sînt $Q_{1+2} = 29{,}25$ l/s și $H_F = 17{,}5$ m. Coborînd o verticală prin F se intersectează curba $H_A(Q)$ în L și ducînd o orizontală prin L se determină punctele G și J, pe curbele $h_{ra,1}$ și $h_{ra,2}$, respectiv debitele $Q_1 = 7{,}75$ l/s și $Q_2 = 21{,}5$ l/s.

2) Pentru ca rezervorul R_1 să nu dea debit ($Q_1 = 0$), este necesar ca sarcina punctului A să fie $H_A = z_1 = -6$ m, corespunzător punctului E din grafic. Pentru sarcini $H_A < z_1$, rezultă $Q_1 > 0$, iar pentru $H_A > z_1$, rezultă $Q_1 < 0$, adică rezervorul R_2 alimentează, atît pompa, cît și rezervorul R_1.

Punctului E îi corespunde debitul $Q' = 20$ l/s și punctul de funcționare F' pe caracteristica conductei de refulare $H_{CR}(Q)$. Deci pompa, în acest caz, trebuie să asigure sarcina conductei H_{CR} și pierderile pe aspirație $h_{ra,2}$

$$H' = H'_{RC} + h'_{ra,2} = 19 \text{ m},$$

de unde rezultă punctul M.

Prin O și M se duce parabola OMN, $H = KQ^2$ (vezi problema 10.14), care intersectează curba $H_p(Q)$ în N, de coordonate $H = 29$ m, $Q = 24{,}6$ l/s. Punctele M și N sînt puncte omoloage, corespunzător funcționării cu turația n', respectiv cu turația n. Deci rezultă

$$n'/n = Q'/Q = 24{,}6/20 = 1{,}23\,; \quad n'/n = \sqrt{H'/H} = \sqrt{29/19} = 1{,}23,$$

de unde $n' = n/1{,}23 = 1\,450/1{,}23 = 1\,174$ rot/min.

Problema 10.13. Caracteristicile $H(Q)$ și $\eta(Q)$ ale unei pompe centrifuge la turația constantă $n = 1\,450$ rot/min sînt prezentate în tabelul următor:

Q [l/s]	0	10	20	30	40	50	55	60	70	80
H [m]	460	495	507	502	490	465	446	430	390	345
η [%]	0	26	46	59	67,5	71	72	71,5	67,6	62

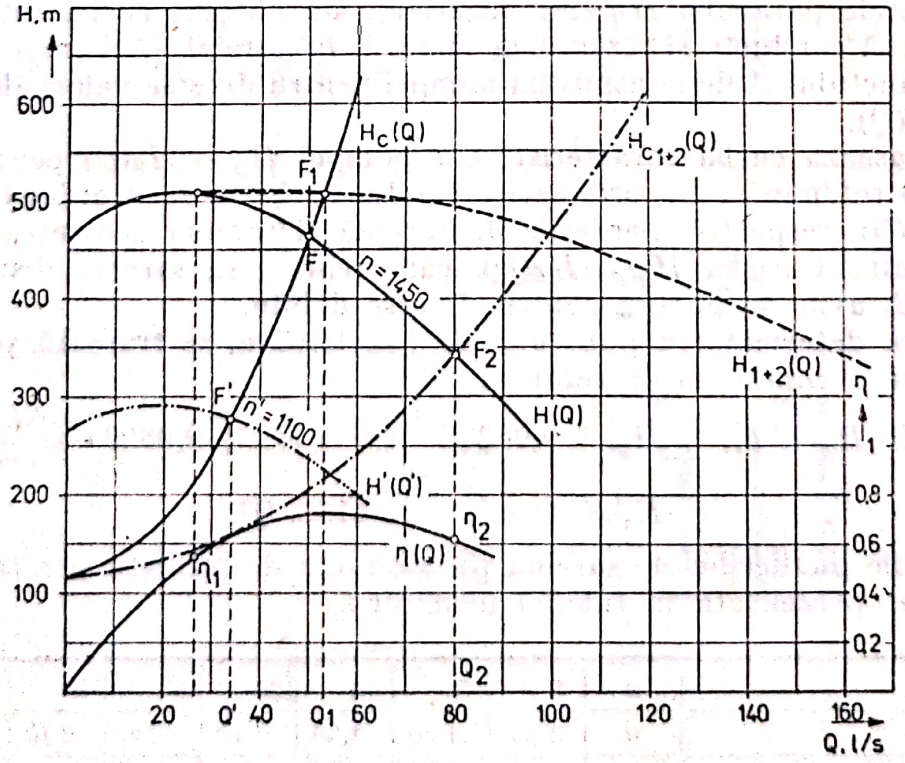


Fig. 10.13.

Sarcina geometrică a instalaţiei este $H_g = 120$ m, iar debitul pompat este $Q = 50$ l/s. Se cere :

1) să se determine punctul de funcţionare (H, Q şi η) şi puterea absorbită de pompă ;

2) să se determine modulul de rezistenţă M al conductelor de aspiraţie şi refulare ($h_r = MQ^2$). Să se traseze caracteristica pompei şi caracteristica instalaţiei ;

3) se instalează în paralel două pompe identice, care refulează pe aceeaşi conductă. Să se traseze caracteristica comună şi să se determine debitul pompat, randamentul fiecărei pompe şi puterea consumată ;

4) se instalează în paralel două conducte de refulare identice cu cea de la punctul 1). Să se determine debitul pompat, randamentul pompei şi puterea consumată ;

5) să se determine punctul de funcţionare pentru turaţia $n_1 = 1\,100$ rot/min şi puterea absorbită de pompă funcţionînd pe o singură conductă de refulare.

Rezolvare : 1) În punctul de funcţionare F, sarcina H a pompei este egală cu sarcina H_c a reţelei de conducte şi debitul Q al pompei este egal cu debitul Q_c al reţelei de conducte. Deoarece debitul punctului de funcţionare este $Q = Q_c = 50$ l/s, din caracteristica pompei rezultă sarcina $H = H_c = 465$ m, respectiv randamentul pompei $\eta = 0{,}71$.

2) Sarcina $H_c = H_c(Q)$ a reţelei de conducte se poate scrie

$$H_c = H_g + MQ^2, \qquad (10.13.1)$$

în care H_g este sarcina geodezică a reţelei, iar M este modulul de rezistenţă al conductei, de unde rezultă

$$M = (H_c - H_g)/Q^2 = (465 - 120)/0{,}05^2 = 138\,000.$$

Caracteristica $H_c(Q)$ a conductei se calculează în tabelul următor :

Q [l/s]	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$h_r = MQ^2$ [m]	0	13,8	55,2	124,2	220,8	345	496,8	676,2	883,2
$H_c = H_g + h_r$ [m]	120	133,8	175,2	244,2	340,8	465	616,8	796,2	1 003,2

Caracteristica pompei (internă) $H(Q)$ şi caracteristica conductei (externă) $H_c(Q)$ sînt trasate în figura 10.13.

3) În cazul în care se instalează două pompe identice în paralel, refulînd pe aceeaşi conductă, curba caracteristică $H_{1+2}(Q)$ se obţine dublînd abscisele curbei $H(Q)$ a unei pompe pentru aceeaşi sarcină H. În figura 10.13 s-a trasat şi caracteristica comună $H_{1+2}(Q)$. Punctul de funcţionare F_1 este la intersecţia curbei caracteristice $H_{1+2}(Q)$ cu caracteristica conductei $H_c(Q)$. Acestui punct de funcţionare îi corespunde debitul $Q_1 = 53{,}2$ l/s (cîte 26,6 l/s pentru fiecare pompă), sarcina $H_1 = 505$ m, respectiv randamentul unei pompe $\eta = 0{,}55$.

Puterea mecanică consumată în acest caz are expresia

$$P = \rho g Q_1 H_1/\eta_1 = 9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 0{,}0532 \cdot 505/0{,}55 = 480 \text{ kW}.$$

4) În cazul în care se instalează în paralel două conducte de refulare, curba caracteristică de sarcină $H_{c1+2}(Q)$ pentru cele două conducte se obţine

Scanned with OKEN Scanner

dublînd abscisele curbei caracteristice $H_c(Q)$. În figura 10.13, s-a trasat şi curba caracteristică $H_{c1+2}(Q)$, iar la intersecţia cu curba caracteristică $H(Q)$, se determină punctul de funcţionare F_2.

În acest caz, parametrii de funcţionare sînt : $Q_2 = 80$ l/s, $H_2 = 345$ şi $\eta_2 = 0{,}62$, iar puterea consumată este

$$P_2 = \rho g Q_2 H_2/\eta_2 = 9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 0{,}08 \cdot 345/0{,}62 = 437 \text{ kW}.$$

5) În cazul în care pompa funcţionează cu turaţia $n' = 1\,100$ rot/min, parametrii pompei se pot determina cu relaţiile

$$Q' = Q(n'/n) \quad \text{şi} \quad H' = H(n'/n)^2.$$

Deci curba caracteristică $H'(Q')$ este cea din tabelul următor :

Q' [l/s]	0	7,6	15,2	22,8	30,3	37,9	41,7	45,5	53,1	60,7
H' [m]	265	285	292	289	282	268	257	247	224	199

În figura 10.13, s-a reprezentat şi curba caracteristică $H' = H'(Q)$. Punctul de funcţionare în acest caz F' are parametrii $Q' = 34$ l/s şi $H' = 275$ m. Admiţînd randamentul constant $\eta = 0{,}64$, puterea consumată este

$$P' = \rho g Q' H'/\eta' = 9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 0{,}034 \cdot 275/0{,}64 = 143{,}3 \text{ kW}.$$

Problema 10.14. Două pompe centrifuge identice cu turaţia $n = 960$ rot/min au următoarele caracteristici :

Q [l/s]	0	40	80	120	140	160	180	200	220
H [m]	40	43	43	40	37	33	28	22	15
η [%]	0	47	70	80	81	80	75	65	50

Pompele debitează în paralel pe o conductă magistrală cu lungimea $L = 1\,000$ m şi diametrul $D = 450$ mm, care refulează în rezervorul superior. Sarcinile geometrice ale celor două pompe sînt $H_{g1} = 20$ m, respectiv $H_{g2} = 30$ m.

Conductele de aspiraţie şi de refulare ale celor două pompe, pînă în punctul A de racordare, sînt identice şi au lungimea cumulată $l = 100$ m şi diametrul $D_1 = 300$ mm (fig. 10.14, *a*).

Conducta magistrală se consideră o conductă lungă cu $\lambda = 0{,}025$, iar conductele individuale ale pompelor au $\lambda_1 = 0{,}03$ şi suma coeficienţilor de pierderi locale de sarcină $\sum \zeta = 6$.

Se cere :

1) să se determine debitul, presiunea şi puterea consumată, la fiecare pompă la turaţia dată ;

2) să se determine turaţia pompei superioare (P_1), pentru care pompa inferioară cu turaţia $n = 960$ rot/min nu debitează.

Rezolvare : 1) Problema se pretează la o soluţionare grafică. Se trasează curbele caracteristice $H_{P1}(Q)$ şi $H_{P2}(Q)$ ale celor două pompe, luînd ca origine pentru sarcini nivelurile suprafeţelor libere din cele două rezervoare. În consecinţă, cele două curbe caracteristice sînt decalate pe vertical cu $\Delta H = H_{g2} - H_{g1}$ (fig. 10.14, *b*).

Scanned with OKEN Scanner

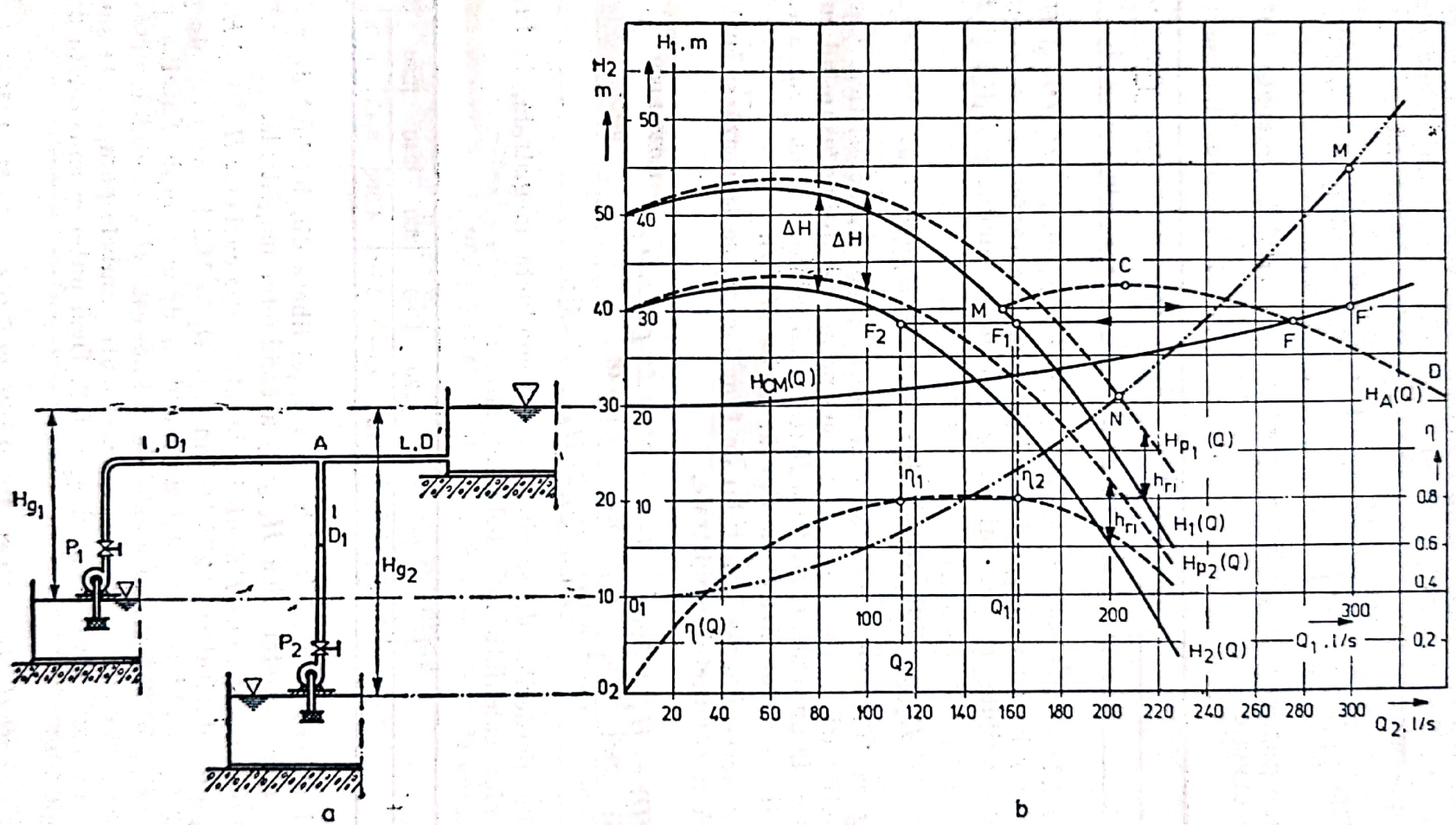


Fig. 10.14.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece cuplarea în paralel a celor două pompe se face în punctul A, trebuie adunate caracteristicile pompelor la nivelul punctului A, adică ţinînd seama de pierderile de sarcină pe tronsoanele de conductă de la rezervorul de aspiraţie pînă în punctul A. Conductele celor două pompe fiind identice pe aceste porţiuni, se calculează o singură pierdere de sarcină

$$h_{rt} = 0{,}0826 \frac{Q^2}{D^4}\left(\lambda \frac{l}{D_1} + \Sigma\zeta\right) = 0{,}0826 \frac{1}{0{,}3^4}\left(0{,}03 \frac{100}{0{,}3} + 6\right) Q^2 ; \quad h_{rt} = 163{,}16\, Q^2.$$

Valorile pierderii de sarcină h_{rt} pentru diverse debite pompate sînt date în tabelul următor :

Q [l/s]	0	40	80	120	140	160	180	200	220
h_{rt} [m]	0	0,26	1,04	2,35	3,20	4,18	5,30	6,5	7,90

Prin scăderea din curbele caracteristice ale pompelor $H_{P1}(Q)$ şi $H_{P2}(Q)$ a valorilor pierderilor de sarcină, se obţin curbele caracteristice reprezentînd sarcinile disponibile, în punctul A, pe cele două conducte $H_1(Q)$ şi $H_2(Q)$ astfel :

$$H_1(Q) = H_{P1}(Q) - h_{rt} ; \; H_2(Q) = H_{P2}(Q) - h_{rt}.$$

În figura 10.14, *b*, s-au trasat şi aceste curbe caracteristice. Caracteristica funcţionării în paralel a celor două pompe se obţine însumînd curbele caracteristice în punctul A, $H_1(Q)$ şi $H_2(Q)$ — adunînd abscisele pentru aceeaşi ordonată H — curba MCD în figură, curba $H_A(Q)$.

Pentru determinarea punctului de funcţionare, se trasează şi curba caracteristică a conductei magistrale,

$$H_{CM}(Q) = H_g + h_{rM} = H_g + 0{,}0826 \frac{\lambda L}{D^5} Q^2 = H_g + \frac{0{,}025 \cdot 1\,000}{0{,}45^5} Q^2 ;$$

$$H_{CM}(Q) = H_g + 112\, Q^2.$$

Valorile pierderilor de sarcină h_{rM} pe conducta magistrală, în funcţie, de debit, sînt calculate în tabelul următor :

Q [l/s]	0	40	80	120	160	200	240	280	320
h_{rM} [m]	0	0,18	0,72	1,60	2,90	4,50	6,45	8,78	11,47

Adunînd aceste valori la cota suprafeţei libere din bazinul de refulare se obţine curba caracteristică $H_{CM}(Q)$ a conductei magistrale.

Punctul de funcţionare F se obţine la intersecţia curbelor $H_A(Q)$ şi $H_{CM}(Q)$ şi îi corespunde debitul $Q = 276$ l/s din care $Q_1 = 162$ l/s este dat de prima pompă, iar $Q_2 = 114$ l/s este dat de cea de a doua pompă. Sarcina primei pompe este $H_{P1} = 32{,}5$ m, iar a celei de a doua este $H_{P2} = 40{,}8$ m. Deoarece axa OQ este comună, curba $\eta(Q)$ este aceaşi pentru ambele pompe şi la punctul de funcţionare rezultă $\eta_1 = 0{,}8$ şi $\eta_2 = 0{,}8$. Deci puterile consumate de cele două pompe sînt :

$$P_1 = \rho g Q_1 H_{P1}/\eta_1 = 9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 0{,}162 \cdot 32{,}5/0{,}8 = 64{,}56 \text{ kW} ;$$

$$P_2 = \rho g Q_2 H_{P2}/\eta_2 = 9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 0{,}114 \cdot 40{,}8/0{,}8 = 57{,}04 \text{ kW}.$$

Scanned with OKEN Scanner

2) Pentru ca pompa P_2, care se roteşte cu turaţia $n = 960$ rot/min, să nu debiteze, trebuie ca sarcina punctului A să fie egală sau mai mare cu sarcina de debit nul a pompei, transpusă în punctul A, iar punctul de funcţionare corespunzător acestei situaţii este F' obţinut ducînd o orizontală prin M.

Deci, în acest caz, pompa P_1 trebuie să asigure debitul $Q'_{F'} = 300$ l/s, sarcina $H_{F'} = 30$ m şi pierderile de sarcină pe conductele aflate amonte de punctul A, $h_{rt} = 163{,}16\ Q^2_{F'} = 14{,}7$ m. Cu aceasta, sarcina totală a pompei este $H'_{P1} = 30 + 14{,}7 = 44{,}7$ m.

Corespunzător valorilor $Q'_{F'} = 300$ l/s şi $H'_{P1} = 44{,}7$ m, pe diagramă se obţine punctul M, punct de aparţine curbei caracteristice $H'_{P1}(Q)$ a pompei P_1 la noua turaţie n'.

Dacă Q şi H_{P1} sînt parametrii de funcţionare ai pompei la turaţia n, parametrii Q' şi H'_{P1} de funcţionare cu turaţia n' se pot determina cu relaţiile

$$Q' = Qn'/n \text{ şi } H'_{P1} = H_{P1}(n'/n)^2,$$

din cele două relaţii rezultînd $H'_{P1} = H_{P1}(Q'/Q)^2$,

adică două puncte aparţinînd curbelor caracteristice la turaţia n, respecti n sînt puse în corespondenţă prin intermediul unei parabole de forma $H = KQ^2$

În cazul considerat, parabola O_1M poate fi determinată punînd condiţia ca să treacă prin punctul M,

$$H_M = KQ^2_M \text{ sau } H'_{P1} = K(Q'_{F'})^2; \quad 44{,}7 = K0{,}3^2,$$

de unde $K = 496{,}7$, iar coordonatele punctelor parabolei $H = 496{,}7\ Q^2$ sînt date în tabelul următor:

Q [l/s]	0	40	80	120	160	200	240	280	320
H [m]	0	0,80	3,20	7,10	12,7	19,9	28,6	38,9	50,8

Trasînd această parabolă, ea intersectează curba caracteristică $H_{P1}(Q)$ în punctul N: $Q_N = 204$ l/s şi $H_N = 20{,}7$ m. Punctele N şi M corespund funcţionării cu turaţia n, respectiv n', de unde se obţine

$$n'/n = Q_M/Q_N = Q'_{F'}/Q = 300/204 = 1{,}47;$$

$$n'/n = \sqrt{H_M/H_N} = \sqrt{H'_{P1}/H_{P1}} = \sqrt{44{,}7/20{,}7} = 1{,}47,$$

deci

$$n' = 1{,}47\ n = 1\,412 \text{ rot/min.}$$

Problema 10.15. O pompă centrifugă cu turaţia $n = 1\,450$ rot/min are caracteristicile următoare:

Q [l/s]	0	1	2	3	4	5	6	7	8
H [m]	13	13,5	14,2	14	13	12	10	8	4
η [%]	0	20	40	51	60	62	60	50	35

Scanned with OKEN Scanner

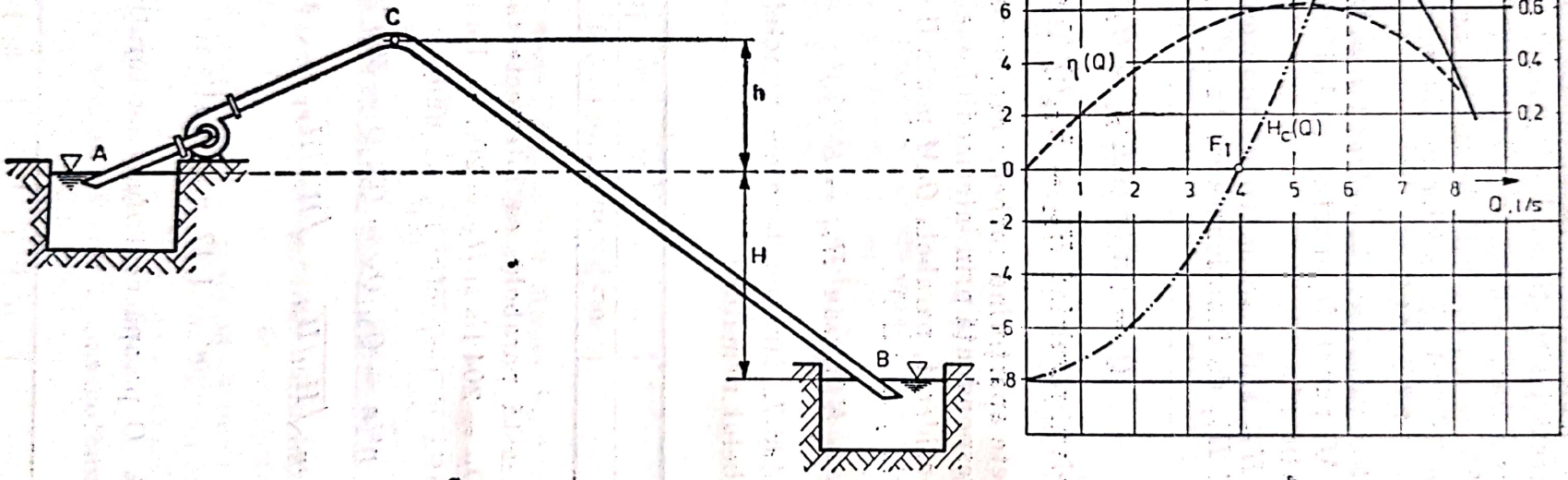


Fig.10.15.

Scanned with OKEN Scanner

Această pompă pompează apa printr-o conductă sifon cu diametrul $D = 50$ mm și lungime totală $l = 75$ m (fig. 10.15, *a*) din rezervorul A în rezervorul B. Diferența de nivel între rezervoare este $H = 8$ m, punctul superior al sifonului este situat la cota $h = 5$ m față de nivelul în rezervorul superior.

Neglijînd pierderile locale și termnii cinetici și considerînd coeficientul lui Darcy $\lambda = 0{,}025$, să se determine :

1) debitul, presiunea și randamentul pompei ;

2) unde trebuie montată pompa (în zona ascendentă sau în zona descendentă) și de ce ?

3) debitul prin sifon în absența pompei ;

4) presiunea în punctul superior al sifonului în cazul absenței pompei.

Rezolvare : 1) Pentru determinarea debitului, presiunii pompei și randamentului, este necesar să se traseze caracteristicile pompei și ale rețelei de conducte și să se determine punctul de funcționare.

Caracteristicia rețelei de conducte este de forma

$$H_c = H_g + h_r = H_g + MQ^2.$$

Pierderile de sarcină pe conductă se pot scrie

$$h_r = 0{,}0826 \frac{l\lambda}{D^5} Q^2 = 0{,}0826 \frac{75 \cdot 0{,}025}{0{,}05^5} Q^2 = 495{,}6 \cdot 10^3 Q^2.$$

Deci caracteristica conductei este

$$H_c = -8 + 0{,}4956 \cdot 10^6 \, Q^2,$$

deoarece sarcina geodezică este negativă $H_g = -8$ m. În figura 10.15,*b*, s-au trasat caracteristicile pompei și caracteristica conductei.

Deci punctul de funcționare F corespunde unui debit $Q_F = 6{,}03$ l/s și unei sarcini la pompă $H = 10{,}0$ m, iar randamentul are valoarea $\eta = 0{,}6$. Pierderile de sarcină pe conductă corespunzător acestui debit sînt

$$h_r = 0{,}0826 \frac{l\lambda}{D^5} Q^2 = 0{,}4956 \cdot 10^6 \cdot (6{,}03 \cdot 10^{-3})^2 = 18 \text{ m},$$

din care 10 m asigură pompa, iar restul de 8 m reprezintă sarcina geodezică negativă.

2) În cazul conductelor sifonate, debitul maxim ce poate fi transportat este impus de riscul apariției cavitației în punctul cu înălțime maximă (cocoașa sifonului). În consecință, se urmărește asigurarea unei presiuni cît mai mari în acel punct, deci pompa se va monta în amonte de el, pe ramura ascendentă.

3) În absența pompei, după amorsarea sifonului, sistemul funcționează gravitațional, iar punctul de funcționare F_1 se obține intersectînd caracteristica conductei cu orizontala $H = 0$ — reprezintă egalitatea dintre pierderea de sarcină pe conductă și sarcina geometrică H_1 avută la dispoziție. Se obține punctul de funcționare F_1, respectiv debitul $Q_1 = 4$ l/s.

4) Pentru determinarea presiunii în punctul superior C al sifonului, se scrie relația lui Bernoulli între punctele A și C (în absența pompei)

$$v_A^2/2 + p_A/\rho + gz_A = v_C^2/2 + p_C/\rho + gz_C + gh_{rA,C}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se neglijează viteza la suprafața liberă, $v_A = 0$, $z_C - z_A = h$, $p_A = p_{at}$ și rezultă

$$p_C = p_{at} - \rho g h - \rho \frac{v_C^2}{2} - \rho g h_{rA,C} = p_{at} - \rho g h - 0{,}0826 \frac{Q^2}{D^4}\left(1 + \frac{\lambda l}{D}\right)\rho g.$$

Deci presiunea relativă în punctul C este

$$p_{rC} = p_C - p_{at} = -\rho g h - 0{,}0826 \rho g \frac{Q^2}{D^4}\left(1 + \lambda \frac{l}{D}\right),$$

$$p_{rC} = -9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 5 - 0{,}0826 \cdot 9{,}81 \cdot 10^3 \frac{0{,}004^2}{0{,}05^4}\left(1 + \frac{0{,}025 \cdot 25}{0{,}05}\right) = -74{,}16 \text{ kPa}.$$

sau

$$\frac{p_{rC}}{\rho g} = -7{,}56 \text{ m}.$$

Problema 10.16. O pompă centrifugă cu turația $n = 960$ rot/min are următoarele caracteristici:

Q [l/s]	0	40	80	120	140	160	180	200	220
H [m]	40	43	43	40	37	33	28	22	15
η [%]	0	47	70	80	81	80	75	65	50

Pompa aspiră apa din rezervorul R_1 a cărui suprafață liberă se găsește la cota $z_1 = 0$ m și refulează apa în două rezervoare R_2 și R_3 care au suprafețele libere situate la cotele $z_2 = 20$ m și $z_3 = 15$ m (fig. 10.16, *a*).

Conducta, de la aspirația pompei și pînă în punctul A, de ramificare a conductei de refulare, are diametrul $D_1 = 400$ mm, lungimea $l_1 = 100$ m, și coeficientul lui Darcy $\lambda_1 = 0{,}025$, respectiv suma coeficienților pierderilor locale de sarcină ale tuturor singularităților $\sum \zeta = 6$.

Conductele de la punctul A de ramificare pînă la rezervoarele R_2 și R_3 sînt egale și au lungimile $l_2 = l_3 = 300$ m, diametrele $D_2 = D_3 = 300$ mm și coeficienții lui Darcy $\lambda_2 = \lambda_3 = 0{,}03$ (sînt conducte lungi). Se cere:

1) să se determine punctul de funcționare a instalației și debitele livrate celor două rezervoare, dacă fiecare din ele este alimentată separat — să se determine puterile consumate în fiecare caz;

2) să se determine punctul de funcționare a instalației, debitele furnizate celor două rezervoare și puterea consumată de pompă, dacă ambele rezervoare sînt alimentate simultan.

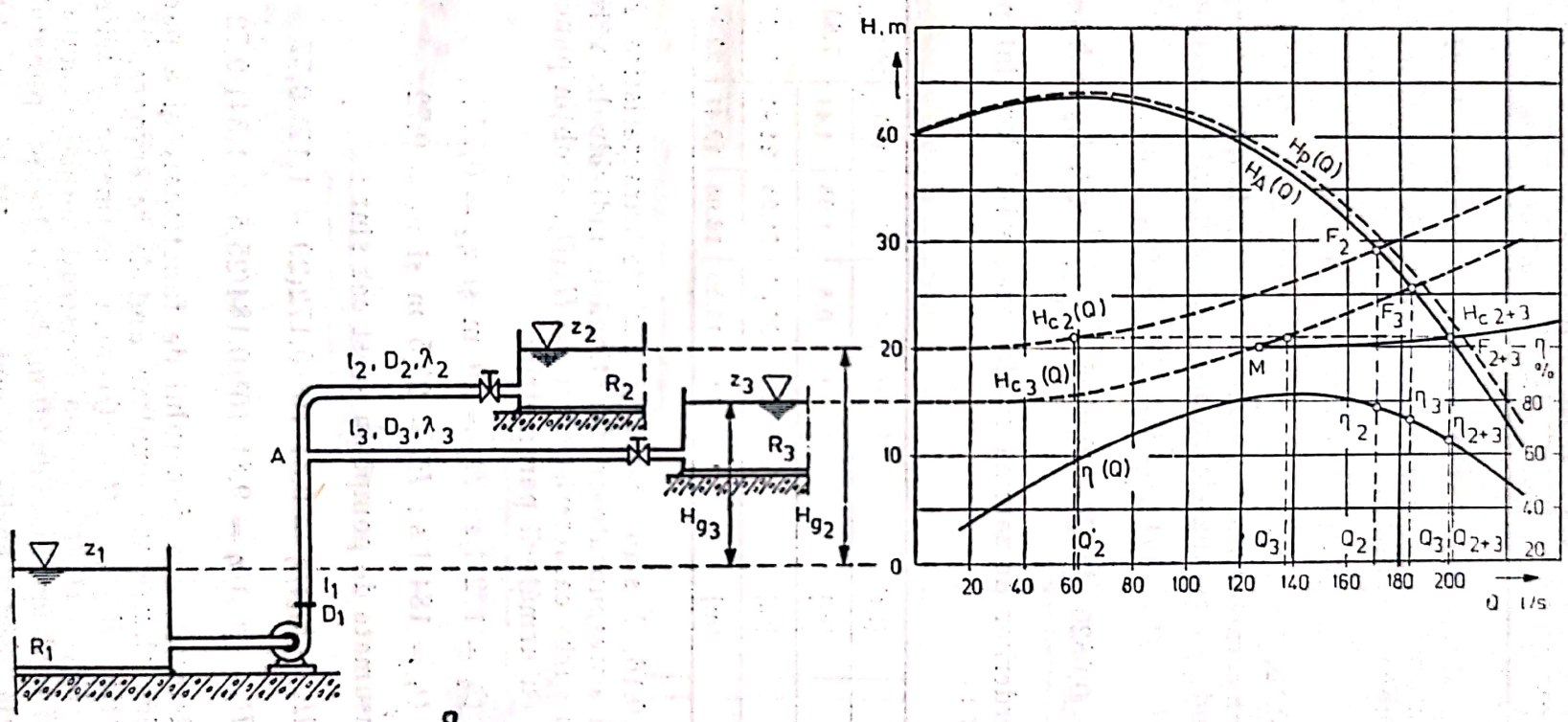
Rezolvare: 1) Pentru determinarea punctelor de funcționare, este necesar să se construiască curbele caracteristice ale pompei, respectiv ale conductelor.

În figura 10.16, *b*, s-au reprezentat $H_p = H_p(Q)$, caracteristica de sarcină, și $\eta = \eta(Q)$, caracteristica randamentului, conform tabelului.

Se calculează pierderile de sarcină h_{ra} pe zona de aspirație și partea comună de refulare, pînă în punctul A

$$h_{ra} = 0{,}0826 \frac{Q^2}{D_1^4}\left(\frac{\lambda_1 l_1}{D_1} + \sum \zeta\right) = 0{,}0826 \frac{1}{0{,}4^4}\left(\frac{0{,}025 \cdot 100}{0{,}4} + 6\right) Q^2; \quad h_{ra} = 39{,}52\ Q^2.$$

Scanned with OKEN Scanner


z2
l2, D2, λ2
R2
z3
l3, D3, λ3
R3
A
Hg3
Hg2
z1
l1
D1
R1
H, m
40
30
20
10
0
Hp(Q)
HA(Q)
F2
Hc2(Q)
F3
Hc 2+3
F2+3
η %
Hc3(Q)
M
η3
η2
η2+3
η (Q)
60
40
20
Q'2
Q3
Q2
Q3
Q2+3
20 40 60 80 100 120 140 160 180 200
Q l/s

a

Fig. 10.16.

Valorile acestor pierderi sînt următoarele:

Q [l/s]	0	40	80	120	160	200	240
h_{ra} [m]	0	0,06	0,25	0,57	1,00	1,58	2,28

Pentru a se obține sarcina disponibilă în punctul A, $H_A = H_A(Q)$, se scade, din caracteristica pompei $H_p = H_p(Q)$, caracteristica pierderilor de sarcină pe porțiunea comună pînă în punctul A.

$$H_A(Q) = H_P(Q) - h_{ra}(Q).$$

În figura 10.16, *b* s-a trasat și caracteristica $H_A = H_A(Q)$.

S-au calculat caracteristicile $H_{c2}(Q)$ și $H_{c3}(Q)$ ale rețelei în aval de punctul A, considerînd că rezervoarele R_2 și R_3 sînt alimentate independent

$$H_{c2} = H_{g2} + h_{r2}, \quad H_{c3} = H_{g3} + h_{r3},$$

iar $h_{r2} = h_{r3} = 0{,}0826 \frac{\lambda_2 l_2}{D_2^5} Q^2 = 0{,}0826 \frac{0{,}03 \cdot 300}{0{,}3^5} Q^2$, $h_{r2} = h_{r3} = 306 Q^2$.

Valorile pierderilor de sarcină și ale caracteristicilor sînt prezentate în tabelul următor:

Q	[l/s]	0	40	80	120	160	200	240
$h_{r2} = h_{r3}$	[m]	0	0,5	1,95	4,41	7,83	12,24	17,62
$H_{c2} = H_{g2} + h_{r2}$	[m]	20	20,50	21,95	24,41	27,83	32,24	37,62
$H_{c3} = H_{g3} + h_{r3}$	[m]	15	15,50	16,95	19,41	22,83	27,24	32,62

În figura 10.16, *b* s-au trasat și curbele caracteristice $H_{c2} = H_{c2}(Q)$ și $H_{c3} = H_{c3}(Q)$ corespunzătoare funcționării individuale a rezervoarelor. La intersecția cu curba caracteristică $H_A = H_A(Q)$, se obțin punctele de funcționare F_2 și F_3 cu următorii parametrii:

$$Q_2 = 172 \text{ l/s}; \; H_2 = 29 \text{ m și } \eta_2 = 0{,}77;$$

$$Q_3 = 184 \text{ l/s}; \; H_3 = 25{,}5 \text{ m și } \eta_3 = 0{,}72.$$

Puterile consumate de pompă în acest caz sînt:

$$P_2 = \rho g Q_2 (H_2 + h_{ra})/\eta = 9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 0{,}172(29 + 1{,}17)/0{,}77 = 66{,}11 \text{ kW},$$

$$P_3 = \rho g Q_3 (H_3 + h_{ra})/\eta = 9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 0{,}184(25{,}5 + 1{,}34)/0{,}72 = 67{,}30 \text{ kW}.$$

2) Pentru determinarea punctului de funcționare și a parametrilor în cazul în care sînt alimentate simultan ambele rezervoare, se construiește curba caracteristică $H_{c2+3} = H_{c2+3}(Q)$ prin însumarea absciselor curbelor $H_{c2} = H_{c2}(Q)$ și $H_{c3} = H_{c3}(Q)$ — s-a construit numai ramura corespunzătoare unei sarcini în A mai mare de 20 m, deci la dreapta punctului M.

La intersecția acestei curbe cu curba $H_A = H_A(Q)$, se obține punctul de funcționare F_{2+3} cu parametrii

$$Q_{2+3} = 198 \text{ l/s}, \; H_{2+3} = 21 \text{ m}, \; \eta_{2+3} = 0{,}65.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ducînd o orizontală prin punctul de funcționare F_{2+3}, se determină punctele de funcționare pe fiecare ramură și debitele cu care sînt alimentate, rezervoarele : $Q_2' = 59$ l/s și $Q_3' = 139$ l/s.

Puterea consumată de pompă în acest caz este

$$P = \rho g Q_{2+3}(H_{2+3} + h_a)/\eta = 9{,}81 \cdot 10^3 \cdot 0{,}198(21 + 1{,}55)/0{,}65 = \\ = 67{,}38 \text{ kW}.$$

Problema 10.17. O pompă centrifugă aspiră apă din două rezervoare A și B ale căror suprafețe libere se găsesc la cotele $z_a = 0$ m, $z_b = 1$ m, și refulează debitul $Q = 10$ l/s în rezervorul C, a cărui suprafață liberă se găsește la cota $z_c = 6$ (fig. 10.17).

Conductele de legătură au lungimile $l_1 = 5$ m, $l_2 = 5$ m și $l_3 = 20$ m, respectiv diametrele $D_1 = 50$ mm, $D_2 = 75$ mm și $D_3 = 75$ mm.

Să se determine sarcina pompei dacă se neglijează pierderile locale de sarcină (conducte lungi), iar coeficientul lui Darcy este $\lambda = 0{,}03$ pentru toate conductele.

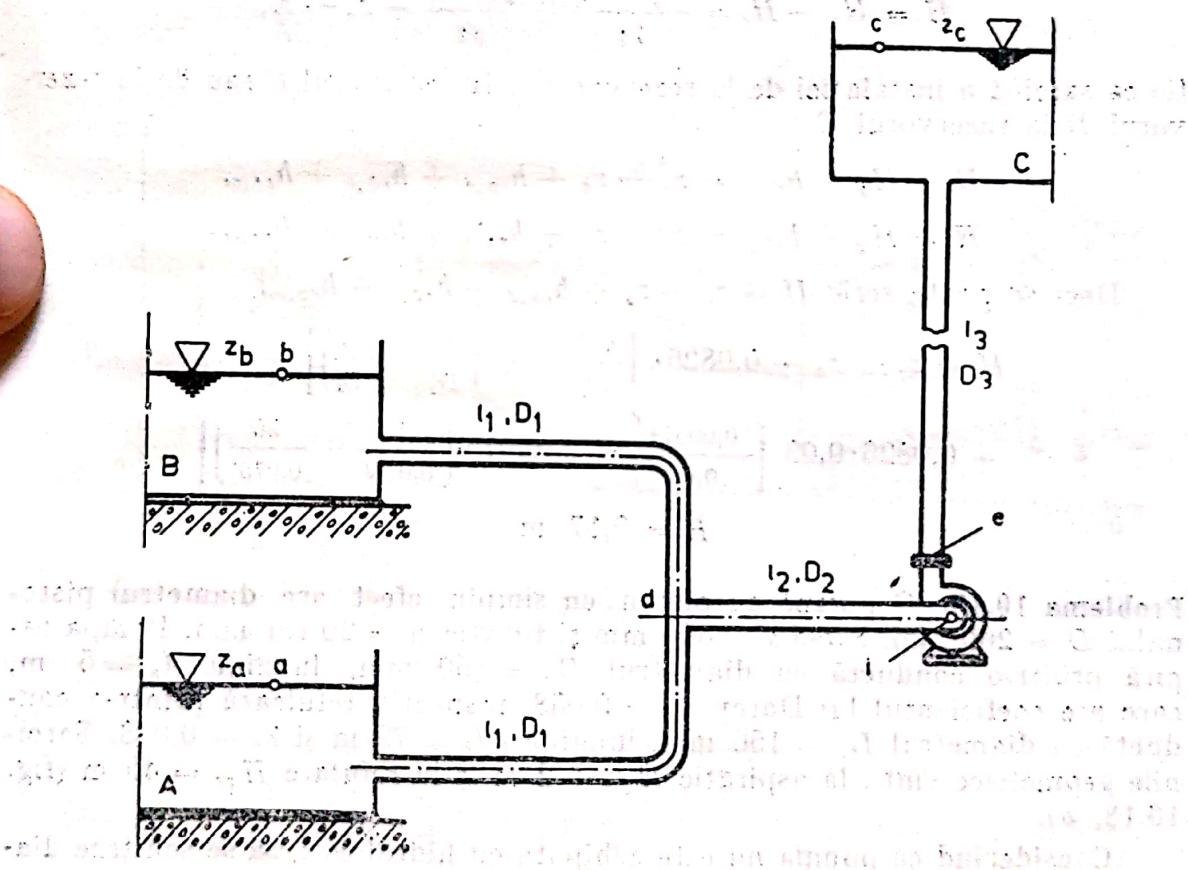


Fig. 10.17.

Rezolvare : Pentru calcularea sarcinii pompei, este necesar să se determine mai întîi aportul de debit al rezervoarelor A și B. În acest scop, se scrie relația lui Bernoulli între punctul a, pe suprafața liberă a rezervorului A, și punctului i, la intrarea în pompă, respectiv între punctul b, pe suprafața liberă a rezervorului B și punctul i

$$v_a^2/2 + p_a/\rho + gz_a = v_i^2/2 + p_i/\rho + gz_i + gh_{ra,a} + gh_{ra,i};$$

$$v_b^2/2 + p_b/\rho + gz_b = v_i^2/2 + p_i/\rho + gz_i + gh_{rb,a} + gh_{ra,i}.$$

Neglijînd termenii cinetici în suprafeţele libere $v_a = v_b = 0$, ştiind că $p_a = p_b = p_{at}$ şi scăzînd cele două relaţii, rezultă

$$z_b - z_a = h_{rb,d} - h_{ra,d} = 0{,}0826 \frac{\lambda l_1}{D_1^5} (Q_B^2 - Q_A^2),$$

în care Q_A şi Q_B sînt debitele livrate de rezervorul A, respectiv de rezervorul B. Deci

$$Q_B^2 - Q_A^2 = \frac{D_1^5}{0{,}0826\lambda l_1} (z_b - z_a) = \frac{0{,}05^2}{0{,}0826 \cdot 0{,}03 \cdot 5} \cdot 1 = 0{,}252 \cdot 10^{-4}.$$

Ecuaţia continuităţii în punctul d se scrie

$$Q_A + Q_B = 0{,}01.$$

Rezolvînd sistemul, rezultă $Q_A = 3{,}74$ l/s şi $Q_B = 6{,}26$ l/s.

Sarcina pompei se poate scrie, fie ca diferenţă dintre sarcina fluidului în punctul e (la ieşirea din pmopă) şi sarcina fluidului în punctul i

$$H = H_e - H_i = \frac{V_e^2 - V_i^2}{2g} + \frac{p_e - p_i}{\rho g} + z_e - z_i,$$

fie ca sarcină a instalaţiei de la rezervorul A la rezervorul C sau de la rezervorul B la rezervorul C

$$H = H_g + h_{ra,c} = z_c - z_a + h_{ra,d} + h_{rd,i} + h_{re,c},$$

$$H = H_g + h_{rb,c} = z_c - z_b + h_{rb,d} + h_{rd,i} + h_{re,c}.$$

Deci se poate scrie $H = z_c - z_a + h_{ra,d} + h_{rd,i} + h_{re,c}$;

$$H = z_c - z_a + 0{,}0826\lambda \left[\frac{Q_A^2 l_1}{D_1^5} + Q^2\left(\frac{l_2}{D_2^5} + \frac{l_3}{D_3^5}\right)\right] = 6 +$$

$$+ 0{,}0826 \cdot 0{,}03 \left[\frac{0{,}00374^2}{0{,}05^5} 5 + 0{,}01^2 \left(\frac{5}{0{,}075^5} + \frac{20}{0{,}075^5}\right)\right]$$

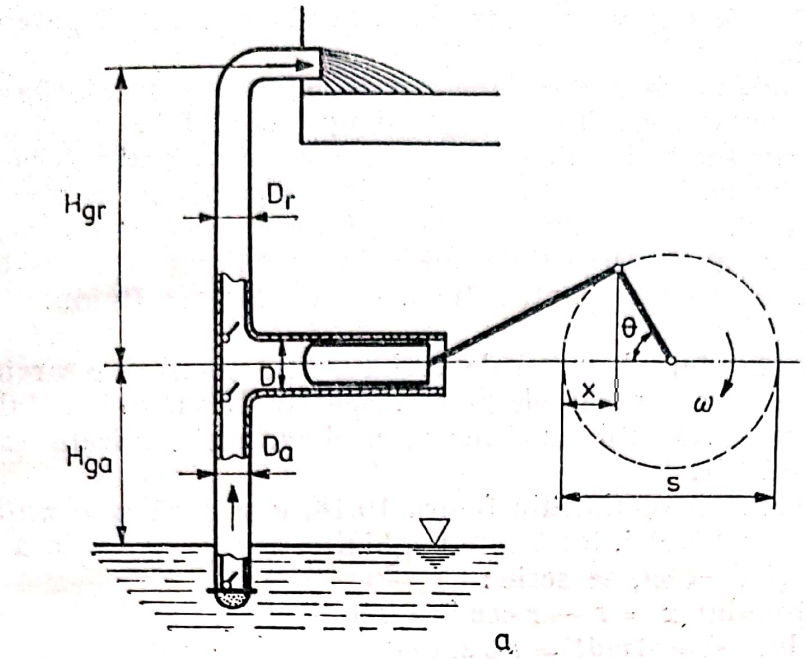
$$H = 9{,}17 \text{ m}.$$

Problema 10.18. O pompă cu piston cu simplu efect are diametrul pistonului $D = 200$ mm, cursa $s = 600$ mm şi turaţia $n = 20$ rot/min. Pompa aspiră printr-o conductă cu diametrul $D_a = 150$ mm, lungime $l_a = 5$ m, care are coeficientul lui Darcy $\lambda_a = 0{,}038$, respectiv refulează printr-o conductă cu diametrul $D_r = 150$ mm, lungimea $l_r = 75$ m şi $\lambda_r = 0{,}038$. Sarcinile geometrice sînt : la aspiraţie $H_{ga} = 2$ m şi la refulare $H_{gr} = 45$ m (fig. 10.18, *a*).

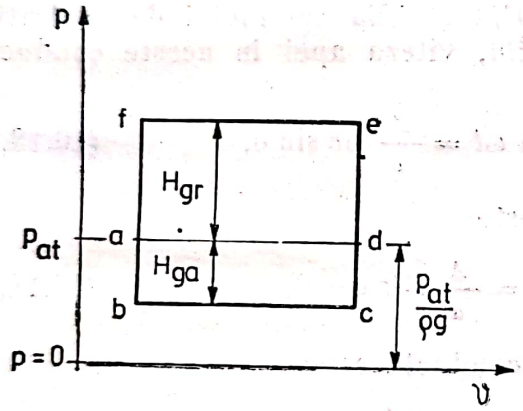
Considerînd că pompa nu este echipată cu hidrofoare, să se schiţeze diagrama indicată corespunzătoare debitului dat de pompă la capetele şi la mijlocul cursei, dacă se neglijează pierderile prin supape.

Presiunea atmosferică este $p_{at} = 101{,}325$ kPa, iar cavitaţia se produce cînd presiunea pe suprafaţa pistonului scade sub $p_1 = 23{,}5$ kPa. Să se calculeze turaţia maximă la care poate funcţiona pompa astfel încît să nu se producă cavitaţie.

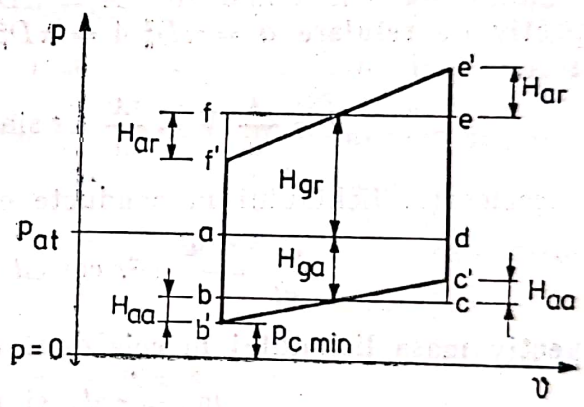
Rezolvare : Dacă H_{ga} şi H_{gr} sînt sarcinile geometrice ale conductei de aspiraţie şi de refulare şi se neglijează pierderile de sarcină în cele două conducte, diagrama teoretică presiune-volum (diagrama indicată) arată ca în figura 10.18, *b*,



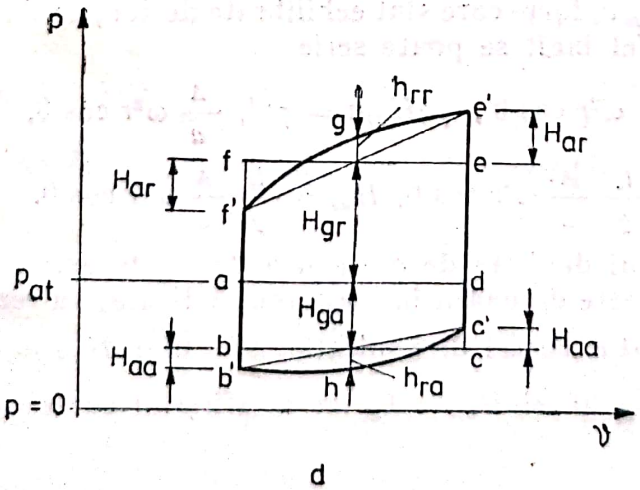
a



b



c



d

Fig. 10.18.

Scanned with OKEN Scanner

presiunea fiind constantă și egală cu $-H_{ga} = -2$ m, în timpul cursei de aspirație, și cu $H_{gr} = 45$ m, în timpul cursei de refulare. Atunci aria *abcd* reprezintă puterea dată în cursa de aspirație, iar aria *defa* reprezintă puterea dată în cursa de refulare.

Inerția apei din conducta de aspirație și cea de refulare și pierderile de sarcină din cele două conducte modifică această diagramă astfel:

— viteza apei în conducta de aspirație variază de la valoarea zero la începutul cursei de aspirație, la un maxim la jumătatea cursei și din nou la valoarea zero la sfîrșitul ei. Sarcina suplimentară H_{aa} (de accelerare la aspirație) este necesară pentru accelerarea fluidului la începutul cursei, respectiv o sarcină egală și de sens contrar pentru frînarea și aducerea fluidului în stare de repaus la sfîrșitul cursei;

— în mod similar, în timpul cursei de reglare, este necesară o sarcină H_{ar} (accelerare la refulare) pentru accelerarea, respectiv frînarea lichidului din conducta de refulare. Această modificare a diagramei indicate este prezentată în figura 10.18, *c*.

Presupunînd mișcarea pistonului din figura 10.18, *a* și dacă $\omega = \pi n/30$ este viteza unghiulară a manivelei, iar θ este unghiul la centru cu originea în punctul mort exterior și $\theta = \omega t$, se scrie:

— deplasarea pistonului $x = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\omega t)$;

— viteza pistonului $V = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = r\omega \sin\omega t$.

Cunoscînd aria cilindrului $A = \pi D^2/4$ și aria conductei de aspirație, respectiv de refulare $a = \pi D_a^2/4 = \pi D_r^2/4$, viteza apei în aceste conducte se scrie

$$v = \frac{A}{a} V = \frac{A}{a} \omega r \sin\omega t = \frac{A}{a} \omega r \sin\theta, \qquad (10.18.1)$$

iar accelerația lichidului în conducte este

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{A}{a} \omega^2 r \cos\omega t = \frac{A}{a} \omega^2 r \cos\theta, \qquad (10.18.2)$$

respectiv masa lichidului în cele două conducte este

$$m_a = \rho a l_a \text{ și } m_r = \rho a l_r.$$

Datorită sarcinilor suplimentare H_{aa} și H_{ar}, apar forțe suplimentare $\rho g H_{aa} a$, respectiv $\rho g H_{ar} a$, forțe care sînt echilibrate de forțele de inerție din cele două conducte, astfel încît se poate scrie

$$\rho g H_{aa} a = \rho a l_a \frac{A}{a} \omega^2 r \cos\theta; \quad \rho g H_{ar} a = \rho a l_r \frac{A}{a} \omega^2 r \cos\theta, \qquad (10.18.3)$$

de unde rezultă $H_{aa} = \frac{l_a}{g} \frac{A}{a} \omega^2 r \cos\theta$, $H_{ar} = \frac{l_r}{g} \frac{A}{a} \omega^2 r \cos\theta$. (10.18.4)

Deplasarea pistonului depinde de asemenea de $\cos\theta$, astfel încît, dacă variația lui H_{aa} sau H_{ar} este desenată în diagrama indicată, va rezulta o linie dreaptă. Deci, la începutul cursei de aspirație, $\theta = 0$ și $H_{aa} = \frac{l_a}{g} \cdot \frac{A}{a} \omega^2 r$, la jumătatea cursei, $\theta = 90°$ și $H_{aa} = 0$, iar la sfîrșitul cursei, $\theta = 180°$ și $H_{aa} = -\frac{l_a}{g} \cdot \frac{A}{a} \omega^2 r$.

Reprezentînd aceasta, diagrama indicată va arăta ca în figura 10.18, *c*. Efectul accelerării produce o creștere a sarcinii de aspirație de la *ab* la *ab'*, la începutul cursei, și o scădere de la *dc* la *dc'*, la sfîrșitul ei.

Scanned with OKEN Scanner

Creşterea sarcinii la aspiraţie la ab' duce la creşterea tendinţei de apariţie a cavitaţiei şi, deoarece H_{aa} depinde de a, există un maxim al vitezei unghiulare (ω_{max}), deasupra căreia se produce cavitaţie.

Similar, în cursa de refulare, presiunea creşte la începutul cursei cu $H_{ar} = \frac{l_r}{g} \cdot \frac{A}{a} \omega^2 r$, respectiv scade la sfîrşitul cursei cu aceeaşi valoare.

Se menţionează că aria diagramei indicate, respectiv puterea cedată de pompă lichidului, rămîn constante.

Pierderea de sarcină pe conducta de aspiraţie, respectiv de refulare, în orice punct al cursei, depinde de viteza din conductă şi se poate calcula cu formula lui Darcy,

$$h_{ra} = \lambda_a \frac{l_a}{D_a} \frac{V^2}{2g} = \frac{\lambda_a l_a}{2gD_a} \left(\frac{A}{a} \omega r \sin \theta \right)^2, \qquad (10.18.5)$$

$$h_{rr} = \lambda_r \frac{l_r}{D_r} \frac{V^2}{2g} = \frac{\lambda_r l_r}{2gD_r} \left(\frac{a}{A} \omega r \sin \theta \right)^2. \qquad (10.18.6)$$

Reprezentînd această variaţie în diagrama indicată, se obţine o parabolă. Astfel, la aspiraţie, la începutul şi la sfîrşitul cursei, $\sin \theta = 0$ şi deci $h_{,a} = 0$ iar la jumătatea cursei, $\theta = 90°$ şi $h_{ra} = \frac{\lambda_a l_a}{2gD_a} \left(\frac{A}{a} \omega r \right)^2$. Similar, la cursa de refulare, maximul pierderilor de sarcină $h_{rr} = \frac{\lambda_r l_r}{2gD_r} \left(\frac{A}{a} \omega r \right)^2$ se produce la jumătatea cursei, iar la capetele cursei acestea sînt nule. Reprezentarea variaţiei sarcinii în funcţie de unghiul manivelei este dată în figura 10.18, *d*, fiind reprezentate şi efectul accelerării, respectiv al pierderilor de sarcină.

Efectul pierderilor de sarcină este de a creşte aria diagramei indicate, deci a puterii cedate de pompă lichidului. Deoarece centrul de greutate al parabolei se găseşte la 2/3 din ordonata maximă, sarcina suplimentară datorită pierderilor de sarcină H_{ra} este

$$H_{ra} = \frac{2}{3} h_{ra} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\lambda_a l_a}{2gD_a} \left(\frac{A}{a} \omega r \right)^2, \qquad (10.18.7)$$

respectiv, pentru conducta de refulare,

$$H_{rr} = \frac{2}{3} h_{rr} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\lambda_r l_r}{2gD_r} \left(\frac{A}{a} \omega r \right)^2. \qquad (10.18.8)$$

Cu aceasta, puterea pompei este

$$P = \rho g Q (H_{ga} + H_{gr} + H_{ra} + H_{rr}) = \rho g Q \left(H_{ga} + H_{gr} + \frac{2}{3} h_{ra} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} h_{rr} \right).$$

Cavitaţia se va produce la începutul cursei de aspiraţie dacă presiunea în cilindru scade sub $p_1 = 23{,}5$ kPa. Presiunea în cilindru este

$$p_c = p_{at} - \rho g (H_{ga} + H_{aa} + H_{ra}), \qquad (10.18.9)$$

iar la începutul cursei de aspiraţie devine

$$p_c = p_{at} - \rho g \left(H_{ga} + \frac{l_a}{g} \cdot \frac{A}{a} \omega^2 r \right),$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece pierderea de sarcină este nulă. De aici rezultă viteza unghiulară maximă pentru $p_c = p_1$

$$\omega_{max} = \sqrt{\left(\frac{p_{at} - p_1}{\rho g} - H_{ga}\right)\frac{g}{rl_a}\cdot\frac{a}{A}}. \qquad (10.18.10)$$

În cazul considerat, $H_{ga} = 2$ m, $H_{gr} = 45$ m, iar sarcinile suplimentare necesare pentru accelerarea lichidului sînt date de expresiile (10.18.4) care, la începutul cursei, devin

$$H_{aa} = \frac{l_a}{g}\cdot\frac{A}{a}\omega^2 r = \frac{5}{9{,}81}\left(\frac{0{,}2}{0{,}15}\right)^2\cdot\left(\frac{\pi\cdot 20}{30}\right)^2\cdot 0{,}3 = 1{,}2 \text{ m},$$

$$H_{ar} = \frac{l_r}{g}\cdot\frac{A}{a}\omega^2 r = \frac{75}{9{,}81}\left(\frac{0{,}2}{0{,}15}\right)^2\cdot\left(\frac{\pi\cdot 20}{30}\right)^2\cdot 0{,}3 = 17{,}9 \text{ m}.$$

Sarcinile suplimentare, necesare pentru acoperirea pierderilor de sarcină sînt (10.18.7) şi (10.18.8).

$$H_{ra} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\lambda_a l_a}{2gD_a}\left(\frac{A}{a}\omega r\right)^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{0{,}038\cdot 5}{2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}15}\left[\left(\frac{0{,}2}{0{,}15}\right)^2\frac{\pi\cdot 20}{30}\cdot 0{,}3\right]^2 = 0{,}05 \text{ m},$$

$$H_{rr} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\lambda_r l_r}{2gD_r}\left(\frac{A}{a}\omega r\right)^2 = \frac{2}{3}\frac{0{,}038\cdot 75}{2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}15}\left[\left(\frac{0{,}2}{0{,}15}\right)^2\frac{\pi\cdot 20}{30}\cdot 0{,}3\right]^2 = 0{,}8 \text{ m}.$$

Debitul pompei este $Q = \frac{\pi D^2}{4} s\frac{n}{60} = \frac{\pi\cdot 0{,}2^2}{4}\cdot 0{,}6\cdot\frac{20}{60} = 0{,}0063 \text{ m}^3/\text{s} = 6{,}3 \text{ l/s}.$

Puterea pompei este $P = \rho g Q(H_{ga} + H_{gr} + H_{ra} + H_{rr}) = 9{,}81\cdot 10^3\cdot 6{,}3\cdot$

$$\cdot 10^{-3}(2 + 45 + 0{,}05 + 0{,}8),$$

$P = 2{,}96$ kW.

Turaţia maximă a pompei se obţine din relaţia (10.18.10)

$$\omega_{max} = \sqrt{\left(\frac{p_{at} - p_1}{\rho g} - H_{ga}\right)\frac{g}{r\cdot l_a}\cdot\frac{a}{A}},$$

$$\omega_{max} = \sqrt{\left(\frac{101\,325 - 23\,500}{9{,}81\cdot 10^3} - 2\right)\frac{9{,}81}{0{,}3\cdot 5}\left(\frac{0{,}15}{0{,}2}\right)^2} = 21{,}8 \text{ s}^{-1},$$

de unde $$n_{max} = \frac{30\cdot\omega_{max}}{\pi} = \frac{30\cdot 21{,}8}{\pi} = 208 \text{ rot/min}.$$

Problema 10.19. Într-o instalaţie de alimentare cu apă, se foloseşte o pompă în dublu flux, ce funcţionează la debitul maxim $Q = 0{,}2$ m³/s. Producătorul pompei indică pentru acest debit $NPSH_i = 4$ m.c.H_2O, (net positive suction head — înălţimea netă pozitivă de aspiraţie interioară). Să se determine înălţimea geometrică de aspiraţie, H_{gs}, la care trebuie montată pompa ($H_{gs} = z_r - z_0$, diferenţa de cotă dintre axul rotorului pompei şi suprafaţa rezervorului de aspiraţie), dacă pierderea de energie pe conducta de aspiraţie este $h_{ra} = 9{,}2$ m.c.H_2O, iar presiunea la suprafaţa rezervorului de aspiraţie este cea atmosferică. Se cunoaşte presiunea de vaporizare la temperatura de funcţionare, $\theta° = 20°C$, $p_v = 0{,}024$ bar.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare : La viteze mari de curgere, în zona rotorului pompei, presiunea poate scădea sub presiunea de vaporizare, producîndu-se astfel fenomenul de cavitaţie (de regulă uzura cavitaţională apare prima dată în spatele muchiei de intrare a palei rotorului). Pentru evitarea apariţiei acestui fenomen dăunător funcţionării aparaturii hidraulice, în cazul pompelor centrifuge, trebuie îndeplinită condiţia :

$$NPSH_e \geqslant NPSH_i^*,$$

în care $NPSH_e$ reprezintă înălţimea netă pozitivă de aspiraţie exterioară, mărime funcţie numai de parametrii geometrici şi funcţionali ce pot fi determinaţi independent de construcţia pompei. Prin definiţie,

$$NPSH_e = (p_0 - p_v)/\gamma - H_{gs} - h_{ra}, \qquad (10.19.1)$$

unde p_0 reprezintă presiunea la suprafaţa rezervorului de aspiraţie, $p_0 = p_{at}$.

La limită, se obţine

$$10{,}13 - 0{,}24 - H_{gs}^m - 9{,}2 = 4, \text{ deci } H_{gs}^m = -3{,}31 \text{ m}$$

(în acest caz pompa se montează „înecată", $z_0 > z_r$).

În practică, este indicat să se micşoreze înălţimea geometrică de aspiraţie obţinută prin calcul cu 20—30%.

Rezultă $H_{gs} = 1{,}25\ H_{gs}^m = -4{,}14$ m.

---

* Ganea, N. Alegerea, exploatarea, întreţinerea şi repararea pompelor. Bucureşti, Editura Tehnică, 1981.

Scanned with OKEN Scanner

ANEXE

Scanned with OKEN Scanner

Anexa A.0

Fie $\mathcal{D}(t)$ un domeniu material închis de suprafaţa $\partial\mathcal{D}(t)$ şi $\Phi(\vec{r}, t)$ un cîmp continuu, funcţie de poziţie şi timp, în domeniul $\mathcal{D}(t)$ şi pe frontierea $\partial\mathcal{D}(t)$; $\vec{n}$ normala exterioară la suprafaţa $\partial\mathcal{D}(t)$. Atunci există :

A.0.1. Lema integralei nule

Dacă pentru orice $\mathcal{D}_t \subset \mathcal{D}$, $\int_{\mathcal{D}_t} \Phi(\vec{r}, t)\mathrm{d}\mathcal{V} = 0$, atunci $\Phi(\vec{r}, t) \equiv 0$ în $\mathcal{D}$.

A.0.2. Formula lui Gauss-Ostrogradski $\int_{\partial\mathcal{D}} \Phi(\vec{r}, t)\vec{n}\mathrm{d}A = \int_{\mathcal{D}} \nabla\, \Phi(\vec{r}, t)\mathrm{d}\mathcal{V}$.

A.0.3. Formula transportului Reynolds

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathcal{D}(t)} \Phi(\vec{r}, t)\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial\Phi(\vec{r}, t)}{\partial t}\mathrm{d}\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{D}(t)} \Phi(\vec{r}, t)\vec{v}\vec{n}\mathrm{d}A.$$

Anexa A.1

A.1.1. Unităţi de măsură pentru presiune, exprimate în MPa :

p	1Pa	1bar	1at=1 kgf/cm²	1 At=1 atm	1 torr = =1 mm·c·Hg	1m·c·H_2O	1 dyn/cm²
MPa	10^{-6}	0,1	0,0980665	0,101325	$0{,}133322\cdot10^{-3}$	$9{,}81\cdot10^{-3}$	10^{-7}

1lbf/cm² = 1 psi = $6{,}8947\ 10^{-3}$ MPa.

A.1.2. Unităţi de măsură pentru viscozitatea cinematică şi dinamică :

[ν] 1 Stokes = 1 cm²/s = 10^{-4} m²/s, 1 cSt = 10^{-6} m²/s,
1 cSt = $1{,}07\cdot10^{-5}$ ft²/s.

ν[cSt] = 7,32 E° — 6,31/E°, E° = grad Engler.

[η] 1 Poise = 1 g/(cm/s) = 0,1 Pas, 1 cP = 10^{-3} Pas,
1 cP = $6{,}72\cdot10^{-4}$ lb/(ft s).

A.1.3. Viscozitatea cinematică a apei în funcţie de temperatură la presiunea de 0,0981 MPa :

θ°C	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
ν [cSt]	1,8	1,3	1	0,805	0,66	0,55	0,48	0,41	0,36	0,33	0,295

Scanned with OKEN Scanner

A.1.4. Viscozitatea cinematică a aerului în funcţie de temperatură la presiunea de 0,1013 MPa

θ°C	−20	0	20	40	60	80	100	150	200
ν [cSt]	11,66	13,20	15	16,98	18,85	20,89	23	30	34,90

A.1.5. Viscozitatea cinematică a diverselor uleiuri lubrifiante :

Ulei aditivat pentru motoare de avion, AVI 15 A, $\nu = 14 \div 16{,}5$ cSt la 98,9°C.

Ulie de rodaj, *R*-45, $\nu = 45 \div 55$ cSt la 50°C.

Uleiuri pentru lagăre (la 50°C) :

Ulei tip	L 35	L 65	L 95	L 140
ν [cSt]	29—45	61—76	91—102	140—152

Ulei pentru sisteme hidrostatice, H 41, $\nu = 41$—49 cSt la 50°C.

Ulei unic pentru motoare auto tip M 20 W/40 :

θ°C	−18	50	100
ν [cSt]	10 000	80	13

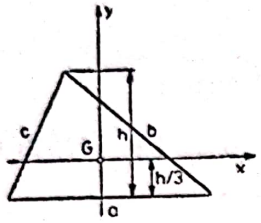
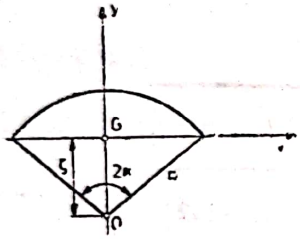
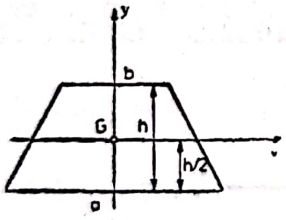
A.1.6. Modulul de elasticitate pentru diverse lichide *E* [MPa], la temperatura de 50°C :

apă	2 096 ;
benzină	1 373 ;
ulei de turbină	1 716 ;
ulei de maşină	1 304 ;
motorină	1 324.

Scanned with OKEN Scanner

Anexa A.2

Poziția centrelor de greutate și expresia momentelor de inerție pentru diferite suprafețe* :

Suprafață	Moment de inerție	
	I_x	I_y
	$\frac{ah^3}{36}$	$\frac{ah}{2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{36}-\frac{h^2}{18}\right)$
 $\zeta=\frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}$	$\frac{\alpha R^4}{4}\left(1-\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$	$\frac{\alpha R^4}{4}\left(1-\frac{16}{9}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$
	$\frac{h^3}{36}\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}$	$(a+b)(a^2+b^2)\frac{h}{48}$

Anexa A.3

Coeficientul de pierdere locală de sarcină prin diafragmă ζ_1 pentru $\mathbf{Re} = V_0 4R_{h0}/\nu \geqslant 10^5$.

$$\zeta_1 = \frac{\Delta p}{\rho V_1^2/2} \cong (1 + 0{,}707\sqrt{1 - A_0/A_1} - A_0/A_1)^2 (A_1/A_0)^2,$$

unde A_0 — aria diafragmei ; A_1 — aria conductei ;
$R_{h0} = A_0/P_0$ — raza hidraulică a diafragmei ;
P_0 — perimetrul diafragmei.

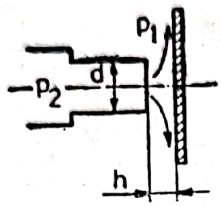
* Pentru alte suprafețe și volume : Manualul inginerului. București, Editura Tehnică, 1966.

Scanned with OKEN Scanner

Anexa A.4

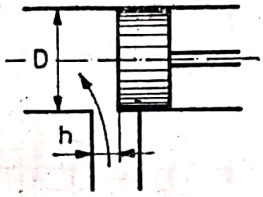
A.4.1. Coeficientul de debit duză-paletă :

$$Q = \mu \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}}$$



h/d	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
μ	0,35	0,6	0,71	0,78	0,8

A.4.2. Coeficientul de debit pentru distribuitor cu muchii ascuțite :



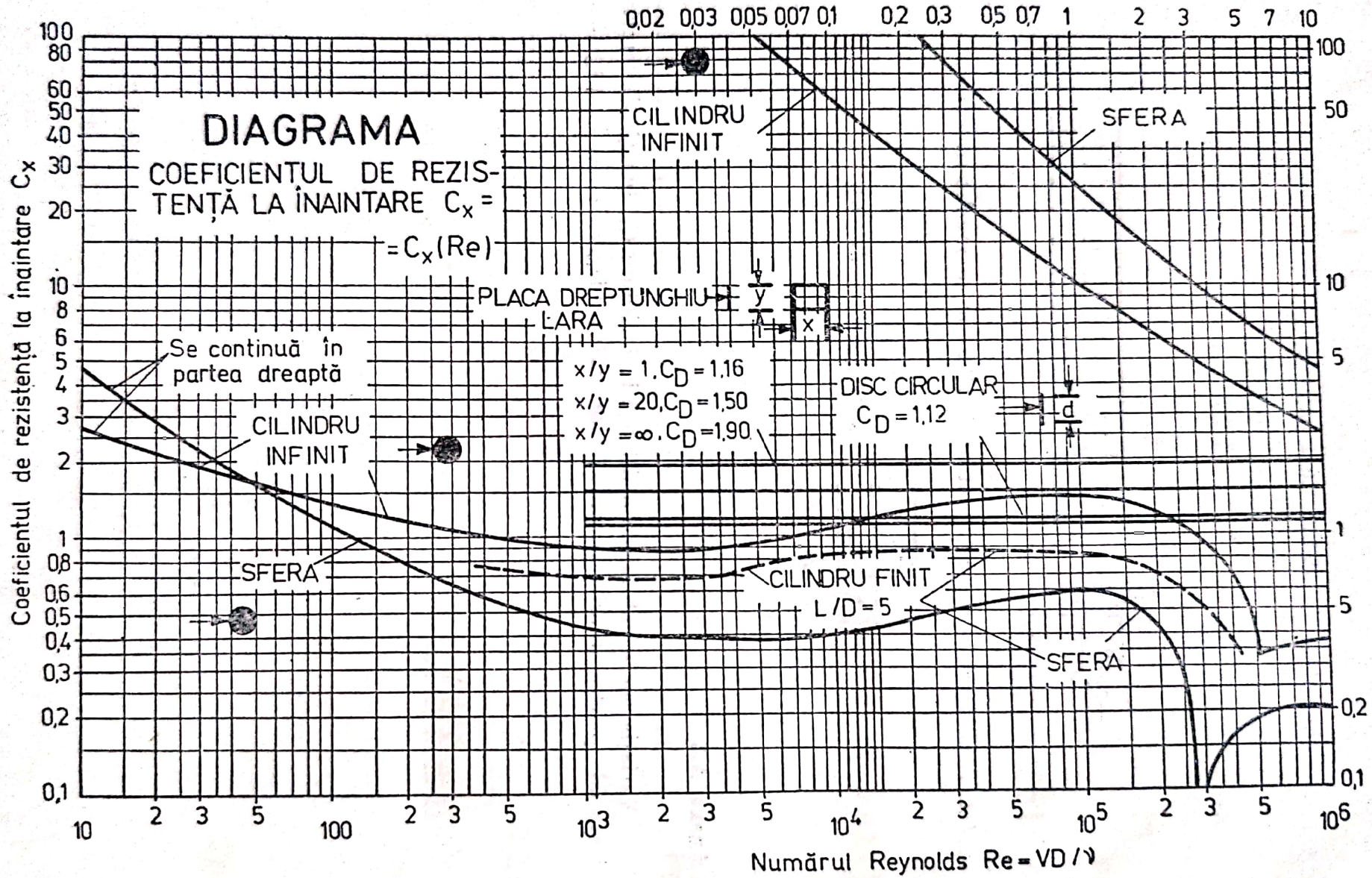
$h/D < 0{,}1, \quad \mu = 0{,}61.$

Anexa A.5

Variația coeficientului de rezistență la înaintare C_x, funcție de numărul Reynolds pentru diferite corpuri (a se vedea diagrama de la pag. 312).

Scanned with OKEN Scanner

Anexa A.5



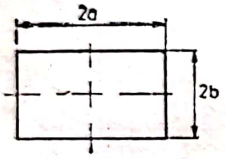
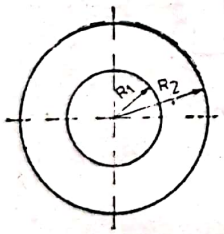
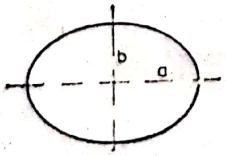
Scanned with OKEN Scanner

Anexa A.6*

Expresia debitului şi a coeficientului pierderilor liniare de sarcină a lui Darcy pentru conducte de diferite secţiuni :

$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot 4R_h}{\nu}; \quad h_r = \lambda \frac{l}{4R_h} \frac{V^2}{2g}; \quad \lambda = k\lambda_0; \quad V = \frac{Q}{A}.$$

λ_0 coeficientul lui Darcy pentru conducte circulare.

<table>
<tr><th>Secţiunea</th><th>R_h – Raza hidraulică</th><th>Debitul</th></tr>
<tr><td> 
</td><td>$\frac{ab}{a+b}$</td><td>$\mathrm{Re} < 2\,000, \quad Q = f(a/b)\frac{\Delta p}{4\eta l} a^2 b^2$
<table><tr><td>a/b</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td><td>10</td><td>20</td></tr><tr><td>f</td><td>2,25</td><td>1,83</td><td>0,93</td><td>–</td><td>0,5</td><td>–</td></tr><tr><td>$\lambda\mathrm{Re}$</td><td>56,9</td><td>62,2</td><td>–</td><td>78,8</td><td>84,7</td><td>89,9</td></tr></table>$\mathrm{Re} > 2\,000, \quad k \cong 1.$</td></tr>
<tr><td> 
</td><td>$\frac{R_2 - R_1}{2}$</td><td>$\mathrm{Re} < 2\,000, \quad Q = \frac{\pi \Delta p}{8\eta l}\left[R_2^4 - R_1^4 + \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln(R_1/R_2)}\right]$
<table><tr><td>R_2/R_1</td><td>1,5</td><td>2,5</td><td>5</td><td>20</td><td>100</td><td>∞</td></tr><tr><td>$\lambda\mathrm{Re}$</td><td>96</td><td>94,7</td><td>92,3</td><td>86,3</td><td>80,1</td><td>64</td></tr></table>$\mathrm{Re} > 2\,000; \quad \lambda = (0{,}02R_1/R_2 + 0{,}98)(1/\lambda_0 - 0{,}27R_1/R_2 + 0{,}1)$</td></tr>
<tr><td> 
</td><td>$\frac{ab}{\frac{3(a+b)}{2} - \sqrt{ab}}$</td><td>$\mathrm{Re} < 2\,000, \quad Q = \frac{\pi a^3 b^3}{a^3 + b^3} \frac{\Delta p}{4\eta l}$
$k = 1/8(4R_h/b)^2[1 + (b/a)^2]$
$\mathrm{Re} > 2\,000, \quad k \cong 1$</td></tr>
</table>

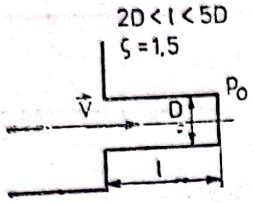
* Idelcik, I. E. Îndrumător pentru calculul rezistenţelor hidraulice. Bucureşti, Editura Tehnică, 1984.

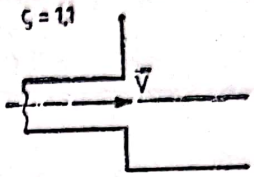
Scanned with OKEN Scanner

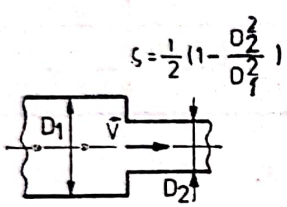
Anexa A.7

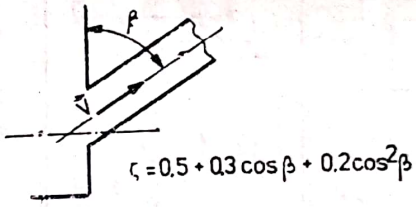
A.7.1. Diagrama Moody pentru determinarea coeficientului lui Darcy pentru conducte circulare în funcţie de numărul Reynolds şi rugozitatea conductei k, $\lambda = \lambda(\mathbf{Re}, k/D)$ (a se vedea diagrama de la pag, 315).

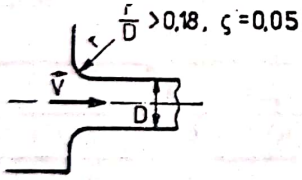
A.7.2. Coeficienţi de pierdere locală de sarcină $h_r = \zeta \frac{V^2}{2g}$:

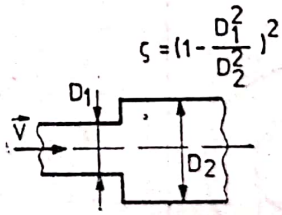


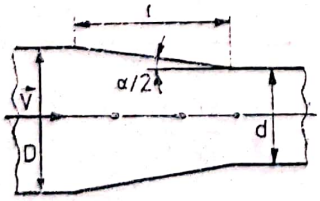








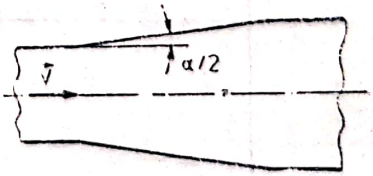




$$\zeta = \varkappa \cdot \lambda \frac{l}{D} + \zeta'$$

$$\varkappa = \frac{n(n^4-1)}{4(n-1)}, \quad n = \frac{D}{d}$$

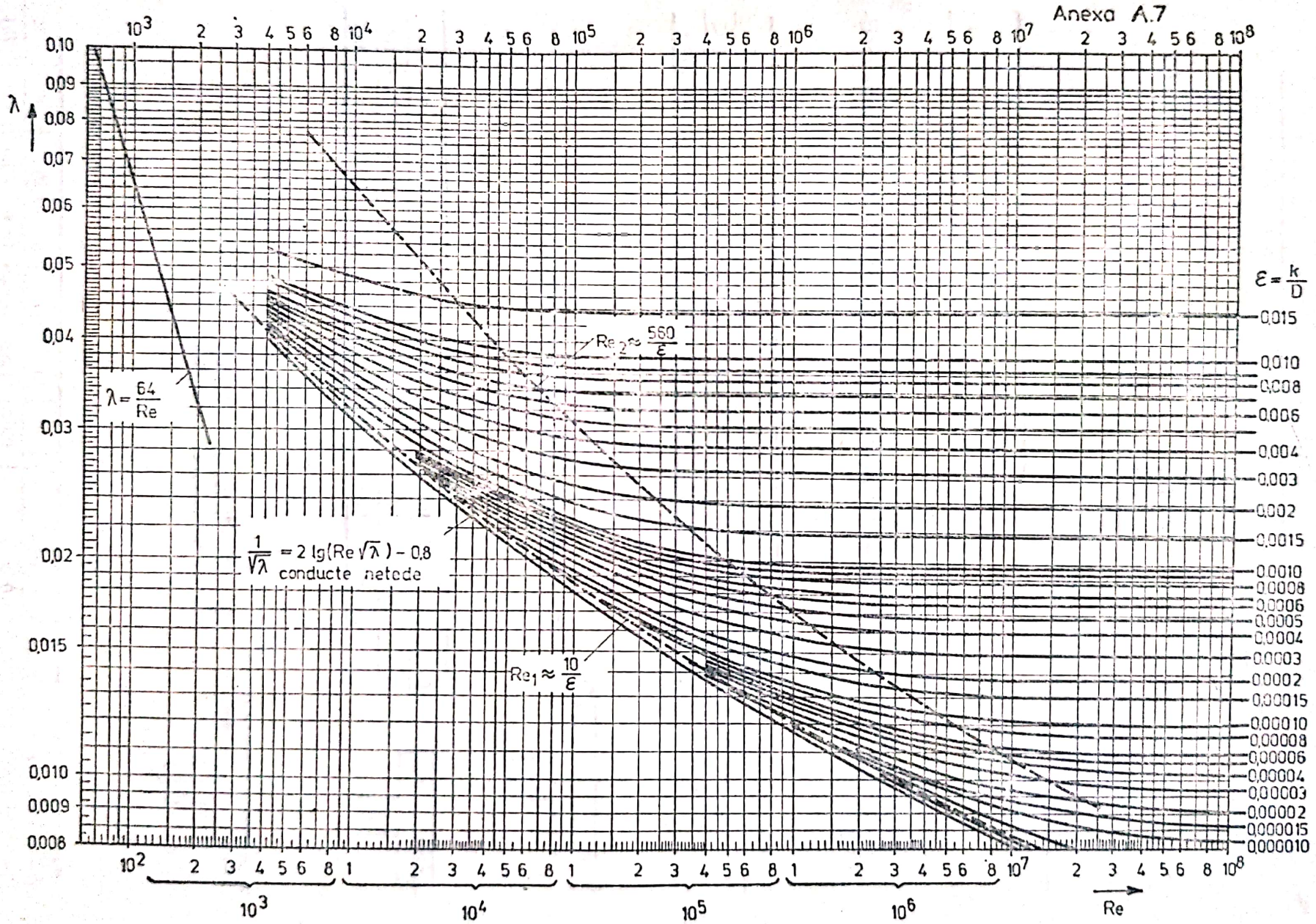
ζ' \ n (α°)	1,15	1,50	2	2,5
6°	0,006	0,085	0,5	1,5
10°	0,012	0,20	1,05	3,4
20°	0,045	0,60	3,5	11
30°	0,280	1,25	7	-



$$\zeta = \frac{4}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

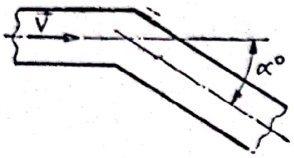
Scanned with OKEN Scanner

Anexa A.7



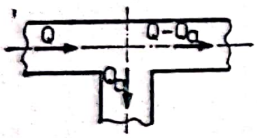
Scanned with OKEN Scanner

α° \ r/d	1	1,5	2	3	4
22,5°	0,11	0,1	0,09	0,08	0,08
45°	0,19	0,17	0,16	0,15	0,15
60°	0,25	0,22	0,21	0,2	0,19
90°	0,33	0,29	0,27	0,26	0,26
135°	0,41	0,36	0,35	0,35	0,35
180°	0,48	0,43	0,42	0,42	0,42

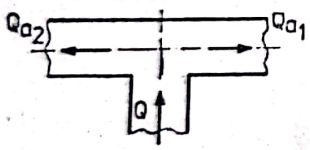


α°	22,5	30	45	60	75	90
ζ	0,17	0,2	0,4	0,7	1	1,5

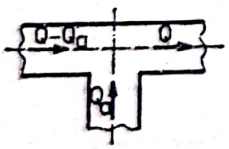
ζ_1 : coeficient relativ la derivaţie, ζ_2 : coeficient relativ la porţiunea rectilinie



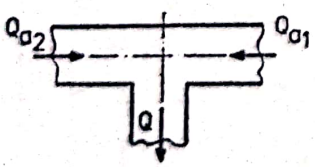
Q_a/Q	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1
ζ_1	(1)	1	1,01	1,03	1,05	1,09	1,15	1,32	1,45
ζ_2	0	0,004	0,02	0,04	0,06	0,1	0,15	0,26	(0,4)



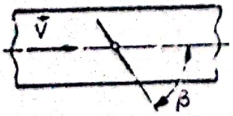
$$\zeta_1 = 1 + 0{,}3(Q_{a1}/Q)^2, \quad \zeta_2 = 1 + 0{,}3(Q_{a2}/Q)^2$$



Q_a/Q	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1
ζ_1	−0,6	−0,37	−0,18	−0,07	0,26	0,46	0,62	0,94	1,2
ζ_2	0	0,16	0,27	0,38	0,46	0,53	0,57	0,6	0,55

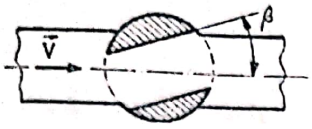


$$\zeta_1 = 2 + 3[(Q_{a1}/Q)^2 - Q_{a1}/Q]$$
$$\zeta_2 = 2 + 3[(Q_{a2}/Q)^3 - Q_{a2}/Q]$$

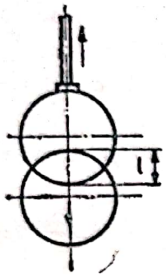


β°	0—5	10	20	30	40	50	60	70
ζ	0,25—0,3	0,52	1,54	3,91	10,8	32,6	118	751

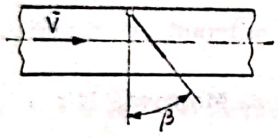
Scanned with OKEN Scanner



β°	10	20	30	40	45	50	55
ζ	0,31	1,84	6,15	20,7	41	95,3	275



l/d	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
ζ	0,12	0,15	0,26	0,81	2,06	5,52	17	98



β°	15	20	30	40	45	50	60	70
ζ	90	62	30	14	9,5	6,6	3,2	1,7

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. *Berker, R.* **Integration des ecuations du mouvement de un flouide visqeux incompresible. Handbuch der Physik Band VIII/2.** Springer-Verlag, 1963.
2. *Bird, B. R. ş.a.*. **Transport Phenomena.** A Willey International, 1960.
3. *Duckworth, R. A.* **Mechanics of Fluids.** Londra, Longman, 1977.
4. *Florea, J.* şi *Panaitescu, V.* **Mecanica fluidelor.** Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică, 1979.
5. *Iacob, C.* **Introduction mathematique a la mecanique des fluides.** Editura Academiei Bucureşti şi Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1959.
6. *Ionescu, D., Isbăşoiu, E. C., Ioniţă, I.* **Mecanica fluidelor şi maşini hidraulice.** Bucureşti, Editura Didactică şi Pedagogică, 1974.
7. *Kay, J. M., Nederman, R. M.* **Fluid Mechanics and Heat Transfer.** Cambridge University Press, 1974.
8. *Kukolevski, I. I., Podvidza, L. G.* **Sbornic zadaci po maşinostroitelnoi ghidravlike.** Moscova, Maşinostroenie, 1981.
9. *Nekrasov, B., Fabrikant, N., Kocerghin, A.* **Problems in Hydraulics.** Moscova, Mir Publishers, 1974.
10. *Roman, P.* **Introducere în fizica poluării fluidelor.** Bucureşti, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1980.

Scanned with OKEN Scanner

ÎN EDITURA TEHNICĂ vor apărea :

TRANSMISII HIDRAULICE ȘI ELECTROHIDRAULICE
de N. Vasiliu și I. Catană

HIDRODINAMICA TURBINELOR BULB
ȘI A TURBINELOR POMPE BULB
de I. Anton, V. Câmpian și I. Carte

TEHNOLOGIA DE FABRICAȚIE A ELEMENTELOR HIDRAULICE
ȘI PNEUMATICE
de V. Marin ș.a.

ACȚIONĂRI ȘI AUTOMATIZĂRI HIDRAULICE.
MODELARE, SIMULARE ȘI ÎNCERCARE.
de A. Oprean ș.a.

Scanned with OKEN Scanner

Condiţia de bază în efectuarea amputaţiei radiculare este ca pe lîngă posibilitatea efectuării tratamentului endodontic şi obturaţiei corecte pe rădăcinile restante, acestea să fie solid implantate în os, cu un parodonţiu sănătos, astfel încît să suporte o lucrare protetică, servind ca stîlpi de punte sau pentru ancorajul unor croşete.

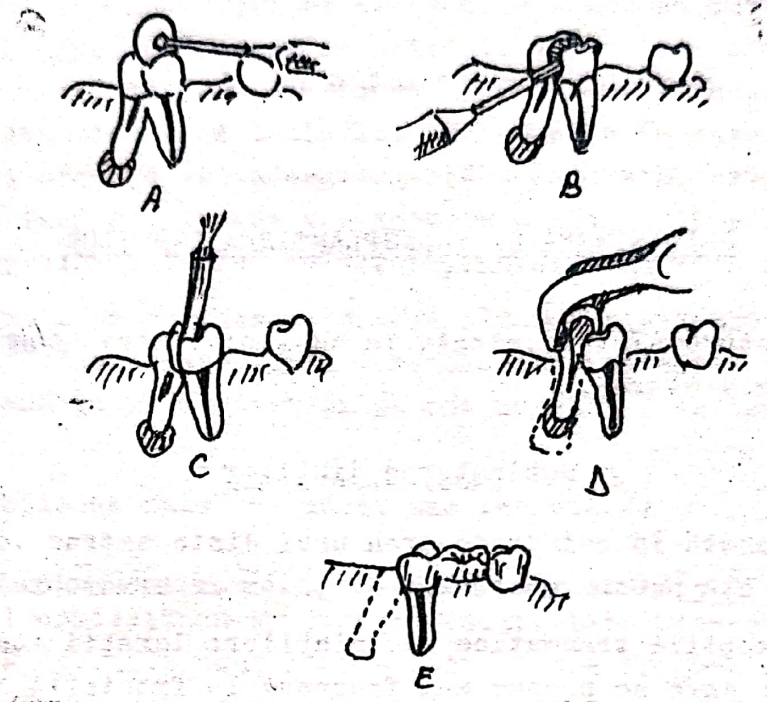


Fig.4.7. Amputaţia radiculară la molarii inferiori (premolarizarea): A.Secţionarea coronară transversală cu piatra lenticulară; B.Completarea secţionării cu freza; C.Despicarea podelei camerei pulpare cu dăltiţa ; D. Extracţia rădăcinii cu îndepărtarea procesului patologic; E. Rădăcina mezială rămasă este folosită ca stîlp de punte.

CAPITOLUL V

REPLANTAREA SI TRANSPLANTAREA DINTILOR

Aceste metode sînt încadrate în capitolul mare denumit cu termenul impropriu de "grefe dentare".

Replantarea dinţilor

Metoda constă în reintroducerea unui dinte extras în alveola sa proprie. Este indicată pentru păstrarea dinţilor în următoarele două situaţii:

a. în luxaţiile traumatice ale dinţilor: luxaţii accidentale prin căderi sau lovituri care se produc mai frecvent la frontali; luxaţii ale dinţilor sănătoşi vecini sau antagonişti ca accidente de extracţie; extracţia din eroare a unui dinte integru;

b. în procesele periapicale care nu pot fi vindecate prin terapia endodontică singură sau asociată cu celelalte metode chirurgicale (rezecţie apicală, chiuretaj etc). Această replantare terapeutică este indicată la dinţii multiradiculari cu gangrene pulpare simple, în care tratamentul este împiedicat de imposibilitatea unui acces corect pe canale (canale curbe, strîmte, corpi străini), în gangrenele complicate cu procese cronice periapicale sau cu procese interradiculare; în perforaţiile accidentale ale rădăcinilor.

Metoda este indicată de preferinţă la tineri, care oferă condiţii necesare unei bune refaceri şi restructurări parodontale. Este necesar ca dintele care va fi replantat să aibă rădăcina integră pe cel puţin 2/3 din lungimea sa şi de asemenea ca pereţii alveolei respective să fie intacţi.

In luxaţiile traumatice, replantarea va fi practicată cît mai aproape de momentul traumatismului; se pot face totuşi şi replantări tardive, chiar după cîteva zile de la luxaţia dintelui.

Replantările terapeutice vor fi efectuate în aceeaşi şedinţă cu extracţia dintelui.

Metoda nu trebuie folosită la bolnavii cu afecţiuni generale care contraindică intervenţiile chirurgicale şi în stările care sînt defavorabile procesului de vindecare şi de integrare a dintelui replantat (diabet, afecţiuni cardiovasculare, vîrstă avansată etc), precum şi în bolile de focar în

care există suspiciunea legăturii cu infecţia de origină dentară. De asemenea, metoda este contraindicată în stările patologice locale care ar compromite integrarea dintelui (parodontopatii marginale evolutive, afecţiuni acute ale mucoasei bucale, leziuni periapicale voluminoase, fracturi ale procesului alveolar).

In stabilirea indicaţiilor se va ţine seama de datele pe care le oferă examenul radiografic în ceea ce priveşte dispoziţia rădăcinilor, starea osului alveolar, raporturile cu elementele învecinate (sinus, canal mandibular), întinderea leziunilor periapicale. In cazurile în care se constată că rădăcinile au o divergenţă sau o convergenţă accentuată, care nu ar permite ca extraţia să se facă cu conservarea integră a rădăcinilor, a pereţilor alveolari şi a septului interradicular, replantarea nu este indicată.

Preoperator se va face o asanare cît mai riguroasă a cavităţii bucale. In replantările terapeutice, dacă dintele respectiv prezintă o carie deschisă cu gangrenă va fi curăţat şi pe cît posibil aseptizat mecanic şi chimic.

Intervenţia se face sub anestezie regională.

Tehnica replantării dinţilor luxaţi accidental. Se completează curăţirea alveolei controlîndu-se pereţii osoşi. Este necesar ca aceştia să fie intacţi sau să prezinte doar simple fisuri fără fragmente mobile, dătaşate, astfel încît să asigure un pat de implantare bine constituit, de jur împrejur.

Dacă bolnavul vine în primele ore, dintele este spălat cu un jet de ser fiziologic călduţ şi ţinut timp de 10 minute într-o soluţie de penicilină 100.000 u/ml. Dacă luxaţia este mai veche de 24 ore, după spălare cu ser fiziologic, dintele va fi menţinut într-o soluţie antiseptică (cloramină, rivanol, tripanflavină) sau în soluţie poliantibiotică (penicilină + streptomicină) timp de 1/2 - 1 oră. Unii autori recomandă chiar sterilizarea dintelui prin fierbere.

Se face apoi îndepărtarea conţinutului camerei pulpare şi obturaţia dintelui, care pot fi efectuate pe cale coronară obişnuită sau pe cale retrogradă, prin foramenul apical. Se lărgeşte canalul cu ace kerr pe toată întinderea sa. Obturaţia se face cu ciment iodoformat şi con de gutaperoă. Rădăcina este lăsată ca atare sau se face o rezecţie limitată, a apexului, cu netezirea îngrijită a suprafeţei de secţiune. Rezecţia apexului nu este indispensabilă în luxaţiile traumatice, deoarece canalioulele deltei apicale nu sînt infectate aşa cum se întîmplă în complicaţiile gangrenei pulpare.

Dintele astfel pregătit este introdus în alveolă căutînd ca prin mici mişcări de tatonare, să fie aşezat în poziţie corectă.

După replantare, dinţii monoradiculari vor fi imobilizaţi fie prin ligaturi de sîrmă în "8", fie prin inele ortodontice sudate între ele şi fixate prin cimentare pe dinţii vecini sănătoşi, fie prin gutiere acrilice cimentate.

S-au obţinut rezultate de durată în replantările posttraumatice ale dinţilor frontali prelungindu-se rădăcina cu tije groase de 1-2 mm din tantal sau din oţel inoxidabil. Tijele sînt introduse în camera pulpară şi cimentate odată cu obturaţia iar capetele lor care prelungesc de fapt rădăcina clinică a dintelui replantat cu 5-6 mm sînt introduse şi fixate în os. In acest caz introducerea dintelui în alveolă se face pînă la un moment dat liber apoi cînd tijele au ajuns în fundul alveolei se introduc în continuare în os aplicînd lovituri de ciocan pe coroana dintelui.

Tehnica replantării terapeutice (Fig.5.1.).

a. Se face extracţia dintelui căutînd să se producă cît mai puţine leziuni ale mucoasei şi osului alveolar, iar rădăcinile dintelui să rămînă intacte.

Se înlătură elementele patologice din alveolă printr-un chiuretaj care se va limita numai la fundul alveolei menajîndu-se pereţii laterali, în scopul conservării fibrelor parodonţiului.

Se protejează alveola cu un tampon steril.

b. Tratamentul endodontic extraalveolar . Se îndepărtează resturile din pulpa coronară şi radiculară şi se completează tratamentul mecanic radicular şi coronar. Pentru aceasta dintele va fi învelit într-o compresă îmbibată în ser fiziologic penicilinat şi ţinut fie cu degetele de partea sa coronară, fie cu cleştele de extracţie, cu fălcile bine adaptate la nivelul coletului, astfel încît să se menajeze parodonţiul de pe suprafeţele radiculare.

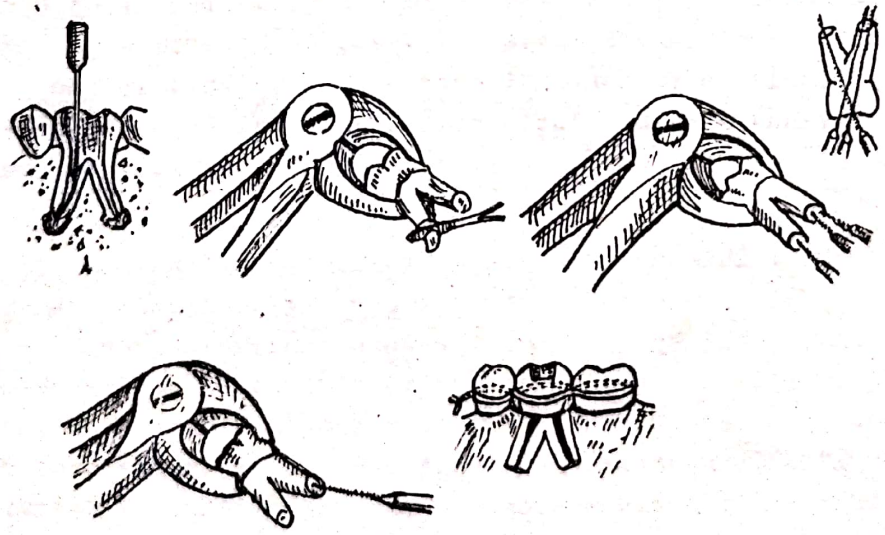


Fig.5.1. Replantarea terapeutică: A.Molar inferior cu procese periapicale cronice şi rădăcini divergente necateterizabile. B.Molarul extras, ţinut în cleşte - se face rezecţia apexurilor. C. Tratamentul mecanic de canal pe cale retrogradă. D.Tratamentul mecanic pe cale coronară. E.Obturaţia canalelor. F.Molarul repus în alveolă şi imobilizat cu ligatură de sîrmă "în 8".

Accesul pe canale se face pe cale directă sau pe cale retrogradă. Pentru a uşura accesul şi obturaţia şi pentru a îndepărta zona deltei apicale care este îmbibată cu germenii din gangrena pulpară se practică o rezecţie limitată a apexului. Obturaţia canalelor se face cu ciment iodoformat şi con de gutapercă, iar a cavităţii coronare cu amalgam sau cu silicat dur,

c. Se îndepărtează tamponul supraalveolar făcîndu-se un nou control şi evacuarea eventualelor cheaguri formate.

Se reintroduce dintele în alveolă prin mişcări de tatonare şi împingere progresivă.

După replantarea dinţilor pluriradiculari, imobilizarea nu este indispensabilă, deoarece aceştia rămîn fixaţi prin însăşi dispoziţia anatomică a rădăcinilor şi prin angrenarea coroanei dentare cu dinţii vecini, restabilindu-se punctele de contact.

Dacă dintele păstrează o mobilitate mai accentuată se poate face imobilizare prin ligatură de sîrmă în "8" sau prin inele cimentate.

In primele zile după intervenţie se produce o uşoară tumefacţie regională, cu dureri moderate, ca după o extracţie obişnuită, care cedează în 3-4 zile.

De obicei dintele se fixează progresiv, sensibilitatea la percuţie diminuînd şi dispărînd după 8-lo zile, astfel încît după 2o de zile masticaţia poate fi reluată pe hemiarcada pe care este plasat dintele replantat. In cazul în care s-au folosit dispozitive de imobilizare, acestea vor fi îndepărtate după 3o de zile.

Rezultatele tardive sînt inconstante şi ţin de vîrsta bolnavilor, de starea lor generală, de igiena bucală, de leziunile iniţiale, de starea osului alveolar.

Păstrarea fibrelor ligamentare atît pe rădăcini cît şi pe pereţii alveolei, duce de obicei la o vindecare prin fibroză cu restabilirea unor legături care refac în parte condiţiile morfofiziologice ale articulaţiei alveolo-dentare normale (sindesmoză).

Dacă resturile ligamentare au fost distruse, dintele se fixează prin invazia progresivă a cementului radicular de către ţesutul osos, realizîndu-se la început o sudură sau o anchiloză dento-alveolară, care este urmată de rezorbţia progresivă a rădăcinii cu separarea coroanei la nivelul coletului (decapitarea dintelui).

Replantarea imediată terapeutică dă de obicei rezultate mult mai bune în ceea ce priveşte fixarea şi rămînerea pe arcadă a dintelui, decît replantarea dinţilor expulzaţi accidental şi rămaşi în afara alveolei o perioadă mai lungă de timp. Menţinerea dinţilor replantaţi este variabilă, fiind în medie între 4-7 ani, citîndu-se cazuri de persistenţă a lor pînă la 2o-25 de ani.

Scanned with OKEN Scanner

Transplantarea dentară

Transplantarea dentară este metoda care constă în introducerea într-o alveolă naturală sau creată chirurgical a unui dinte de la acelaşi individ (autotransplant) sau de la alt individ (homotransplant).

Indicaţiile acestei metode sînt excepţionale, ea practicîndu-se fie sub formă de transplantări ale dinţilor complet formaţi, fie sub formă de transplantări de muguri dentari. S-au folosit molari de minte incluşi, sau muguri de molari de minte pentru înlocuirea primului sau celui de al doilea molar şi, de asemenea, caninii incluşi care au fost introduşi în alveole nou create la nivelul spaţiilor edentate respective (vezi incluzia dentară).

Pot fi folosiţi şi dinţii ectopici sau dinţii supranumerari bine dezvoltaţi, de la acelaşi sau de la alt individ. In cazul homotransplantelor trebuie făcute în prealabil toate examenele pentru a evita transmiterea unor boli infecţioase, precum şi accidentele de incompatibilitate.

In cazul transplantării dinţilor incluşi sau a dinţilor erupţi ectopic este necesar ca în prelabil să se foreze cu instrumentele de mînă în procesul alveolar, o nouă alveolă. Dintele extras este pregătit făcîndu-se extirparea pulpei şi obturaţia corectă şi apoi introdus în alveola nou creată. După transplantare, imobilizarea dintelui este absolut indispensabilă. S-a încercat şi transplantarea de dinţi şi de muguri dentari recoltaţi de la animale (heterotransplante) cu rezultate neconcludente.

Scanned with OKEN Scanner

C A P I T O L U L VI

TRATAMENTUL CHIRURGICAL AL PARODONTOPATIILOR MARGINALE PROGRESIVE

In tratamentul parodontopatiilor marginale progresive, în care procesul patologic provoacă o liză a ţesuturilor parodontale şi îndeosebi a osului alveolar, în asociere cu celelalte metode terapeutice locale şi generale, trebuiesc folosite şi metodele chirurgicale.

Metodele chirurgicale îşi găsesc îndeosebi indicaţia în cazurile în care există pungi parodontale constituite, sau cînd există modificări de volum şi contur ale gingiei. Prin tratamentul chirurgical se înlătură ţesuturile bolnave şi elementele patologice, creindu-se condiţii de refacere morfofuncţională locale, astfel încît troficitatea tisulară să fie într-o mare măsură restabilită, procesul patologic să fie stabilizat şi astfel oprit în evoluţia sa.

Prin suprimarea pungilor se împiedică stagnarea elementelor patologice şi dezvoltarea infecţiei care favorizează distrucţia parodonţiului, adîncirea fundurilor de sac gingivale şi a pungilor osoase, stimulîndu-se procesul de restructurare osoasă, reconsolidarea dinţilor, reluarea funcţiilor şi, prin aceasta, restabilirea stimulilor funcţionali indispensabili menţinerii troficităţii locale.

Metodele chirurgicale care se folosesc în tratamentul parodontopatiilor marginale sînt:

a. chiuretajul subgingival;
b. operaţia cu lambou;
c. gingivectomia;
d. gingivoplastia;
e. osteoplastia.

Aceste metode trebuiesc însă considerate numai ca momente terapeutice în tratamentul complex al acestor afecţiuni; de aceea, pe lîngă terapeutica generală care urmăreşte corectarea deficienţelor organice sau funcţionale generale cu răsunet asupra parodonţiului marginal, metodele chirurgicale trebuie să fie precedate şi continuate prin tratamente locale care să înlăture factorii iritativi mecanici sau infecţioşi şi îndeosebi să înlăture tulburările funcţionale cu rol în etiologia parodontopatiilor.

Scanned with OKEN Scanner

Răspunsul inflamator al ţesuturilor la factorii iritativi locali se manifestă, din punct de vedere clinic, printr-o mărire de volum a gingiei, produsă de edemul local şi de fibroză. Astfel se formează o pungă gingivală care are baza la nivelul joncţiunii smalţ-ciment (inserţie epitelială).

Punga radiculară presupune distrugerea mai mult sau mai puţin întinsă a osului alveolar şi a fibrelor parodontale asociate, simultan cu proliferarea epiteliului gingival în sens apical; aceste trei procese evoluează pe toate feţele rădăcinilor dentare în mod inegal.

Pregătiri preoperatorii

Intrucît există părerea unanim admisă de specialişti că placa dentară reprezintă factorul iniţial în declanşarea şi întreţinerea parodontopatiilor inflamatorii, controlul acesteia şi al factorilor care generează amploarea ei reprezintă pivotul central de la care porneşte orice tratament al unui bolnav cu parodontopatie. Există o serie de factori, care se cunosc şi care favorizează formarea şi retenţia plăcii dentare la nivelul parodonţiului marginal, dintre care amintim pe cei mai importanţi: tartrul supra şi subgingival, obturaţiile interproximale şi de colet neadaptate corect, defectele marginale ale coroanelor acrilice sau metalice, protezele şi aparatele ortodontice neadaptate şi/sau prost întreţinute din punct de vedere al igienei bucale.

Bolnavului i se va explica că măsurile de igienă orală (periaj atent şi conform regulilor medicale, duşurile parodontale, folosirea sistematică a scobitorilor sau a firului parodontal) vizează înlăturarea sistematică a plăcii dentare de la nivelul joncţiunii gingivo-parodontale. Aceste măsuri de igienă orală vor trebui să fie efectuate zilnic, continuu, atît înainte cît şi după tratamentul chirurgical necesitînd o cooperare constantă şi conştientă a bolnavului în această direcţie. Fără această cooperare, rezultatul tratamentului chirurgical va fi în mod iremediabil compromis.

Inainte de a descrie indicaţiile şi tehnica fiecărei metode în parte, vom expune pregătirile preoperatorii, care sînt comune pentru toate aceste intervenţii.

1. Inlăturarea factorilor iritativi şi infecţioşi locali prin:

- detartrajul minuţios supra şi subgingival, ridicîndu-se toate depozitele moi şi dure (tartru şi placă dentară), astfel încît,pe cît posibil, suprafaţa radiculară să devină cît mai netedă; detartrajul poate fi completat, după caz, printr-un periaj cu periuţe montate şi chiar cu o lustruire a dinţilor cu discuri de cauciuc;
- îndepărtarea tuturor lucrărilor protetice defectuoase care irită parodonţiul marginal, obturaţiile de colet în exces neadaptate cervical, coroane de înveliş şi dispozitivele coronoradiculare incorect adaptate, croşetele protetice traumatizante, extracţia resturilor radiculare;
- obturaţia corectă a cariilor şi în special a celor de colet şi aproximale;

- obturarea provizorie după efectuarea tratamentului mecanic în gangrenele pulpare.

2. Înlăturarea tulburărilor funcţionale şi restabilirea rapoartelor normale de ocluzie prin:

- înlăturarea lucrărilor protetice defectuoase care alterează rapoartele de ocluzie şi suprasolicită parodonţiul (coroane sau lucrări conjuncte nemodelate conform criteriilor ocluziei funcţionale, obturaţii înalte, obturaţii care nu refac punctul de contact);

- reechilibrarea ocluziei, cu înlăturarea interferenţelor ocluzale grave care produc suprasolicitări traumatizante pentru parodonţiul marginal, după un examen atent al ocluziei şi studiul modelelor montate în articulator;

- restaurări protetice provizorii corecte (punţi sau gutiere provizorii acrilice cu coroane răscroite marginal etc);

- corectarea malpoziţiilor dentare, precum şi a anomaliilor dentomaxilare, prin tratamente ortodontice, cu înlăturarea tuturor factorilor care tulbură rapoartele de ocluzie normală şi favorizează retenţiile alimentare la nivelul parodonţiului marginal.

Imobilizarea dinţilor reprezintă o măsură terapeutică indispensabilă în scopul protejării parodonţiului împotriva microtraumatismelor repetate, continui la care acesta este supus în timpul masticaţiei. Prin imobilizare se împiedică exagerarea progresivă a mobilităţii, migrările dentare, precum şi alterarea rapoartelor de ocluzie, toate având drept consecinţă progresiunea rapidă a lizei osului alveolar marginal ce susţine dinţii. De asemenea, imobilizarea permite o distribuire armonioasă a forţelor masticatorii acolo unde există forţe traumatizante, precum şi asupra dinţilor stîlpi sau pe care sînt ancorate lucrări adjuncte.

Mijloacele de imobilizare temporară sînt utilizate în cursul tratamentului dinţilor ce prezintă o implantare mult afectată şi la care există posibilitatea ca dintele să fie subluxat sau chiar luxat în timpul operaţiei. In faza iniţială, de vindecare, imediat postoperator, există în mod constant o creştere temporară a mobilităţii produsă de răspunsul inflamator tisular local faţă de trauma operatorie. Dacă dinţii operaţi prezentau deja mobilitate, cum se întîmplă în marea majoritate a cazurilor, această scădere temporară a suportului parodontal poate induce o traumă secundară. Dacă potenţialul de adaptare al ligamentului parodontal este depăşit, mobilitatea dentară va continua să crească. Imobilizarea temporară este utilă pentru combaterea acestei traume secundare. Ca mijloace de imobilizare temporară se pot utiliza: gutiera ocluzală (adaptată pentru a avea contacte maximale în timpul mişcărilor funcţionale şi utilizabilă pe perioade scurte de timp şi numai noaptea), ligaturile de sîrmă în 8 sau cojocărească simplă, sau cu adausuri acrilice, şinele vestibulare sau vestibulo-orale din acrilat construite pe model în laborator. Bineînţeles, aceste dispozitive vor trebui să respecte parodonţiul marginal şi spaţiile interproximale, ele neputînd fi purtate perioade lungi de timp. Ca mijloace de imobilizare semipermanente se pot cita şinele din materiale compozite aplicate pe smaltul demineralizat sau cavităţi aproximale

preparate pe dinţi vecini şi unite prin stifturi parapulpare cimentate. Dinţii frontali pot fi stabilizaţi cu ajutorul unei sîrme cimentate într-un şanţ realizat preoperator la nivelul fosetelor orale ale acestora.

De asemenea, există o serie de tipuri de şine mobilizabile care pot fi folosite în cadrul unui tratament de durată, avînd avantajul că mobilitatea dinţilor poate fi oricînd reevaluată.

Factorii locali care influenţează tratamentul

Localizarea bazei pungii parodontale precum şi gradul rezorbţiei osoase reprezintă factorii cei mai importanţi în prognosticul bolii parodontale. Localizarea bazei pungii este mai importantă decît adîncimea, aceasta nefiind în legătură directă cu severitatea rezorbţiei osoase. Astfel, bolnavii care prezintă pungi adînci gingivale şi rezorbţie osoasă mai redusă au un prognostic mai bun decît bolnavii cu pungi subţiri şi adînci şi cu rezorbţie osoasă mai avansată. De asemenea, cu cît baza pungii este mai aproape de apex, prognosticul afecţiunii este mai serios.

Mobilitatea dentară, care este produsă prin rezorbţia osului alveolar, prin modificările inflamatorii de la nivelul ligamentului parodontal precum şi prin traumatismele ocluzale, are şanse să fie ameliorată cu cît gradul rezorbţie osoase este mai redus. Punga interradiculară la molari nu reprezintă un factor de prognostic nefavorabil, ea putînd fi rezolvată printr-un tratament chirurgical adecvat.

Plaga parodontală evoluează într-un mediu septic sub condiţii specifice, dintre care trebuiesc remarcate următoarele:

- iritaţia dată de placa dentară şi detritusuri alimentare;
- existenţa traumei ocluzale;
- manipulările tisulare excesive sau repetate care interferă cu activitatea celulelor implicate în procesul de vindecare.In aceste condiţii, reacţia ţesuturilor parodontale la tratament se manifestă prin restaurarea continuităţii epiteliului, reataşarea osului alveolar de cement prin fibrele parodontale, precum şi restaurarea echilibrului dintre osteogeneză şi rezorbţie la nivelul osului alveolar.

Intervenţiile chirurgicale vor fi efectuate numai după liniştirea fenomenelor inflamatorii acute gingivoparodontale şi după terminarea tuturor pregătirilor preoperatorii în modul cel mai corect.

In cazul producerii unui abces parodontal, acesta va fi drenat pe cale transparodontală (lăsîndu-se meşe cu soluţii antiseptice sau cu paste cu antibiotice), sau printr-o incizie verticală paralelă cu axul lung al rădăcinii dintelui, pentru a evaza pereţii pungii şi a aerisi mai bine ţesuturile inflamate. Dacă considerăm că implantarea dintelui este compromisă, putem proceda la extracţie, drenajul abcesului parodontal făcîndu-se astfel pe cale alveolară.

Chiuretajul subgingival

Este metoda chirurgicală prin care se urmăreşte îndepărtarea ţesuturilor bolnave din pungile gingivale, pentru a se înlătura elementele iritative şi septice care întreţin inflamaţia şi favorizează progresiunea lizei paradentale.

Prin această intervenţie se urmăreşte obţinerea unei bune cicatrizări locale care să ducă la diminuarea sau dispariţia pungilor şi la crearea condiţiilor de restructurare a paradonţiului marginal.

Indicaţii

Metoda este indicată, cu intenţie curativă, în paradontopatiile marginale cu pungi de adîncime pînă la 3-4 mm şi în cazurile în care nu există rezorbţii osoase întinse, ci numai o lizã limitată a ţesuturilor paradontale (atrofie orizontală). De asemenea, metoda poate fi folosită paleativ, în formele avansate ale afecţiunii, precum şi în recidivele postoperatorii după celelalte intervenţii, în scopul amînării extracţiei dentare pentru o perioadă de timp.

Metoda se practică atît în leziunile limitate la un dinte sau grupe de dinţi, cît şi în leziunile generalizate la întreaga arcadă.

Intervenţia se poate practica sub anestezie locală, de contact sau anestezie locoregională.

Chiuretajul se poate practica într-o singură şedinţă, sau în şedinţe succesive, la ambele arcade.

Intervenţiile în şedinţe succesive permit înlăturarea progresivă şi cît mai completă a elementelor patologice, urmărindu-se evoluţia în timp a procesului de vindecare.

T e h n i c a

Se începe prin completarea detartrajului, ridicîndu-se, de pe toate suprafeţele fiecărui dinte în parte, micile concreţiuni rămase şi insistîndu-se îndeosebi subgingival pe rădăcini şi interradicular. Se caută ca suprafeţele dento-radiculare să rămînă perfect netede; pentru aceasta, se vor folosi pile subgingivale precum şi lingurile Black sau ultrasunetele.

Cu chiuretele mici se îndepărtează apoi tot ţesutul de granulaţie din pungile gingivale, din spaţiile interdentare, insistîndu-se în mod cu totul deosebit pe peretele mucos al pungii gingivale pentru a se înlătura epiteliul invaginat şi inflamat (Fig.6.1.).

Deoarece controlul vizual nu este posibil de jur împrejurul fiecărui dinte, chiuretajul va fi condus de senzaţiile pe care operatorul le are în timpul manoperelor şi care îi indică locurile unde au rămas ţesuturi alterate sau tartru. Sîngerarea este un indiciu preţios în conducerea intervenţiei, ea fiind abundentă cît timp există încă ţesut de granulaţie şi diminuînd foarte mult în momentul în care chiuretajul a fost complet efectuat.

Dacă cementul radicular este înmuiat, necrotic, aşa cum se va vede îndeosebi în pungile foarte adînci, se va face şi raclajul cementului pînă cînd instrumentul dă senzaţia de substanţă dentară rezistentă, realizîndu-se în final şi lustruirea rădăcinii.

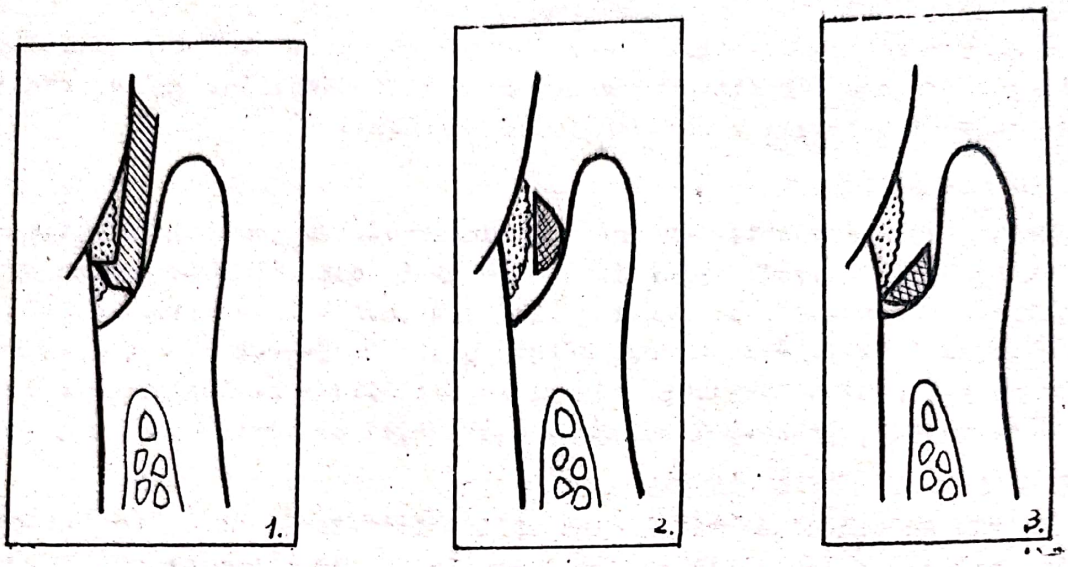


Fig.6.1. Chiuretajul subgingival. 1. Indepărtarea tartrului subgingival cu instrumente de detartraj; 2. Pentru îndepărtarea depozitelor profunde de tartru şi a cementului necrotic se foloseşe chiurete fine care se introduc paralel cu suprafaţa radiculară; 3. Cînd chiureta ajunge în profunzimea pungii parodontale se modifică unghiul instrumentului şi se îndepărtează ţesutul patologic.

După terminarea chiuretajului se fac irigaţii cu o soluţie de apă oxigenată şi ser fiziologic pentru a îndepărta toate micile resturi reţinute în spaţiile interdentare. Plaga va fi tamponată cu grijă în jurul fiecărui dinte cu o soluţie de clorură de zinc 30% şi lăsată descoperită.

In cazurile în care persistă o sîngerare mai abundentă şi îndeosebi cînd chiuretajul a fost practicat pentru pungi foarte adînci sau recidive după celelalte intervenţii, se pot aplica pansamente cu meşe iodoformate sau, mai bine, cu cimenturi gingivale adezive.

In scopul reacolării mai rapide a gingiei decolate, unii autori recomandă ca, imediat după efectuarea intervenţiei, să se efectueze o suturâ, după care se vor aplica pansamente parodontale (cimenturi parodontale, meşe iodoformate).

Meşele iodoformate în fîşii subţiri sînt îndesate nu în pungi ci deasupra gingiei, în spaţiile interradiculare, pentru a aplica suprafaţa sîngerîndă a gingiei pe os şi pe rădăcini şi nu pentru a decola gingia de pe dinţii operaţi.

Tratament postoperator, evoluţie, rezultate

Se recomandă o alimentaţie cu alimente moi, lichide în primele două zile după intervenţie, băi bucale cu soluţii slab antiseptice şi antiflogistice

(apă oxigenată, infuzii). Pansamentele sînt suprimate după 48-72 de ore, făcîndu-se apoi, la fiecare două zile, controlul plăgii cu înlăturarea depozitelor moi şi atingeri cu clorură de zinc 2o%. In locurile în care se observă o tendinţă de proliferare a ţesutului de granulaţie se completează chiuretajul şi se pot face mici cauterizări chimice cu soluţie saturată de acid tricloracetic. Bolnavii îşi reiau alimentaţia normală începînd din ziua a treia şi încep periajul dentar din a şasea zi.

După chiuretaj se observă dispariţia inflamaţiei gingivale, a sîngerării, reacolarea treptată a gingiei în jurul dinţilor cu organizarea unei cicatrizări şi diminuarea evidentă a pungilor.

In pungile mici, cicatricea strînsă şi dispariţia inflamaţiei duc la o reconsolidare manifestă a dinţilor. Unii autori susţin chiar că se poate produce reinserţie epitelială cu refacerea elementelor parodontale, înlăturarea învelişului epitelial din interiorul pungilor permiţînd neoformaţia fibrelor parodontale şi reacolarea epiteliului la rădăcina dintelui. Cei mai mulţi autori sînt de acord că după chiuretajul subgingival nu se reface inserţia epitelială ci se produce o cicatrice fibroasă cu o inserare a gingiei la un nivel uşor mai coborît (în sens apical) faţă de nivelul anterior. După chiuretaj sînt necesare controale periodice pentru a preîntîmpina recidivele şi a interveni la timp dacă acestea se produc.

Operaţia cu lambou

Această metodă este cunoscută sub denumirea de operaţie Neuman-Widman sau de operaţie radicală a parodontopatiilor marginale. Metoda constă în descoperirea osului alveolar prin decolarea lambourilor mucoperiostale, îndepărtarea elementelor patologice, chiuretajul pungilor şi nivelarea osului.

Operaţia cu lambou este indicată, cu intenţie curativă, în parodontopatiile marginale progresive cu pungi între 4-8 mm, şi anume în cazurile în care există o atrofie osoasă verticală accentuată, cu prezenţă de pungi osoase adînci, atît în formele localizate la un dinte sau la un număr redus de dinţi, cît şi în cele generalizate. Metoda are faţă de gingivectomie avantajul că, prin readucerea lambourilor în jurul dinţilor, rădăcinile dentare rămîn dezgolite pe o întindere mult mai mică şi efectul fizionomic este mai bun; de aceea, operaţia va fi preferată îndeosebi la nivelul dinţilor frontali. Intervenţia se execută clasic, pe grupe de 4-6 dinţi succesiv, la interval de 2-3 săptămîni. Se poate efectua şi într-o şedinţă, pe o arcadă întreagă, la bolnavii cu o stare generală bună, care pot suporta o intervenţie de durată (Fig.6.2.).

Tehnica operatorie

Incizia

In intervenţia limitată pe grupe de dinţi se fac incizii vertical-oblice, de o parte şi de alta a grupului de dinţi care va fi operat, strict distal de ultima papilă afectată, unite printr-o incizie orizontală de-a lungul marginii libere gingivale, secţionîndu-se papilele interdentare care sînt de obicei tumefiate prin inflamaţie.

Unii autori recomandă aşa numita incizie în dublu echer învers în care, după efectuarea inciziilor verticale, se practică o incizie paralelă cu festonul gingival şi, la circa 1 mm de marginea liberă a gingiei, secţionarea ţesuturilor făcîndu-se oblic, într-un unghi de 10° faţă de axul rădăcinilor. De asemenea, unii autori recomandă ca periostul să fie lăsat pe loc, mai ales în situaţiile în care există pungi osoase juxtaapicale sau defecte osoase în tabla vestibulară a osului alveolar (aşa numitele fenestraţii), sau cînd osul alveolar este subţire, astfel încît este imperios necesar să minimalizăm pe cît posibil rezorbţia osoasă postoperatorie. Prin decolare, epiteliul marginii gingivale a pungii şi corionul hiperplazic rămîn ataşate de dinte şi vor fi excizate intraoperator.

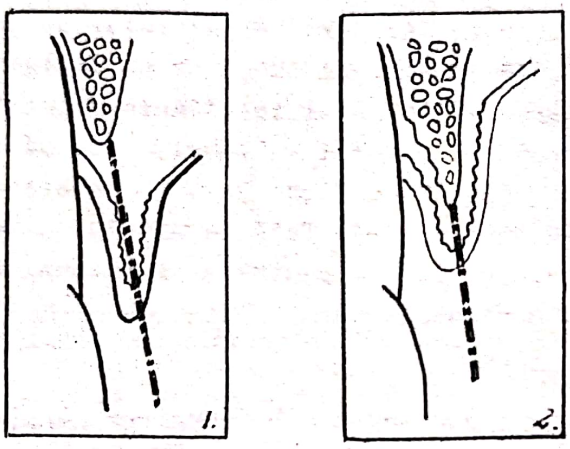


Fig.6.2. Indicaţiile operaţiei cu lambou: Pungi parodontale cu profunzimea de 4-8 mm cu atrofie osoasă verticală sau mixtă.

Inciziile vor forma astfel un trapez cu baza spre fundul de sac vestibular. Inciziile de pe versantul vestibular merg în general pînă în limita mucoasei fixe şi nu trebuie să intersecteze papilele interdentare. Inciziile din bolta palatină vor fi scurte pentru a nu secţiona vasele, de asemenea şi inciziile de pe faţa linguală a mandibulei, ce nu vor trebui niciodată extinse spre planşeul bucal (Fig.6,3.).

In intervenţiile pe întreaga arcadă într-o şedinţă, incizia marginală orizontală se face de la un capăt la celălalt al arcadei; cu un decolator fin, sau chiar cu bisturiele parodontale, se desprind lambourile gingivale şi se răstoarnă atît vestibular cît şi oral, cu manopere cît mai blînde pentru a nu le perfora şi a le putea reaplica la sfîrşitul intervenţiei. In manipularea lambourilor de mucoasă, specialistul trebuie să aibă în vedere tot timpul conservarea unei cantităţi cît mai mari de gingie fixă şi keratinizată care trebuie cît mai puţin excizată şi dezinserată. Pe de altă parte, pungile palatinale trebuiesc eliminate prin excizie; mucoperiostul palatinal fiind aderent, el nu poate fi repoziţionat apical. Pentru a permite eliberarea ţesutului hiperplazic palatinal, se va practica o incizie longitudinală

în interiorul şanţului gingival, în scopul etalării lamboului. Se descoperă astfel osul alveolar pe întinderea necesară pentru a se avea sub control pungile osoase; se curăţă toate fongozităţile şi ţesutul de granulaţie, insistînd în mod deosebit în pungile osoase de-a lungul rădăcinilor dentare, folosind chiurete de diferite mărimi. In spaţiile interdentare se vor folosi excavatoarele, iar spre rădăcinile dentare se va acţiona cu instrumentele de detartraj şi lingurile Bleck. Se ridică şi cementul necrotic, completîndu-se detartrajul şi netezirea rădăcinilor pentru a favoriza reacolarea. Pentru netezirea osului se folosesc chiuretele şi chiar dălţile mici în cazurile de geode osoase care lasă proeminenţe neregulate. Pentru îndepărtarea ţesutului de granulaţie, care uneori este foarte aderent, se pot folosi frezele puţin tăioase la turaţii foarte mici. Prin această regularizare osoasă se urmăreşte transformarea atrofiei verticale într-o atrofie orizontală, respectiv obţinerea unui suport alveolar uniform, neted, cu pante line în jurul dinţilor, desfiinţîndu-se pungile osoase retentive din jurul rădăcinilor care favorizează retenţia elementelor plăcii dentare. Se completează chiuretajul pe faţa profundă a lambourilor mucoperiostice, pentru a înlătura orice urmă de ţesut de granulaţie, sau de epiteliu invaginat pe peretele fostei pungi parodontale. Osul trebuie să rămînă neted, curat, fără porţiuni necrotice, fără geode retentive, iar pungilor de osteoliză periradiculară să li se dea forma de pîlnie foarte evazată care să nu favorizeze nici un fel de retenţie. Plaga este spălată cu apă oxigenată sau cu ser fiziologic.

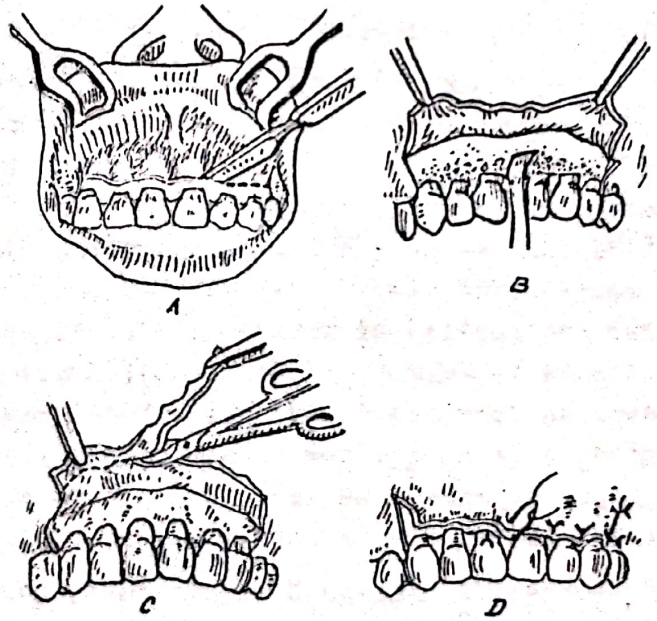


Fig.6.3. Operaţia cu lambou: A. Incizia; B.Decolarea lamboului cu îndepărtarea elementelor patologice; C. Excizia cu foarfeca a mucoasei în exces; D. Sutura cu fire trecute interdentar.

Tratamentul chirurgical al pungilor interradiculare la molari sau aşa numita implicare a bifurcaţiei sau a trifurcaţiei interradiculare, se va face după cum urmează: în mod obligatoriu, preoperator va trebui să precizăm originea parodontală sau pulpară (canal pulpar accesoriu netratat sau cale falsă) a implicării interradiculare. Acest lucru se realizează prin examen clinic atent şi prin testarea vitalităţii dinţilor afectaţi. Intrucît diminuarea plăcii dentare de la nivelul zonei interradiculare prin periaj şi măsuri de igienă este imposibilă, tratamentul chirurgical se impune.

Abordarea acestora se va face atît vestibular cît şi oral, avînd grijă să nu rămînă ţesut de granulaţie, cement sau os înmuiat la nivelul septului interradicular. Modelarea osului alveolar se poate realiza manual cu chiurete - înlăturîndu-se marginile ascuţite ale septului interradicular -, precum şi cu frezele fine diamantate, montate la piesa obişnuită sau chiar la turbină cu răcire cu ser fiziologic steril. In defectul osos restant se pot introduce granule de hidroxiapatită, matrice osoasă conservată sau os autolog proaspăt. In cazurile în care defectul osos interradicular se asociază şi cu o rezorbţie a uneia din rădăcini, se poate apela la tehnica de amputaţie radiculară a rădăcinii afectate, după prealabilul tratament endodontic al rădăcinii restante (vezi "Tehnici chirurgicale ajutătoare tratamentului endodontic").

Lambourile periosteo-mucoase sînt readuse peste osul alveolar şi suturate cu fire neresorbabile trecute prin spaţiile interdentare. Prin sutură se urmăreşte acoperirea completă a osului alveolar şi o bună adaptare a periosteo-mucoasei în jurul dinţilor.

In cazurile în care lambourile sînt în exces şi după sutură rămîn spaţii moarte între ele şi os, cu foarfeca se face excizia unei porţiuni marginale late de maxim 1-2 mm, pentru ca lamboul să rămînă bine etalat. Plaga va fi în mod obligatoriu protejată cu un pansament parodontal (cement parodontal, parafină, pastă de eugenat de zinc, meşe iodoformate), recomandîndu-se o alimentaţie moale sau lichidă timp de 2-3 zile şi o igienă bucală riguroasă prin spălături slab antiseptice şi antiflogistice cu soluţii antiseptice vegetale sau cu soluţie de clorhexidină. Controlul plăgii se va face la 48 de ore pentru a se depista formarea de eventuale hematoame. Folosirea cimenturilor parodontale împiedică de obicei formarea hematoamelor şi favorizează o bună acolare a gingiei pe os. Firele se scot în a şaptea sau a opta zi, perioadă de timp suficientă pentru cicatrizare.

Rezultatele intervenţiei, indicată şi efectuată corect, sînt în general bune, obţinîndu-se dispariţia pungilor şi a inflamaţiei, favorizîndu-se astfel remineralizarea osoasă cu fixarea dinţilor.

Operaţia cu lambou limitată

In pungile osoase localizate la 1-2 dinţi, cazuri care se întîlnesc destul de frecvent în practică îndeosebi la nivelul frontalilor superiori, este indicată descoperirea şi raclajul focarului parodontal prin decolarea unui lambou gingival limitat. Se face o incizie în "L", obţinîndu-se un lambou triunghiular care este apoi răsturnat şi menţinut cu un depărtător Langebeck,

Scanned with OKEN Scanner

sau cu un fir tractor trecut prin grosimea sa şi prins cu o pensă. Raclajul ţesuturilor patologice se face cu instrumentarul şi după tehnica descrisă, lamboul fiind apoi readus peste plaga osoasă şi suturat.

Gingivectomia

Intervenţia constă în excizia gingiei hiperplazice precum şi a pereţilor gingivali fibrozaţi ai pungilor parodontale, cu descoperirea şi înlăturarea elementelor patologice din pungi, de pe os şi de pe rădăcinile dentare. Metoda este indicată în:

- parodontopatiile hiperplazice hidantoinice sau ereditare şi în cazul în care pungile gingivale prezintă părţi îngroşate prin procese de fibroză manifestă; în aceste forme, gingivectomia se impune de necesitate;
- parodontopatiile marginale cronice cu pungi adînci între 6 şi 8 mm, cu evoluţie orală, în care caz excizia peretelui gingival al pungii nu lasă defecte fizionomice vizibile;
- în scop protetic în cazurile de dinţi cu coroane scurte prin abraziune sau infradenţie, pentru ca viitorul dinte stîlp să ofere o retenţie suficientă inserării lucrării conjuncte; în cazurile de extruzii ale dinţilor împreună cu procesul alveolar, cînd aceştia depăşesc planul de ocluzie, pentru menţinerea lor pe arcadă - în scopul utilizării ca stîlpi pentru lucrări conjuncte, este necesară reducerea dimensională a coroanei clinice. In acest caz, se va înlătura o parte din gingia marginală pentru a asigura retenţia lucrărilor pe aceşti dinţi cu coroana clinică scurtată.

Prin exereza unei porţiuni destul de întinse din gingie, această metodă are dezavantajul că lasă descoperite rădăcinile dentare. De aceea, pentru a respecta principiul fizionomic, gingivectomia va fi folosită de preferinţă pentru dinţii laterali şi numai în cazuri bine justificate la dinţii frontali. Intervenţia se execută la un interval de 3-4 zile după terminarea detartrajului şi după dispariţia fenomenelor inflamatorii locale.

Gingivectomia prezintă avantajul unui abord şi unei vizibilităţi directe asupra tartrului şi plăcii dentare precum şi asupra celorlalte elemente ale pungii parodontale, permiţînd astfel excizia în totalitate a acestora, realizîndu-se şi netezirea rădăcinii.

Gingivectomia este indicată şi în pungile interradiculare şi în anumite pungi osoase cu pereţi retentivi al căror abord nu poate fi realizat în mod corect printr-un lambou.

In cazurile în care se face gingivectomia pe o arcadă, se foloseşte anestezia tronculară periferică, sau anestezia plexală în gingivectomiile limitate la 1-2 dinţi.

T e h n i c a

Sînt necesare, pe lîngă bisturiele obişnuite, şi bisturiele speciale de gingivectomie cu lama îndoită faţă de mîner în unghiuri favorabile şi cu tăişul orientat astfel încît să se poată acţiona pe feţele orale şi vestibulare ale arcadelor superioară şi inferioară. De asemenea sînt necesare

instrumente de detartraj, linguri Black, chiurete de diverse mărimi, excavatoare dentare, pile subgingivale etc.

Intervenţia se execută în şedinţe operatorii separate pentru fiecare arcadă, superioară şi inferioară, sau pe două hemiarcade simetrice în aceeaşi şedinţă şi numai excepţional pe ambele arcade în aceeaşi şedinţă (Fig.6.4.).

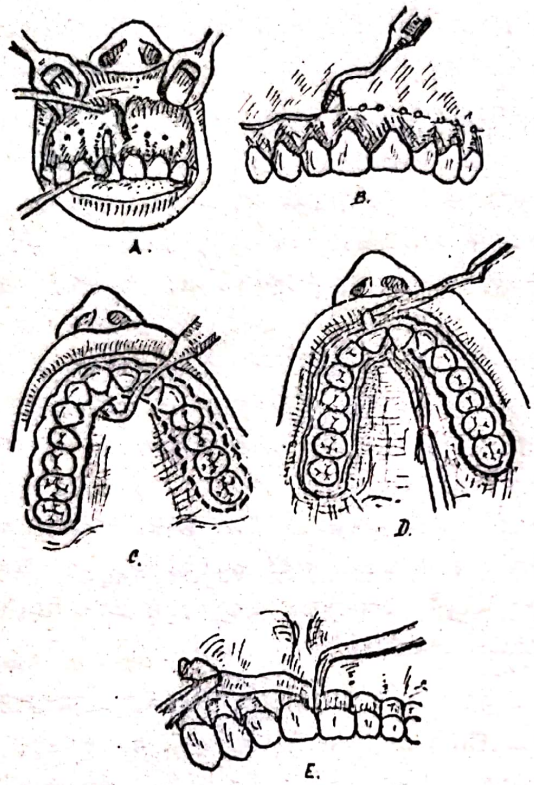


Fig.6.4. Gingivectomia: A.Reperajul adîncimii pungilor ; B. Incizia vestibulară ; C. Incizia palatinală ; D. Excizia ţesutului gingival hiperplazic; E.Aplicarea pansamentului cu meşă iodoformată.

Se începe prin reperajul adîncimii pungilor gingivale, vestibular, mezial şi distal la nivelul fiecărui dinte. Cu sonda dentară se marchează, prin înţepături, adîncimea la diferite nivele a fundurilor de sac parodontale, de-a lungul întregii arcade care va fi operată în şedinţa respectivă.

Cu bisturiul obişnuit şi cu bisturiele speciale cudate se face o incizie netă pînă la os, atît vestibular cît şi oral, urmărindu-se înţepăturile marcate cu sonda. Incizia va interesa dintr-o dată tot peretele pungii şi va fi uşor bizotată, înclinată către apex (în jos la arcada inferioară şi în sus la arcada superioară), pentru a nu rămîne margini gingivale retentive. Linia de incizie ia de obicei o formă festonată care nu respectă însă festonul marginal normal. Incizia va fi trasată exact în fundul pungilor sau la limita zonei hiperplaziate, între ţesutul sănătos şi cel bolnav, pentru a nu rămîne o margine gingivală în exces, care să favorizeze refacerea pungii şi nici să denudeze osul sănătos pe o prea mare distanţă, favorizînd infectarea sau necroza acestuia (Fig.6.5.).

Lambourile de mucoasă desprinse sînt ridicate cu o pensă şi cu ajutorul unei ghiare de detartraj cu care se face dezinserarea langhetelor din spaţiile interdentare.

După îndepărtarea gingiei inflamate sau hiperplaziate, se completează detartrajul pe toate suprafeţele radiculare dezgolite la fiecare dinte în parte; se raclează ţesutul de granulaţie care acoperă osul folosindu-se chiuretele fine şi îndoite precum şi excavatoarele dentare.

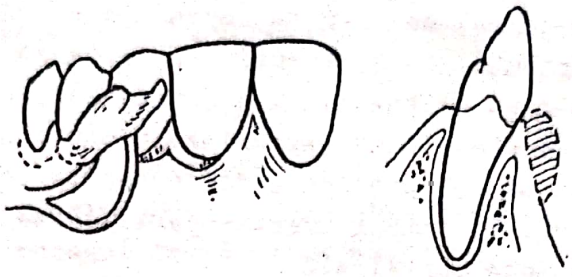


Fig.6.5. Secţionarea bizotată a peretelui pungii gingivale.

Se completează detartrajul şi se netezesc lustruindu-se rădăcinile dentare; de asemenea, se netezesc suprafeţele şi marginile obturaţiilor de colet şi aproximale, reconstituirile corono-radiculare, astfel încît controlul plăcii dentare de către pacient să fie facilitat.

Netezirea suprafeţelor radiculare se realizează manual cu pilele subgingivale şi cu benzi abrazive, dar se poate realiza şi cu ajutorul instrumentelor rotative (din cauciuc, adaptate special). Se va insista îndeosebi asupra raclajului interdentar şi interradicular la molari. Cu instrumentele Black şi excavatoarele, se caută să se pătrundă cît mai adînc în jurul rădăcinilor, raclîndu-se pungile osoase existente. De obicei instrumentarul de mînă este suficient pentru a se îndepărta ţesuturile bolnave şi chiar pentru a se obţine o netezire a osului în atrofiile neregulate, nefiind necesară folosirea instrumentelor rotative. Pentru nivelarea marginilor alveolare se pot folosi pensa ciupitoare, chiuretele puternice şi chiar dălţile fine; unii autori folosesc, în acest scop, frezele diamantate sau cele de os.

In aceste cazuri, în care se realizează o regularizare a osului, intervenţia este denumită cu termenul de gingivectomie radicală. Se controlează plaga, verificîndu-se dacă suprafeţele radiculare sînt perfect netede, fără urme de concreţiuni şi, dacă osul este curat, cu aspect de os sănătos, se irigă cu un jet de ser fiziologic călduţ. Rămîne de obicei o plagă gingivo-osoasă largă, ale cărei margini au tendinţa să se îndepărteze sau să se decoleze de pe osul subiacent. Pentru a se reduce suprafaţa de os descoperită, se pot aplica puncte de sutură de poziţie interdentare, la distanţă de 2-3 dinţi, atît la nivelul fr[illegible]talilor cît şi lateral, menţinîndu-se astfel apropiate marginile gingivo-periostale.

In cazurile în care gingivectomia este utilizată pentru forme hiperplazice de parodontopatii, excizia va trebui să intereseze întreaga zonă de ţesut patologic hiperplaziat, avînd grijă să se modeleze un contur gingival cît mai aproape de cel normal şi ca suprafaţa de os denudat, care va trebui

să fie acoperită prin granulare secundară, să fie cît mai mică.

Plaga se protejează în mod obligator cu cementuri parodontale, parafină sau meşe iodoformate. Pansamentele de protecţie se menţin pe loc 5-6 zile, după care pot fi înlocuite sau se renunţă la ele.

Vindecarea după gingivectomie comportă mai multe etape. Intr-o primă etapă se formează un coagul ce acoperă suprafaţa plăgii operatorii. In timpul primelor două săptămîni după operaţie se formează un ţesut de granulaţie în teritoriul coagulului şi epiteliul de la nivelul marginilor plăgii migrează peste ţesutul de granulaţie. Aproximativ din a zecea zi după operaţie, pînă în a treizecea zi, se produce organizarea ţesutului conjunctiv şi keratinizarea epiteliului. In timpul acestei perioade se formează un nou şanţ gingival şi o nouă joncţiune epitelială.

In cazurile în care dorim să obţinem un contur gingival, cît mai aproape de normal într-o perioadă scurtă de timp, se poate apela la una din tehnicile de chirurgie muco-gingivală reconstructivă (alunecarea unui lambou din fundul de şanţ vestibular în sens coronar, grefă de mucoasă liberă jugală sau palatinală, sau deplasarea unui lambou de mucoasă cu pedicul lateral etc).

Gingivectomia cu electrocauterul

Utilizarea electrocauterului în efectuarea intervenţiilor la nivelul parodonţiului marginal are indicaţii mai restrînse şi anume în hiperplaziile izolate (produse datorită unor cavităţi carioase cu margini ascuţite, coroane sau dispozitive corono-radiculare prost adaptate marginal, în exces cu margini groase, obturaţii de amalgam aproximale sau de colet în exces), localizate la 1-2-3- dinţi, precum şi în formele izolate, puţin întinse de parodontopatii marginale cronice. Intervenţia este contraindicată în formele de parodontopatie marginală generalizată. Se poate utiliza, pentru excizie, ansa de la electrocauterul unitului dentar, sau cu un ac fin Miller montat la un electrocauter. Se poate utiliza, de asemenea, şi un electrocauter construit special în acest scop, ce posedă diferite instrumente active (lamă, ac, sferă mică) pentru efectuarea intervenţiei. In cazul utilizării electrocauterului în pungile parodontale, după reperarea şi marcarea adîncimii acestora, incizia va fi netă, cu bizoul îndreptat în sens apical şi va fi urmată de excizia pereţilor pungii şi raclarea ţesuturilor patologice.

Avantajele electrocauterului (hemostază bună imediat intraoperator şi favorizarea unei cicatrizări fibroase strînse) sînt însă contrabalansate de dezavantaje. Acestea sînt reprezentate de:

- dozarea dificilă a intensităţii curentului - uneori existenţa unor neconcordanţe, între doza pe care o arată aparatul şi intensitatea reală a curentului utilizat, favorizînd producerea unei necroze de combustie a marginilor plăgii gingivale, urmată de separarea şi eliminarea sa, fapt ce întîrzie mult vindecarea;

- existenţa riscului de combustie şi necroză osoasă, îndeosebi ale septurilor interradiculare, dar chiar şi ale osului alveolar, în cazul folosirii unui curent de intensitate prea mare sau pe o durată prea lungă;

- riscul de atingere al dinţilor cu producere de modificări pulpare ireversibile (necroză pulpară cu parondontită apicală acută etc).

Gingivoplastia (chirurgia muco-gingivală)

Pentru a depăşi inconvenientele, de ordin estetic şi funcţional, ale tehnicii clasice de gingivectomie, au fost introduse o serie de tehnici care au drept obiectiv refacerea unui contur gingival cît mai aproape de normal.

In acest scop s-au folosit:

a. lambouri gingivo-mucoase din vecinătate;

b. grefe de mucoasă orală de la distanţă.

a. Cel mai frecvent au fost utilizate lambouri gingivo-mucoase prelevate prin incizii de degajare efectuate vestibular, cu decolarea mucoasei dinspre fundul de şanţ vestibular în sens coronar şi suturarea lor interdentar; bineînţeles, se va avea grijă ca aceste decolări şi deplasări de mucoasă să nu dezinsereze şi muşchii mimicii, întrucît aducerea inserţiei lor spre marginea gingivală anulează, prin tracţiunea lor funcţională, rezultatul intervenţiei.

In cazul gingivectomiei izolate, efectuată la nivelul unui singur dinte sau grup de dinţi (2-3 dinţi), defectul gingivo-mucos poate fi acoperit printr-un lambou gingivo-mucos, alunecat în sens lateral de la un grup de dinţi adiacenţi sănătoşi şi fără parodontopatii (Fig.6.6.).

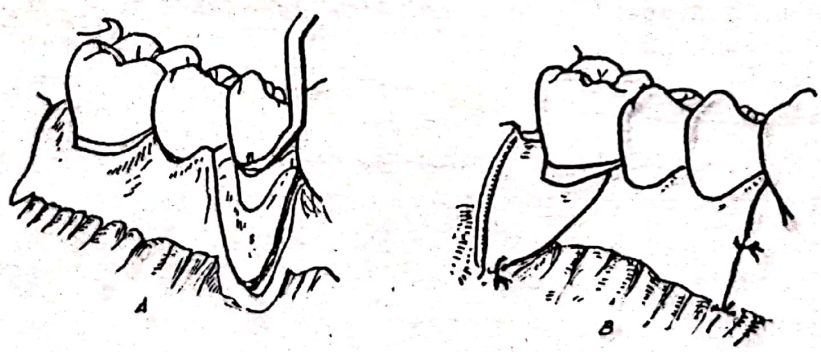


Fig.6.6. Defect gingival după gingivectomie la nivelul premolarilor acoperit prin alunecarea unui lambou din vecinătate.

De asemenea, se pot utiliza grefele de mucoasă orală, recoltată manual sau cu mucotomul de la nivelul regiunii jugale sau din bolta palatină, şi suturate cu fire separate interdentare precum şi la mucoasa de la nivelul patului operator.

Trebuie însă menţionat faptul că, indiferent de tipul de lambou utilizat, nu se poate obţine refacerea cu "restitutio ad integrum" a unui contur gingival de formă şi înălţime normală; întotdeauna vom obţine un

grad mai mic, sau mai mare, de retracţie (de 1-3 mm).

Pornindu-se de la ideea că inserţiile musculare ale muşchilor mimicii tracţionează în sens apical fibrele parodonţiului, s-au imaginat tehnici variate, care urmăresc deplasarea acestor inserţii musculare în sens apical. Aceste tehnici sînt utilizate în cazul hiperplaziilor gingivo-parodontale generalizate de cauză generală evidentă, sau recidivante, precum şi în cazul parodontopatiilor marginale cronice generalizate.

Intervenţiile se execută sub anestezie locală (plexală sau tronculară periferică, după caz) folosindu-se tehnici asemănătoare cu cele utilizate în vestibulo-plastii (adîncirile de şanţ vestibular prin deplasarea în sens apical a inserţiei mucoasei mobile). De asemenea, frenul labial, superior şi inferior, poate tracţiona asupra fibrelor parodontale, favorizînd dezinserarea şi retracţia lor, precum şi compromiterea unei gingivoplastii, prin alunecarea unui lambou din vecinătate. In aceste situaţii, se va utiliza una din tehnicile de frenectomie sau/şi frenoplastie, după caz, tehnici ce aparţin chirurgiei proprotetice.

Intervenţiile pe fren sau pe bride, în cadrul parodontopatiilor, sînt indicate în următoarele situaţii clinice:

- în scopul eliminării tracţiunii exercitate de către fren sau bride atunci cînd acestea se asociază cu o inflamaţie persistentă, mai ales cînd inserţia lor este extrem de aproape de gingia marginală;
- pentru a preveni o retracţie gingivo-parodontală, mai ales cînd aceasta se asociază cu o adîncime inadecvată a gingiei keratinizate.

După secţionarea frenului sau bridei şi eliberarea acestora, suprafaţa sîngerîndă poate fi acoperită cu o grefă de mucoasă liberă, sau suturată longitudinal, obţinîndu-se alungirea.

Intervenţii asociate

Gingivectomia, operaţia cu lambou şi chiuretajul subgingival se pot asocia, în tratamentul parodontopatiilor marginale, la acelaşi caz, în raport cu forma leziunilor şi cu topografia lor. Astfel, la nivelul porţiunii de arcadă, în care pungile nu depăşesc 3 mm, se face chiuretaj, iar în porţiunile în care pungile depăşesc 3-4 mm se poate face operaţie cu lambou. In mod obişnuit, se asociază operaţia cu lambou cu gingivectomia sub următoarele două forme:

- gingivectomie la dinţii laterali şi operaţie cu lambou la dinţii frontali;
- gingivectomie pe versantul palatinal îndeosebi şi operaţie cu lambou pe versantul vestibular.

Această asociere este indicată îndeosebi la nivelul dinţilor frontali superiori, cînd există pungi deosebit de adînci, cu granulaţie abundentă şi hiperplazie marginală gingivală evidentă.

Zonele critice, unde specialistul trebuie să acţioneze, sînt reprezentate de epiteliul invaginat, precum şi de ţesutul de granulaţie de la nivelul pungii şi îndeosebi interproximal, la nivelul zonelor retentive, la dinţii

cu malpoziţii: rotaţi în ax, oralizaţi sau vestibularizaţi. Epiteliul invaginat trebuie înlăturat pentru a permite fibrelor conjunctive tinere să se reatageze la suprafaţa dintelui şi pentru a elimina posibilitatea formării unei bariere epiteliale în calea proliferării ţesutului conjunctiv de vindecare. De asemenea, ridicarea fibrelor ligamentului parodontal de pe suprafaţa osului, facilitează migrarea celulelor cu potenţial osteogenetic dinspre os în defect.

Osteoplastia

Rezorbţia osoasă neregulată, întîlnită în cursul evoluţiei paradontopatiilor marginale cronice, se datorează formei anatomice variate a dinţilor, accesibilităţii variate pe diferite suprafeţe radiculare ale instrumentelor folosite pentru controlul plăcii dentare, ceea ce produce o distrucţie a osului alveolar, mai severă pe o faţă a rădăcinii decît pe cealaltă.

Tendinţa actuală modernă reconstructivă în chirurgia paradontală, bazată pe progresele în cunoaşterea biologiei proceselor de refacere osoasă, a făcut ca şi defectele osoase parodontale să fie tratate.

Aceste defecte parodontale pot fi rezolvate fie prin remodelare, cu transformarea atrofiei verticale în una orizontală - avînd drept consecinţă stabilizarea temporară a fenomenelor la un nivel mai scăzut de implantare osoasă a dinţilor -, fie prin umplerea cu diferite tipuri de transplante care vizează stimularea refacerii, cel puţin parţiale a osului marginal alveolar. In acest scop au fost utilizate următoarele tipuri de transplante:

- transplante autologe, proaspete sau conservate, fiind cunoscut faptul că celulele situate în grosimea osului spongios au o capacitate ridicată de a deveni celule cu competenţă osteogenică şi deci de a produce os. Ca atare, pungile osoase parodontale sînt plombate cu os spongios recoltat din alveolele postextracţionale recente (5-6 săptămîni), de la nivelul peretelui postero-extern al tuberozităţii maxilarelor (Nabers), sau de la nivelul crestei iliace antero-superioare (Schallhorn, Boyce);

- transplante osoase homologe conservate, liofilizate şi decalcificate sau îngheţate şi conservate, matricea osoasă a acestora jucînd rol osteoinductor pentru celulele tinere ce migrează la nivelul defectului din profunzimea osului alveolar sau transplante homologe de colagen obţinute din scleră;

- transplante heterogene conservate, tip "os minerale" Osipov-Sineşti.

Alte materiale utilizate sînt implantele de hidroxiapatită sub formă de granule, sau pulberea de corali marini, care se amestecă cu sîngele recoltat prin puncţie venoasă, sau amestecat cu sîngele de la nivelul defectului osos.

Granulele de hidroxiapatită, ca şi pulberea de corali marini, acţionează ca matrice osteoinductoare pentru celulele tinere de la nivelul patului operator, favorizînd diferenţierea acestora în celule cu potenţial osteoformator.

Toate aceste implante se introduc la nivelul defectului, fără o supraumplere a acestuia, pînă la nivelul înălţimii osului marginal alveolar care nu este nivelat. In mod obligatoriu, înainte de introducerea transplantului, se vor practica foraje endostale, în fundul defectului osos, cu freza rotundă în turaţie lentă, spre a realiza comunicarea, prin aceste tunele, a spaţiilor profunde medulare din spongioasa osului alveolar cu defectul şi a stimula astfel migrarea celulelor medulare la nivelul acestuia. De asemenea, este indicată decorticarea pereţilor pungii osoase în scopul avivării defectului. După introducerea transplantelor sub formă de fragmente de 1-4 mm, cu umplerea defectelor osoase, se practică reaplicarea lambourilor gingivo-periostale şi sutura plăgii cît mai îngrijită cu putinţă, pentru a evita denudarea transplantelor şi punerea lor în contact cu mediul bucal. Plaga operatorie va fi, în mod obligatoriu, protejată cu cementuri parodontale. Se va evita supraumplerea defectelor ce favorizează o tensiune pe linia de sutură cu dehiscenţă a plăgii şi suprainfectare a transplantului.

Tratamentul postoperator; evoluţie, rezultate

Pentru protecţia plăgii operatorii, după gingivectomie, operaţie cu lambou sau gingivoplastie, se utilizează diferite formule de cimenturi parodontale, care se prezintă sub formă de paste (constituite dintr-un amestec de fibre de celuloză, sau bumbac, cu substanţe antiseptice vegetale şi un aditiv care ajută la priza acestuia). Ele se aplică sub formă de rulouri, care fac priză imediat în mediul bucal, după prealabila uscare a patului operator (produse comerciale de tip Peripac, Septopac). Alte produse sînt pe bază de pectine (Oral Adhesive Bandage) ce fac priză în mediul bucal, sau pe bază de butylciancacrilaţi în soluţie etilică, sub formă de spray (Akutol), formînd o peliculă protectoare a plăgii. Aceste pansamente se schimbă după 4-5 zile. Plaga este de obicei curată, cel mult cu mici depozite fibrinoase, care se ridică prin uşoară ecuvionare cu comprese cu apă oxigenată.

In cazul în care nu se foloseşte o tehnică de gingivoplastie, marginile plăgii pot fi uşor sîngerînde la scoaterea primului pansament, iar rădăcinile dentare parţial descoperite. In aceste cazuri, vindecarea plăgii şi acoperirea osului se realizează prin granulare secundară dinspre marginile plăgii, atît vestibular cît şi oral.

Prin dispariţia inflamaţiei şi cicatrizarea fibroasă strînsă, care rezultă după vindecare completă a plăgii prin granulare secundară, se realizează o remineralizare activă a osului, dinţii îşi reduc mult mobilitatea şi îşi recapătă o capacitate funcţională aproape de normal.

La nivelul coletului dinţilor ce rămîn descoperiţi după gingivectomie, de obicei persistă şi se accentuează sensibilitatea de tip dentinar (durere provocată de agenţi chimici şi termici).

In cazul în care se utilizează diferite tehnici de reconstrucţie gingivo-plastică, vindecarea plăgii se face "per primam" de obicei, dacă nu intervin complicaţii (prin tulburări de irigaţie ale lambourilor decolate şi deplasate), care să conducă la retracţii şi la anularea rezultatului intervenţiei.

Scanned with OKEN Scanner

Totuşi, trebuie menţionat că, nici în cazul unei vindecări primare după gingivoplastie, nu se poate obţine un contur gingival normal, o recesiune a joncţiunii epiteliu-ciment de 1-2 mm fiind considerată în limite normale.

Tratamentul de întreţinere după intervenţiile chirurgicale în parodontopatii

Intervenţiile chirurgicale trebuiesc considerate ca un moment în tratamentul parodontopatiilor marginale, pentru menţinerea şi consolidarea rezultatelor fiind indispensabile o serie de îngrijiri de importanţă cu totul deosebită, şi anume:

a. restabilirea morfofuncţională prin lucrări protetice corecte, bine adaptate şi neiritante pentru parodonţiu;

b. stabilizarea protetică a dinţilor mobili prin şine de fixare sau mobile;

c. igiena buco-dentară riguroasă şi stimularea troficităţii locale prin periaj sistematic după o tehnică corectă, masaje gingivale şi o masticaţie activă, controlul permanent al plăcii dentare, conştientizarea bolnavului în această direcţie;

d. tratament general pentru eventualele tulburări cu rol în etiopatogenia parodontopatiilor;

e. controalele periodice la fiecare 4-6 luni, cînd se face controlul plăcii dentare, detartrajul şi eventualele chiuretaje subgingivale dacă se constată recidive.

C A P I T O L U L VII

METODE CHIRURGICALE AJUTATOARE TRATAMENTULUI PROTETIC

Chirurgia proprotetică studiază metodele chirurgicale ce urmăresc, corectarea unor deficienţe morfologice ale cîmpului protetic, localizate la nivelul dinţilor stîlpi, gingiei, crestelor alveolare, suprafeţelor maxilare sau structurilor celulo-grăsoase perimaxilare care creiază dificultăţi pen. o bună protezare.

Scopul intervenţiilor chirurgicale proprotetice este acela de a creia condiţii optime pentru o bună protezare fixă sau mobilă în edentaţiile reduse, întinse sau totale.

CONDITIILE NECESARE UNUI CIMP PROTETIC EDENTAT:

Pentru a permite o protezare în condiţii optime, cîmpul protetic trebuie să îndeplinească următoarele condiţii:

- crestele alveolare edentate să fie suficient de înalte, netede, regulate;
- bolta palatină să fie suficient de mare cu torus redus;
- tuberozităţile maxilare să fie bine reliefate şi dure, înconjurate de şanţuri perituberozitare;
- eminenţele piriforme să fie situate la nivelul trigonurilor retromolare, bine reprezentate şi ferme;
- crestele milohioidiene neproeminente şi insensibile la presiune digitală;
- apofizele genii normal situate, de dimensiuni moderate;
- spina nazală anterioară neproeminentă şi la distanţă de creasta alveolară;
- găurile mentoniere să fie situate la distanţă de coama crestei alveolare;
- inserţiile muşchilor: bucoinatori, milohioidieni, genioglosi şi mentonieri la distanţă de creastă;
- frenurile labiale şi linguale să fie lungi, suple, fixate la distanţă de creastă;
- fibromucoasa gingivală să ocupe o zonă suficient de lată, întinsă, imobilă, bine vascularizată, căptuşită cu un strat dermic cu rezilienţă normală;

- şanţurile vestibulare şi paralinguale să aibă o profunzime suficientă, netraversate de bride fibroase sau ţesut cicatricial scleros;
- limba să aibă un volum normal;
- perioada neprotezată a edentaţiei să fie cît mai scurtă.

PREVENIREA FORMELOR DE EDENTAŢIE NEFAVORABILE (PROFILAXIA CIMPULUI PROTETIC)

Principiul profilactic trebuie să conducă toate acţiunile terapeutice asupra dinţilor şi proceselor alveolare, pentru a preveni producerea stărilor nefavorabile viitoarelor tratamente protetice restauratoare.

Profilaxia începe cu extracţia primului dinte.

In extracţia dentară, ca şi în toate intervenţiile asupra proceselor alveolare şi a părţilor moi, trebuie să se aleagă tehnicile cele mai conservatoare, să se sacrifice cît mai puţin os, să se protejeze corticala şi să se urmărească dirijarea procesului de cicatrizare pentru a obţine un cîmp protetic favorabil.

In extracţia dentară pentru a păstra o creastă alveolară bine conformată acoperită cu o mucoasă aptă pentru protezare se recomandă următoarele metode:

- extracţia alveoloplastică;
- plastia alveolară reconstructivă, postextracţională imediată (vezi capitolul extracţia dentară).

Pregătiri preoperatorii

Orice intervenţie chirurgicală proprotetică este obligatoriu să fie precedată de un examen clinic locoregional cît mai riguros, completat cu examene radiografice, ori de cîte ori se intervine asupra substratului osos pentru a exclude existenţa unor procese patologice endoosoase (dinţi inclusi, osteoame, odonteame, chisturi reziduale etc).

Se impun de asemeni un examen general complet, teste de laborator corespunzătoare cînd se efectuează intervenţii proprotetice mai ample şi mai ales la bolnavii vîrstnici.

Aceste intervenţii sînt indicate cu prudenţă, în unele cazuri chiar contraindicate sau temporizate (la bolnavii cu vîrstă avansată, la cei cu deficienţe organice grave, stări infecţioase ale cavităţii bucale).

Preoperator se confecţionează dispozitive protetice ca: gutiere, plăci palatinale sau proteze conformator care să fie aplicate la sfîrşitul intervenţiei chirurgicale pentru menţinerea rezultatului şi dirijarea procesului de vindecare.

I n d i c a ţ i i

Metodele chirurgicale proprotetice sînt indicate în acele situaţii care împiedică protezarea eficientă.

Deficienţe ale părţilor moi

a. Mucoasa subţire, întinsă, aderentă de os, necăptuşită cu un strat suficient de ţesut dermic de amortizare, cu o circulaţie deficitară, expusă la tulburări trofice şi decubitusuri prin presiunea protezei.

b. Mucoasă hiperplazică sub formă de franjuri, hiperplazii unice, bifide sau multiple situate, la mandibulă, pe faţa vestibulară sau linguală, iar la maxilar, mai ales vestibular. Aceste hiperplazii epitelioconjunctive care formează adevărate pseudotumori, sînt rezultatul reacţional faţă de iritaţia cronică exercitată de marginile neregulate, uneori tăioase ale unor proteze vechi, neechilibrate, iritative. Ele pot fi voluminoase, îngroşate, indurate, cu o bază largă de implantare, sau subţiri, flotante, pediculate, întîlnite de obicei la bolnavii care şi-au extras dinţii din cauza prezenţei unor procese parodontale marginale cu pungi endoosoase subţiri serpiginoase.

In bolta palatină se pot produce de asemenea formaţiuni pseudotumorale proliferative, sub acţiunea iritativă prelungită dată de rondelele de cauciuc sau de alte dispozitive, folosite pentru realizarea unei succiuni necesare stabilităţii protezelor.

Uneori, procesul hiperplazic se întinde de-a lungul întregii creste alveolare, fiind mai accentuat în regiunea frontală şi a tuberozităţilor. Asocierea cu o rezorbţie accentuată a osului alveolar face ca fibromatoza gingivală să dea aspectul de creastă moale "balantă". Acest proces este datorat acţiunii iritative prelungite a protezelor cu stabilitate deficitară, care prin mişcările verticale şi orizontale exagerate şi prin repartizarea inegală a presiunilor provoacă pe de o parte, rezorbţia crestei alveolare, şi pe de altă parte, proliferarea epitelioconjunctivă.

Hiperplaziile epitelioconjunctive pot suferi, prin iritaţiile cronice la care sînt expuse, procese de hipercheratoză cu posibilităţi de degenerare şi transformare malignă.

La nivelul tuberozităţii pot apare uneori procese de fibromatoză care deformează regiunea respectivă fie în plan vertical, fie în plan transversal. Aceste procese de fibromatoză apar uneori cînd zona respectivă nu a fost mult timp protezată, dar pot fi şi congenitale. Dacă sînt exagerat de voluminoase împiedică inserarea unei proteze mobile corecte afectînd închiderea posterioară.

c. Frenuri linguale şi labiale scurte sau îngroşate şi proeminente, inserate pe coama crestei alveolare.

d. Bride fibroase anormale şi procese scleroase cicatriciale în şanţurile vestibulare, datorate traumatismelor osteomucoase (extracţii laborioase, accidente traumatice) sau proceselor inflamatorii osoase şi ale părţilor moi.

e. Ingustarea zonei de mucoasă fixă cu inserţia mucoasei mobile pe marginea proeminentă a osului, astfel încît şanţurile pericoasoase sînt mai reduse.

f. Inserţia apropape de creasta alveolară a muşchilor (bucoinator, milohioidian, genioglosi, geniohioidieni), rezultă prin atrofia osoasă exagerată.

In aceste situaţii protezele neavînd baza anatomică care să le asigure o suprafaţă de adeziune suficient de mare şi o bună retentivitate, sînt dislocate cu uşurinţă şi chiar expulzate în timpul mişcărilor funcţionale, prin mobilizarea mucoasei, prin contracţia muşchilor subjacenţi şi prin intrarea în tensiune a brideler şi a frenurilor.

Deficienţe ale substratului osos

Osul alveolar poate prezenta fie deformaţii în exces, fie procese de atrofie accentuată.

a. Deformaţiile prin proeminenţe în exces:

- Creasta alveolară neregulată cu proeminenţe accentuate (ciocuri) ascuţite, acoperite cu mucoasă subţire, aderentă, care provoacă dureri, zone de decubitus, sau dau o instabilitate a protezelor prin lipsa de adaptare corectă.

- Creasta alveolară subţire, uneori chiar ascuţită; această creastă subţiată poate prezenta devieri importante vestibulare, îndeosebi frontale: alveolopatruzii superioare şi inferioare.

- Creasta alveolară proeminentă sau plonjantă care suprimă spaţiul dintre arcade, necesar protezării, îndeosebi în porţiunile laterale. Apare de obicei cînd dinţii de pe arcadă s-au extras precoce, osul alveolar avînd tendinţă de egresiune şi ocupînd astfel spaţiul edentat.

- Hiperostoza tuberozităţilor, cu îngroşarea masivă a întregii tuberozităţi, sau sub formă de proeminenţe voluminoase orientate transversal (vestibulo-palatinal - în ciupercă, sau vertical - plonjante). Sînt datorate extracţiei traumatizante a molarilor de minte superiori, urmate de fisuri ale osului; fiind o zonă cu un ţesut spongios neosteogenetic abundent procesul de vindecare se face prin depunerea exagerată de ţesut osos. Prezenţa lor împiedică realizarea unei proteze mobile corespunzătoare.

- Torusurile palatine şi mandibulare hipertrofice care devin mai aparente prin atrofia alveolară.

- Formaţiuni patologice endoosoase, profunde, care se superficializează, ajungînd să bombeze la suprafaţă pe măsură ce osul alveolar se atrofiază (dinţi incluşi, odonteame, osteoame).

b. Atrofiile osoase dau cele mai mari dificultăţi în protezare. Rezorbţia progresivă postextracţională este în general mai redusă şi are un mers mai lent la edentaţii care au pierdut dinţii prin carii, foarte accentuată, generalizată şi cu mers mai rapid după paradontopatiile marginale progresive.

La mandibulă, atrofia poate depăşi chiar procesul alveolar, interesînd şi porţiunea bazilară, osul ajungînd de grosimea unui creion. In aceste

cazuri, canalul dentar ajunge superficial, iar gaura mentonieră chiar pe coama crestei alveolare.

La maxilar, prin atrofia alveolară se produce o diminuare a arcadei în toate dimensiunile, atît transversal cît şi vertical; arcul maxilar se micşorează şi se strîmtează mult, bolta palatină devine plată, etajul mijlociu al feţei apărînd micşorat, turtit. Atrofia osoasă se însoţeşte de obicei şi de modificări ale dispoziţiei şi structurii mucoasei acoperitoare. La mandibulă, prin dispariţia crestei alveolare, porţiunea de mucoasă fixă este mult îngustată, redusă, ajungînd uneori la o simplă linie, mucoasa mobilă vestibulară continuîndu-se aproape fără întrerupere cu mucoasa mobilă sublinguală; planşeul bucal în acest caz, bombează herniind deasupra coamei osoase.

La maxilar, mucoasa mobilă vestibulară se continuă cu fibromucoasa palatină, neexistînd nici un fel de retentivitate pe versantul extern al arcului maxilar. Sanţurile periosoase sînt complet şterse, atît la mandibulă cît şi la maxilar.

Atrofia osoasă la vechii purtători de proteze poate fi asociată cu procese de fibromatoză gingivală (creste balante, mobile).

In aceste situaţii, protezele totale nu pot avea nici o stabilitate şi ele plutesc în cavitatea bucală, dislocîndu-se la cele mai mici mişcări funcţionale.

METODE CHIRURGICALE PROPROTETICE

In practică sînt folosite următoarele metode:

I. Operaţii de modelare plastică a părţilor moi;
II. Operaţii de modelare plastică a osului.
III. Reconstituirea plastică a reliefului crestei alveolare.
IV. Implante aloplastice.

I. OPERATII DE MODELARE PLASTICA A PARTILOR MOI

1. Mucoasa subţire deficitară

Se face excizia porţiunei subţiri a mucoasei, netezirea suprafeţei osoase cu o pensă ciupitoare sau cu o freză sferică şi aducerea prin decolare din vecinătate a unor mici lambouri de mucoasă, de bună calitate, cu care se acoperă osul.

La nevoie porţiunea osoasă rămasă denudată poate fi acoperită cu o grefă de piele liberă suturată marginal.

2. Excizia plastică a hiperplaziilor gingivomucoase

Formaţiunile pseudotumorale sînt extirpate chirurgical, suprafaţa sîngerîndă rămasă fiind acoperită cu mucoasă alunecată din vecinătate sau cu transplante epidermice.

Tehnica operatorie variază în raport cu aspectul clinic şi cu localizarea acestor hiperplazii, astfel:

- Hiperplaziile gingivomucoase puţin întinse, unice, situate pe

versantul vestibular, sînt extirpate printr-o incizie în felie de portocală la baza lor de implantare; dacă sînt franjuri multiple, unite între ele, se face excizie în bloc; dacă sînt tumorete multiple, distanţate, separate prin porţiuni de mucoasă sănătoasă, se va face excizia fiecăreia în parte. In situaţiile cînd hiperplaziile gingivo-mucoase se asociază cu o îngustare marcată a şanţurilor periosoase se poate practica decăptuşirea şi etalarea zonei de mucoasă în aşa fel încît să nu rămînă os descoperit. In mod obligatoriu după intervenţiile făcute pentru hiperplazii gingivo-mucoase vestibulare postoperator se va aplica proteza ale cărei margini căptuşite în hipercorecţie cu stents, dentaflex sau optosil vor menţine rezultatul obţinut prin intervenţie. Această completare va fi ulterior definitivată direct în cabinet cu acrilat autopolimerizabil sau indirect în laboratoare cu acrilat termopolimerizabil (Fig.7.1.).

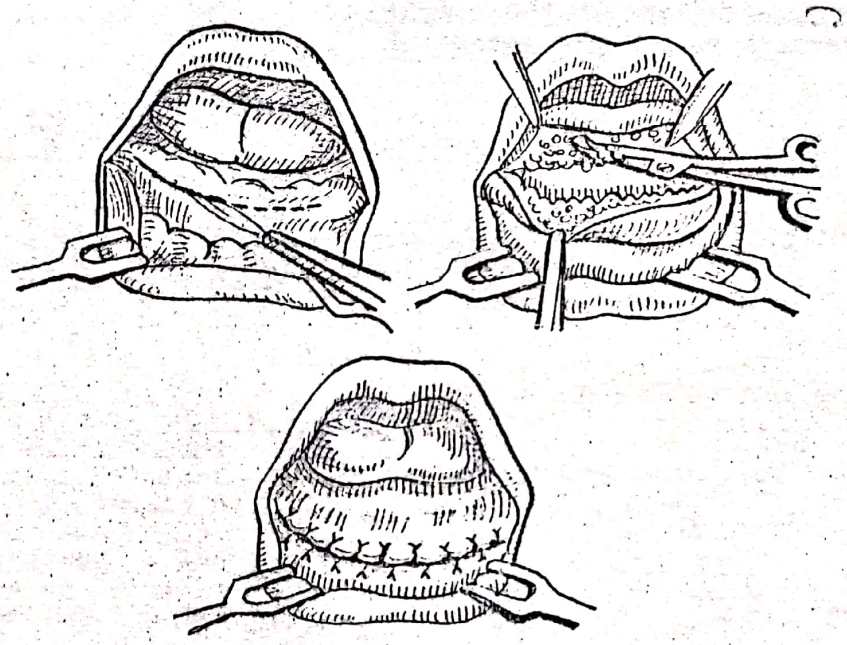


Fig.7.1. Excizia plastică a hiperplaziilor gingivo-mucoase vestibulare.

Hiperplaziile de pe creasta alveolară (creastă balantă) se excizează prin două incizii, vestibular şi oral, de-a lungul formaţiunii de creastă moale, mobilă, care se unesc spre os în formă de "V". Marginile plăgii sînt apropiate şi suturate. Si în acest caz aplicarea imediată a unei proteze corectate se impune pentru a dirija procesul de cicatrizare (Fig.7.2.).

Fibromatozele tuberozitare - In fibromatozele transversale se fac două incizii curbe de-a lungul tuberozităţii, vestibular şi palatinal, care se unesc la extremităţi şi se excizează mucoasa şi tot ţesutul fibromatos astfel delimitat, pînă la periost. Se completează decăptuşirea ţesutului fibros în exces, de la nivelul celor două lambouri de fibromucoasă, care apoi sînt apropiate şi suturate (Fig.7.3.).

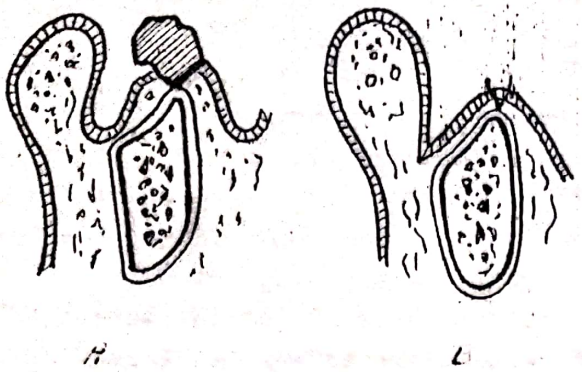


Fig.7.2. Excizia crestelor balante: A.Porţiunea de fibromatoză gingivală este excizată prin incizie în "V";B.Aplicarea mucoasei pe creasta osoasă şi sutura.

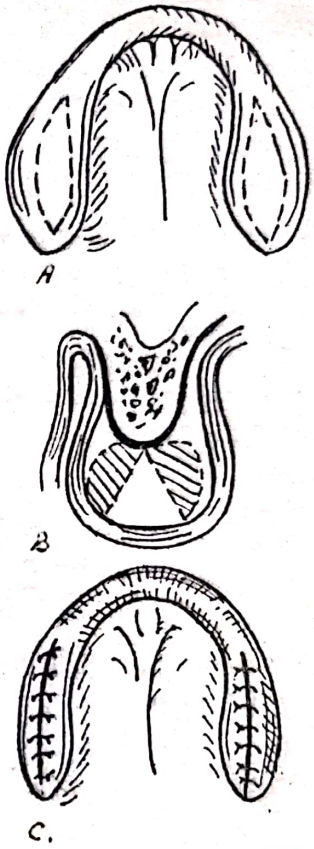


Fig.7.3.Excizia fibromatozelor tuberozitare bilaterale:A.Linia de incizie; B.Excizia "în felie de pepene" completată cu cea a ţesutului fibromatos submucos (haşurat); C.Sutura.

In fibromatozele tuberozitare descendente se fac două incizii, vestibular şi palatinal, care se unesc în "V" la nivelul crestei osoase, înscriindu-se formaţiunea tuberozitară în exces, aceasta fiind apoi extirpată. Marginile plăgii sînt apropiate şi suturate. Dacă fibromatozele tuberozitare sînt însoţite şi de o îngroşare osoasă manifestă, se efectuează în acelaşi timp şi rezecţia modelantă a osului.

Hiperplaziile pseudotumorale palatinale sînt extirpate printr-o incizie în imediata apropiere a pedicululuí tumoretei. Plaga sîngerîndă este protejată cu meşă iodoformată, menţinută cu placa protetică. Defectul de mucoasă se vindecă prin epitelizare secundară.

3. Frenurile labiale sau linguale anormale

Corectarea plastică a frenurilor anormale se poate face prin 3 metode chirurgicale: frenotomia, frenectomia, frenoplastia.

Frenotomia este indicată cînd frenurile sînt scurte şi subţiri. După anestezia locală prin infiltraţie, se face simpla incizie transversală a frenului, cu bisturiul sau cu foarfeca de plastie, astfel se obţine eliberarea imediată a limbii sau buzei şi adîncirea şanţului vestibular sau sublingual.

Frenectomia - este indicată în frenurile labiale hipertrofice îngroşate şi constă în excizia acestora. Anestezie prin infiltraţie locală. Prin îndepărtarea buzei se pune în evidenţă frenul îngroşat care este prins cu o pensă; se face o incizie eliptică de o parte şi de alta, mergînd dinspre buză spre creasta alveolară, înscriindu-se porţiunea îngroşată şi extirpîndu-se; marginile plăgii sînt apoi suturate (Fig.7.4.).

Frenoplastia - este indicată în cazurile în care frenurile linguale sau labiale sînt deosebit de scurte. Pentru alungirea acestora se vor practica următoarele procedee:

Incizia transversală a frenului cu sutura marginilor plăgii perpendiculare pe linia de incizie (Fig.7.5.).

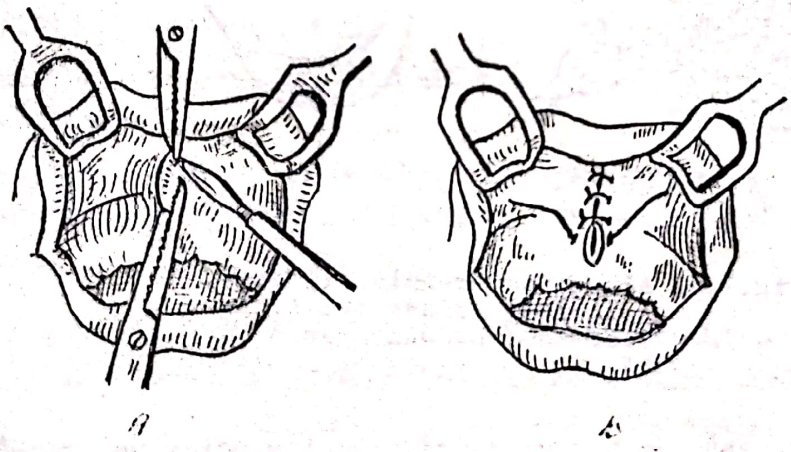


Fig.7.4. Frenectomia: A. Excizia "în felie de pepene"; B. Sutura.

Două incizii angulare de o parte şi de alta a bridei formată de frenul scurt, excizîndu-se o porţiune romboidală. Laturile acestui romb sînt eliberate prin decolare, apropiate şi suturate pe linia mediană, de-a lungul unei linii care se întinde atît pe versantul osos cît şi pe cel labial (Fig.7.6.).

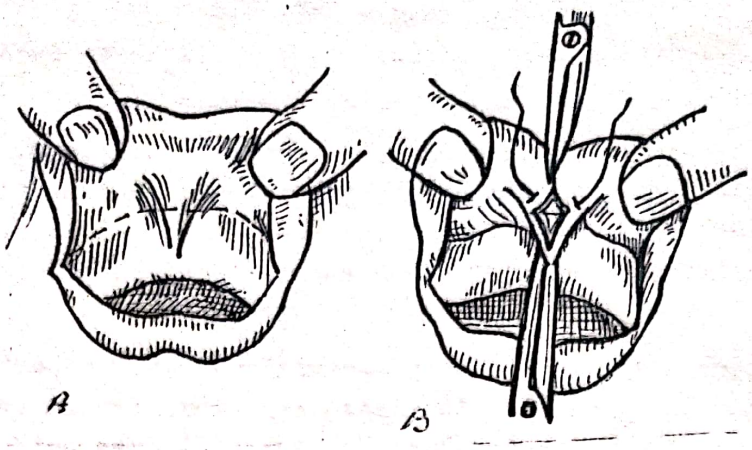


Fig.7.5. Freneplastia labială prin incizie transversală: A. Incizia orizentală; B.Sutura verticală.

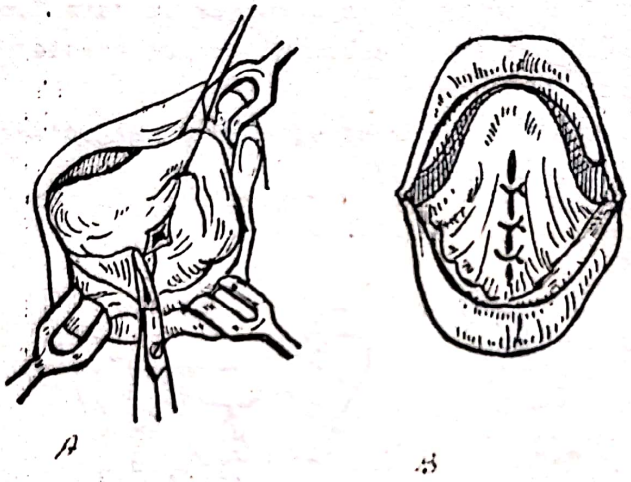


Fig.7.6. Alungirea frenului lingual. A.Incizia transversală cu foarfeca; B.Sutura verticală

Incizia în "V", cu vîrful la nivelul inserţiei pe creastă a frenului; frenul este desprins şi împins împreună cu părţile moi ale buzei spre fundul şanţului vestibular. Se face sutura cu cîteva fire marginale astfel încît linia de sutură să ia forma de "Y", alungindu-se frenul şi realizîndu-se un şanţ vestibular adînc.

Plastia în "Z": incizie mediană de-a lungul frenului şi două incizii orizentale - una la inserţia sa pe creasta alveolară, cealaltă la extremitatea sa labială. Cele două lambouri triunghiulare obţinute astfel sînt decolate şi deplasate prin alunecare, fiind aduse şi aşezate unul în continuarea celuilalt. Astfel se obţine alungirea frenului şi adîncirea şanţului vestibular, lambourile fiind suturate în această poziţie (Fig.7.7.).

4. Bridele vestibulare şi paralinguale

Prin intervenţia chirurgicală se urmăreşte eliberarea părţilor moi labio-geniene şi linguale, pentru refacerea adîncimii şanţurilor periosoase.

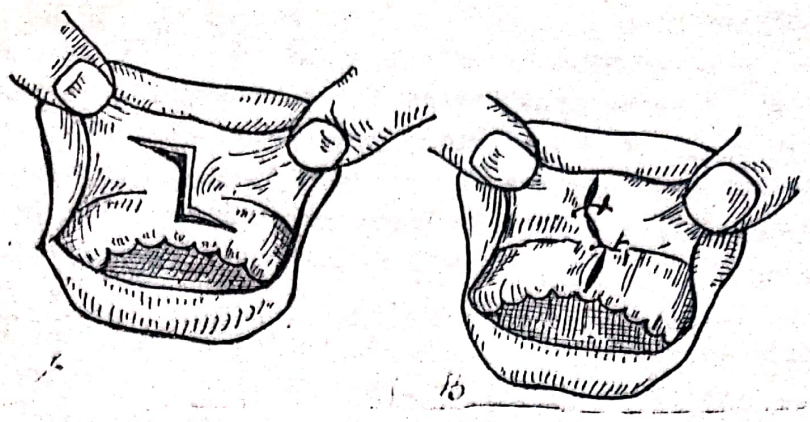


Fig.7.7. Frenoplastia labială prin incizie în "Z";
A. Incizia; B. Sutura.

Tehnica operatorie este în raport cu aspectul anatomo-clinic al bridei:

- cînd există o bridă mică şi subţire şi cînd mucoasa învecinată este normală, se face secţionarea simplă, transversală a bridei cu sau fără sutură;

- cînd brida este îngroşată şi realizează aderenţe ale părţilor moi labio-jugale sau ale limbii, este indicată excizia plastică. După incizia transversală a bridei pînă la periost se excizează ţesutul fibrocicatricial; marginile mucoasei decăptuşite sînt apropiate şi suturate pe o linie perpendiculară pe linia de incizie.

O proteză conformator aplicată imediat postoperator va dirija procesul de cicatrizare.

- în bride subţiri şi scurte, cînd ţesuturile subjacente şi cele vecine sînt suple, este indicată plastia în "Z", după tehnica descrisă la frenoplastie.

5. Inserţia pe creastă a mucoasei mobile cu îngustarea zonei de mucoasă fixă şi ştergerea şanţurilor periosoase

Prin intervenţia chirurgicală se urmăreşte extinderea suprafeţei osoase acoperită cu mucoasă fixă cu rezilienţă normală, precum şi adîncirea şanţurilor periosoase. Se folosesc următoarele metode operatorii:

a. plastia şanţurilor periosoase;

b. plastia prin dezinserţia muşchiului milohioidian (metoda Trauner);

c. plastia şanţurilor perituberozitare (operaţia Celesnik);

d. plastia submucoasă a şanţurilor vestibulare (operaţia Obwegeser).

a. Plastia şanţurilor periosoase prin deplasarea inserţiilor mucoasei Metoda a fost preconizată de Kazanjian şi este indicată cînd inserţia mucoasei mobile se face pe creasta alveolară, iar şanţurile vestibulare sînt şterse.

Refacerea şanţurilor este posibilă numai dacă atrofia osoasă nu este prea accentuată, astfel încît să se poată obţine relieful necesar

stabilităţii protezei.

T e h n i c a - după anestezie tronculară periferică, se face o incizie în mucoasa mobilă pe versantul vestibular al crestei alveolare, la 1,5 cm, de linia de inserţie a mucoasei fixe; incizia interesează mucoasa şi ţesutul submucos pînă la periost. Cu un decolator fin se desprinde mucoasa şi ţesutul celular subjacent, împingîndu-se spre marginea bazilară cînd intervenţia se face la mandibulă, sau cît mai în sus în intervenţiile la maxilar, pentru a se obţine adîncimea necesară a şanţului respectiv; se sutureză apoi la periost marginile lambourilor de mucoasă, în fundul şanţului nou creat. Menţinerea şanţului vestibular creat se poate realiza prin aplicarea unor proteze conformatoare. Pot fi folosite vechile proteze ale căror margini se completează în şedinţă cu stents sau acrilat autopolimerizabil sau se confecţionează preoperator plăci protetice sau gutiere din acrilat, care sînt completate prin căptuşire intraoperator

La maxilar pentru o mai bună fixare a protezelor conformatoare, se va aplica o frontă mentonieră. La mandibulă fixarea se poate obţine şi prin fire trecute circumferenţial peste proteză în jurul osului şi scoase la piele, unde sînt înnodate pe bourdoneturi submandibulare.(Fig.7.8).

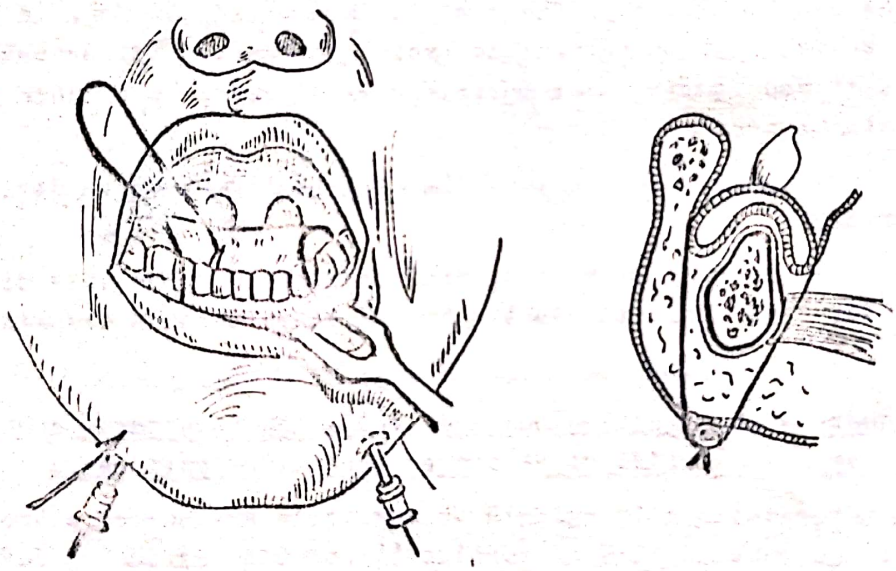


Fig.7.8. Aplicarea protezei mandibulare conformatoare după plastia de adîncire a şanţului vestibular prin deplasarea inserţiei mucoasei mobile: A. Introducerea firelor de sîrmă cu ajutorul acelor de seringă; B. Innodarea firelor la piele pe burdoneturi.

Plastia şanţurilor periosoase cu transplante epidermice. Această metodă preconizată de Esser şi modificată de Dan Theodorescu este indicată îndeosebi în cazurile în care vestibulul este ocupat de procese cicatriciale scleroase (posttraumatice, postcaustice sau după supuraţii prelungite), cînd deci reconstituirea şanţului prin simpla deplasare a mucoasei şi părţilor moi nu dă rezultate.

T e h n i c a: incizia mucoasei cu excizia ţesutului de scleroză care umple şanţul vestibular. Se decolează cît mai adînc spre marginea bazilară părţile moi de pe faţa externă a osului, căutîndu-se a nu se leza periostul sau buchetul mentonier. Se pregăteşte mulajul conformator dintr-un ruleu de stents înmuiat, ce se aşează în şanţul nou creat şi peste care se aplică proteza sau gutiera, ale cărei margini vestibulare pătrund în masa termoplastică.

Pe mulajul conformator sînt aplicate transplantele epidermice Ollier-Tiersch, recoltate de pe coapsă sau abdomen, acoperindu-se cu ele porţiunea care corespunde suprafeţei sîngerînde. Se introduce apoi proteza cu mulajul conformator în şanţul vestibular nou creat, suprafaţa sîngerîndă fiind astfel căptuşită pe toată întinderea cu transplantele epidermice. Dacă proteza nu are stabilitate suficientă, se poate face o fixare suplimentară cu fire circumferenţiale perimandibulare scoase la piele şi înnodate cu bourdoneturi.

Transplantele se grefează în 8-10 zile, după care timp se scoate proteza şi se înlocuieşte mulajul conformator în laborator cu acrilat autopolimerizabil. In cazurile dificile, cu ştergerea atît a şanţurilor vestibulare, cît şi a celor paralinguale şi îndeosebi cînd mucoasa gingivală este de proastă calitate se practică următorul procedeu: printr-o incizie de-a lungul crestei alveolare se decolează larg şi se deplasează mucoasa, descoperindu-se osul atît pe coama crestei, cît şi pe versantele sale vestibulare şi orale; pe suprafaţa denudată se aplică transplante epidermice. In anumite situaţii cînd patul de grefare este mai extins sau mai slab vascularizat se pot aplica şi grefe de piele liberă despicată, suturată marginal peste care se aplică apoi proteza conformator ale cărei margini au fost completate cu dentaflex sau stents.

b. Plastia şanţurilor paralinguale prin dezinserţia muşchiului milohioidian (metoda Trauner). Este indicată cînd muşchiul milohioidian se inseră foarte aproape de creastă, prin această intervenţie, urmărindu-se extinderea versantului lingual al cîmpului protetic, prin deplasarea planşeului bucal spre marginea bazilară a mandibulei.

T e h n i c a. Preoperator se confecţionează fie o proteză cu dinţi , fie o simplă gutieră din acrilat.

Anestezia tronculară periferică bilaterală: incizie imediat înăuntrul crestei alveolare; se descoperă muşchiul milohioidian, care este încărcat pe un decolator şi se secţionează inserţia sa pe creasta osoasă.

Planşeul eliberat este împins în jos spre marginea inferioară a mandibulei şi fixat în noua poziţie prin fire transfixiante scoase la piele submandibular şi înnodate pe bourdoneturi. Se aplică apoi proteza prelungită cu aripioare linguale. Pentru a se grăbi epitelizarea, se poate acoperi suprafaţa periostală denudată cu transplante epidermice, aplicate pe proteză (Fig.7.9.).

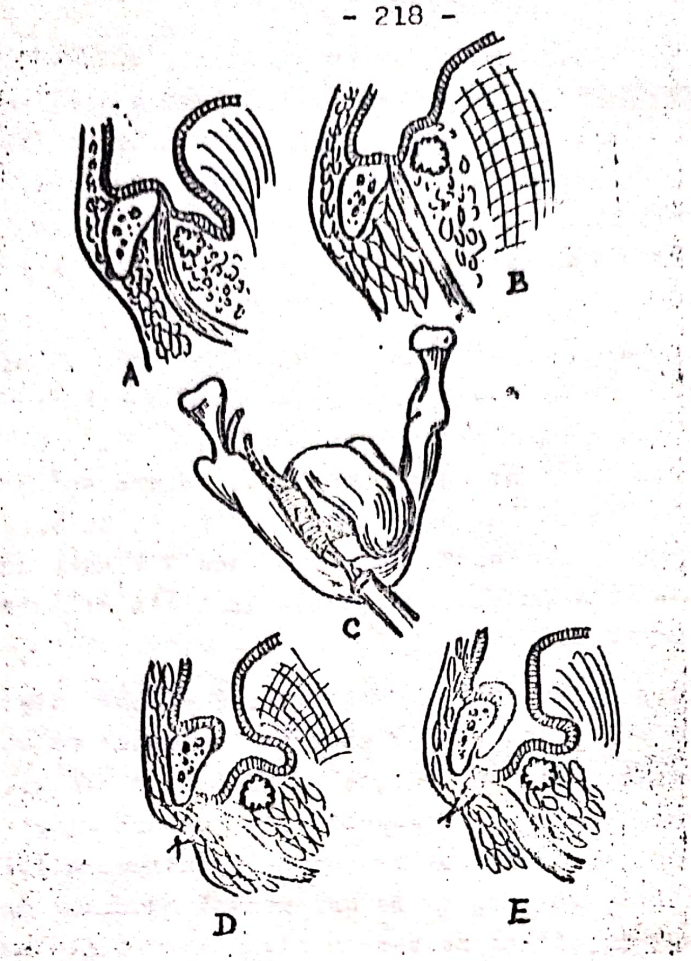


Fig.7.9. Adîncirea şanţurilor paralinguale (metoda Trauner): A.Atrofia crestei alveolare inferioare cu inserţia m.milohioidian pe coama osului B.In mişcările limbii, mucoasa sublinguală proemină deasupra crestei; C. M.milohioidian este încărcat pe un decolator pentru a se face secţionarea inserţiei sale de pe os ; D.Mucoasa împreună cu muşchiul,deplasate spre marginea bazilară a osului, sînt fixate cu un fir scos la piele; E. Şanţul creat este menţinut cu o gutieră conformatoare cu o prelungire linguală.

c. Plastia şanţuriler perituberozitare (metoda Celesnik). Este indicată în edentaţiile totale maxilare, cu atrofia accentuată a tuberozităţilor şi constă în crearea unui şanţ perituberozitar, care să ofere retentivitate distală protezei.

T e h n i c a. Anestezia nervilor dentari postero-superiori şi a nervilor palatini. Se face o incizie care înconjoară tuberozitatea, prelungindu-se în mucoasa velară.

Părţile moi sînt decolate şi împinse în sus; cu pensa de os se rezecă aripa externă a apofizei pterigoide; astfel tuberozitatea este degajată de jur împrejur, rezultînd un şanţ suficient de adînc. Se aplică placa palatinală, completată cu un mulaj conformator de stenta, care este acoperit cu transplante epidermice. Astfel,suprafaţa sîngerîndă a şanţului perituberozitar

neu creat este căptuşit cu epiteliu.

Placa protetică va fi imobilizată cu o frondă mentonieră sau prin tracţiune interoraniomaxilară pe tije extrabucale. După definitivarea cicatrizării (două luni) se trece la confecţionarea protezei definitive (Fig.7.1e).

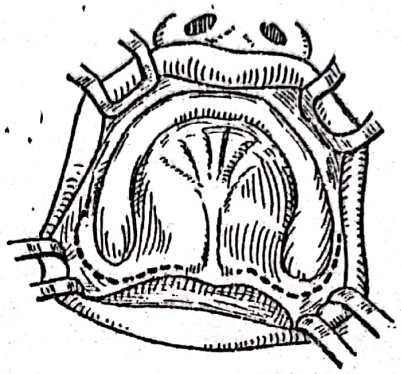


Fig.7.1e. Incizia pentru plastia şanţurilor perituberozitare (metoda Celesnik).

d. Plastia submucoasă a vestibulului (tehnica Obwegeser). Constă în decolarea submucoasă a părţilor moi de pe os, prin incizii mici, urmărindu-se să se obţină o aderare directă a mucoasei la periost şi astfel extinderea zonei de mucoasă fixă.

T e h n i c a. Anestezia tronculară periferică asociată cu infiltraţie mucoasă. Incizia mică a mucoasei lîngă frenul labial şi două incizii în regiunea caninilor. Se introduce prin aceste incizii un foarfece cu braţele subţiri şi lungi şi se desprinde de pe periost tot ţesutul submucos şi inserţiile musculare. Se poate face şi excizia ţesutului granulomatos în exces pentru decăptuşirea mucoasei. Mucoasa decolată şi decăptuşită este reaplicată şi menţinută pe periost fie cu o proteză completată cu stents (conformator) fie prin sutură în "saltea" (Fig.7.11).

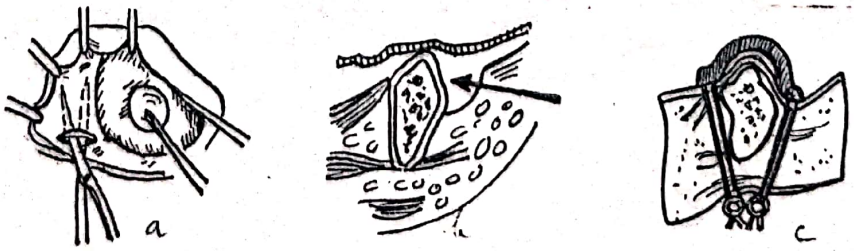


Fig.7.11. Plastia şanţurilor vestibulare prin clivaj submucos (metoda Obwegeser): A. Decolarea submucoasă cu foarfeca; B. Spaţiul clivat realizat; C. Aplicarea mucoasei pe os cu gutieră conformatoare.

II. OPERATII DE MODELARE PLASTICA A OSULUI

Asupra osului se pot efectua intervenţii de corectare plastică, atît în deformaţiile prin proeminenţe (în exces) cît şi în procesele de atrofie osoasă. Indicaţia operatorie va fi pusă pe baza examenului clinic, completat obligatoriu cu examenul radiologic, spre a se vedea structura osului şi a se controla dacă nu există procese patologice endoosoase (tumori, chisturi, dinţi incluşi), precum şi pentru stabilirea raporturilor cu sinusul maxilar, fosele nazale, canalul dentar etc.

Deformaţiile în exces sînt corectate prin următoarele metode:

a. regularizarea crestei alveolare;
b. rezecţia modelantă a crestelor alveolare în protruzie;
c. corectarea hiperostozelor tuberozitare;
d. rezecţia modelantă a torusurilor.

a. Regularizarea crestei alveolare - Intervenţia este indicată în cazuri de proeminenţe osoase neregulate, dispuse de-a lungul crestei alveolare

T e h n i c a . In proeminenţele limitate, se secţionează mucoasa şi periostul acoperitor. Se descoperă proeminenţa osoasă şi se rezecă cu dăltiţa sau cu pensa ciupitoare de os. Se netezeşte apoi osul cu o chiuretă sub control palpatoriu şi se face sutura plăgii cu fire nerezorbabile.

In neregularităţile multiple, preoperator se pregăteşte o placă protetică. Se face o incizie pe coama crestei alveolare de-a lungul zonei de operat; se decolează periosteomucoasa, punîndu-se în evidenţă neregularităţile osoase, care sînt rezecate cu dăltiţa sau cu pensa ciupitoare şi netezite cu o chiuretă pînă la nivelarea uniformă a osului. Lambourile periosteomucoase se sînt suturate, după care se aplică proteza (Fig.7.12).

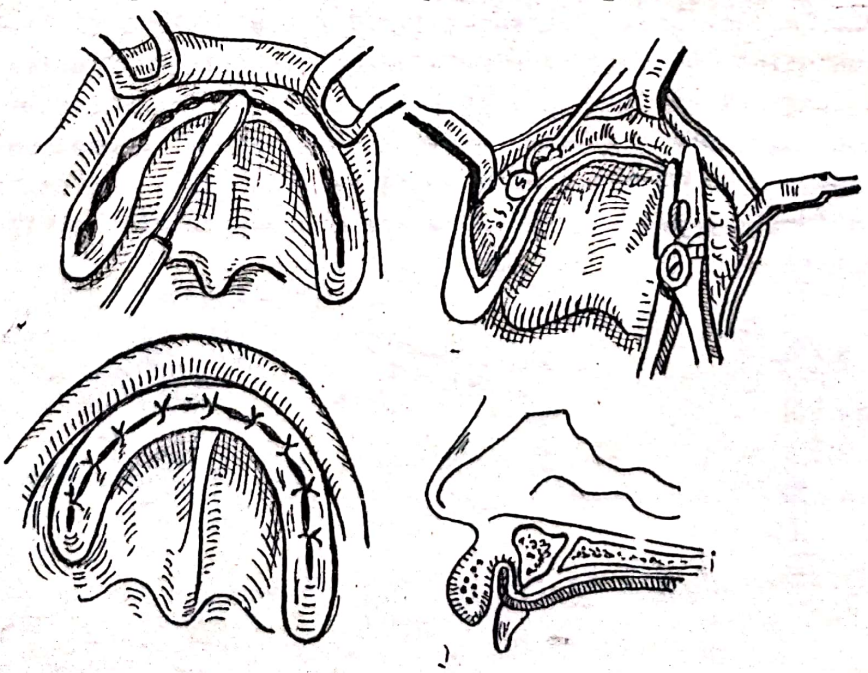


Fig.7.12. Regularizarea crestei alveolare pe întreaga arcadă
A.Incizia şi decolarea; B. Rezecţia ciocurilor osoase cu pensa ciupitoare de os şi netezirea cu chiureta; C.Sutura; D.Aplicarea imediată a protezei.

b. Rezecţia modelantă a crestei alveolare în protruzie. Intervenţia constă în rezecţia porţiunii subţiate şi deformate, în scopul creării unui relief alveolar favorabil protezării.

T e h n i c a. Incizie pe creasta proeminentă. Se decolează periosteo-mucoasa şi cu pensa ciupitoare de os se rezecă porţiunea în exces, care apare proeminentă, deviată şi ascuţită.

După netezirea osului se face o mică excizie de mucoasă, pentru ca aceasta să rămînă bine adaptată şi întinsă pe os şi se suturează, aplicîndu-se imediat proteza de dirijare a cicatrizării (Fig.7.13).

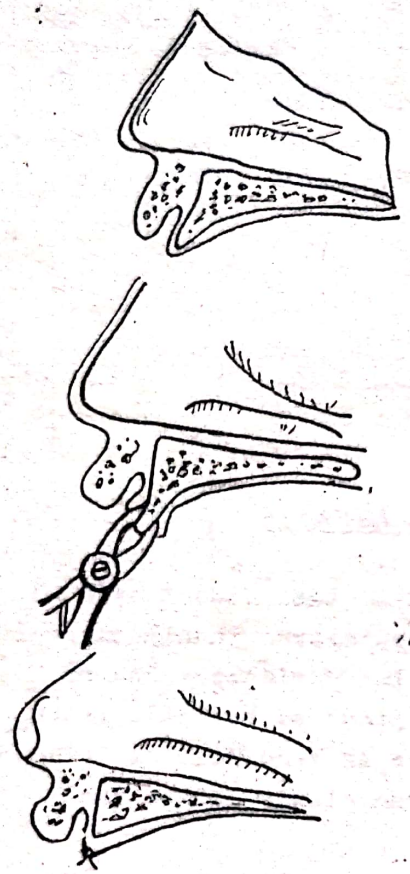


Fig.7.13. Operaţia modelantă în alveloprotruzie: A. Creasta alveolară superioară subţire şi deviată vestibular; B. După incizia şi decolarea periosteomucoasei, porţiunea proeminentă este rezecată cu pensa ciupitoare; C. Sutura.

c. Rezecţia modelantă a torusurilor este indicată numai cînd torusurile palatine sau submandibulare sînt deosebit de voluminoase şi cînd, prin atrofia crestelor alveolare ies şi mai mult în relief, provocînd basculavea protezelor.

- Rezecţia torusului palatin - Printr-o incizie pe linia mediană a bolţii şi cîte două mici incizii divergente la capete, de-a lungul proeminenţei osoase se denudează formaţiunea osoasă în exces şi se rezecă în aschii cu dalta şi ciocanul. Cu chiureta sau cu freza se netezeşte suprafaţa osoasă, lambourile de fibromucoasă fiind apoi reduse şi suturate.

- Rezecţia torusului mandibular - Incizie de-a lungul feţei linguale a crestei alveolare; se descoperă proeminenţa osoasă pe toată întinderea şi se rezecă porţiunea în exces, nivelîndu-se versantul lingual al osului;

sutură.

d. Corectarea hiperostozelor tuberozitare - Printr-o incizie de-a lungul tuberozităţii deformate se rezecă porţiunea osoasă în exces, tuberozitatea fiind redusă la dimensiunile şi forma normală (Fig.7.14).

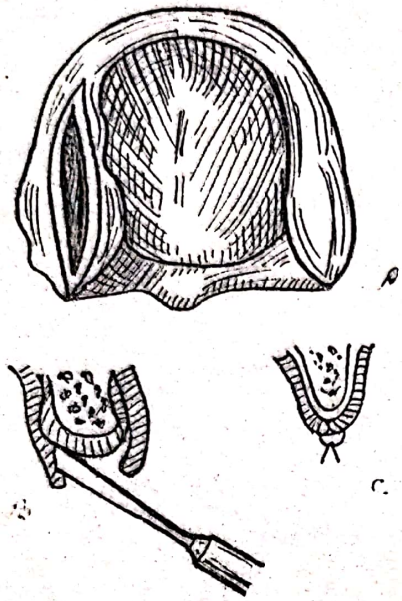


Fig.7.14. Rezecţia modelantă a tuberozităţilor hiperostozice: A. Incizia; B. Descoperirea tuberozităţii îngroşate şi rezecţia porţiunii osoase în exces; C.Sutura.

RECONSTITUIREA PLASTICA A RELIEFULUI ALVEOLAR

Plastia de adiţiune este indicată atunci cînd baza osoasă este foarte mult redusă, datorită procesului de atrofie postextracţională şi deci cînd, prin procedeele obişnuite de plastie a şanţurilor periosoase, nu se poate obţine un relief suficient, care să oferă sprijinul şi retentivitatea necesară protezei. Pentru realizarea reliefului alveolar s-au folosit heterotransplante sau homotransplante conservate şi autotransplante osoase sau cartilaginoase.

In ultima vreme se folosesc implantele din ceramohidroxiapatită introduse fie sub formă de granule, fie sub formă de baghetă care se solidarizează pe os. Se fac încercări de asemenea cu baghete din ceramohidroxilapatită combinată cu colagen.

Autotransplantele osoase recoltate din creasta iliacă sau tibie, fiind supuse presiunii directe a protezei, suferă un proces de rezorbţie progresivă.

Reconstituirea crestei alveolare cu autotransplante de cartilagiu pentru plastia de adiţiune a crestei alveolare are avantajul că îşi păstrează vitalitatea, se integrază în ţesuturile gazdă, căpătînd legături vitale cu aceste ţesuturi, fără să-şi modifice structura şi fără să sufere procese de rezorbţie sau de metaplazie.

Scanned with OKEN Scanner

T e h n i c a

Timpul I - Sub anestezie locală, se recoltează din blocul cartilaginos costal un fragment de cartilagiu lung de 7-8 cm şi lat de 2 cm. Cartilagiul este despicat în două jumătăţi, care sînt modelate cu bisturiul dîndu-se forma crestei alveolare, pentru a se adapta pe coama crestei osoase.

Timpul II - Printr-o mică incizie endobucală vestibulară mediană se creează, cu un decolator fin, un tunel subperiostic de-a lungul coamei osoase, de la linia mediană pînă la unghiul intern al mandibulei; cele două fragmente modelate sînt introduse în aceste tunele subperiostale şi adaptate pe coama osoasă. Cartilagiul se fixează în scurt timp şi după 10 zile se trece la protezare (Fig.7.15).

Pentru reconstrucţia reliefului crestei alveolare se foloseşte de asemeni şi cartilagiul fragmentat, în bucăţi mici de 1 mm, introdus în tunelul subperiostal creat de-a lungul arcului osos mandibular.

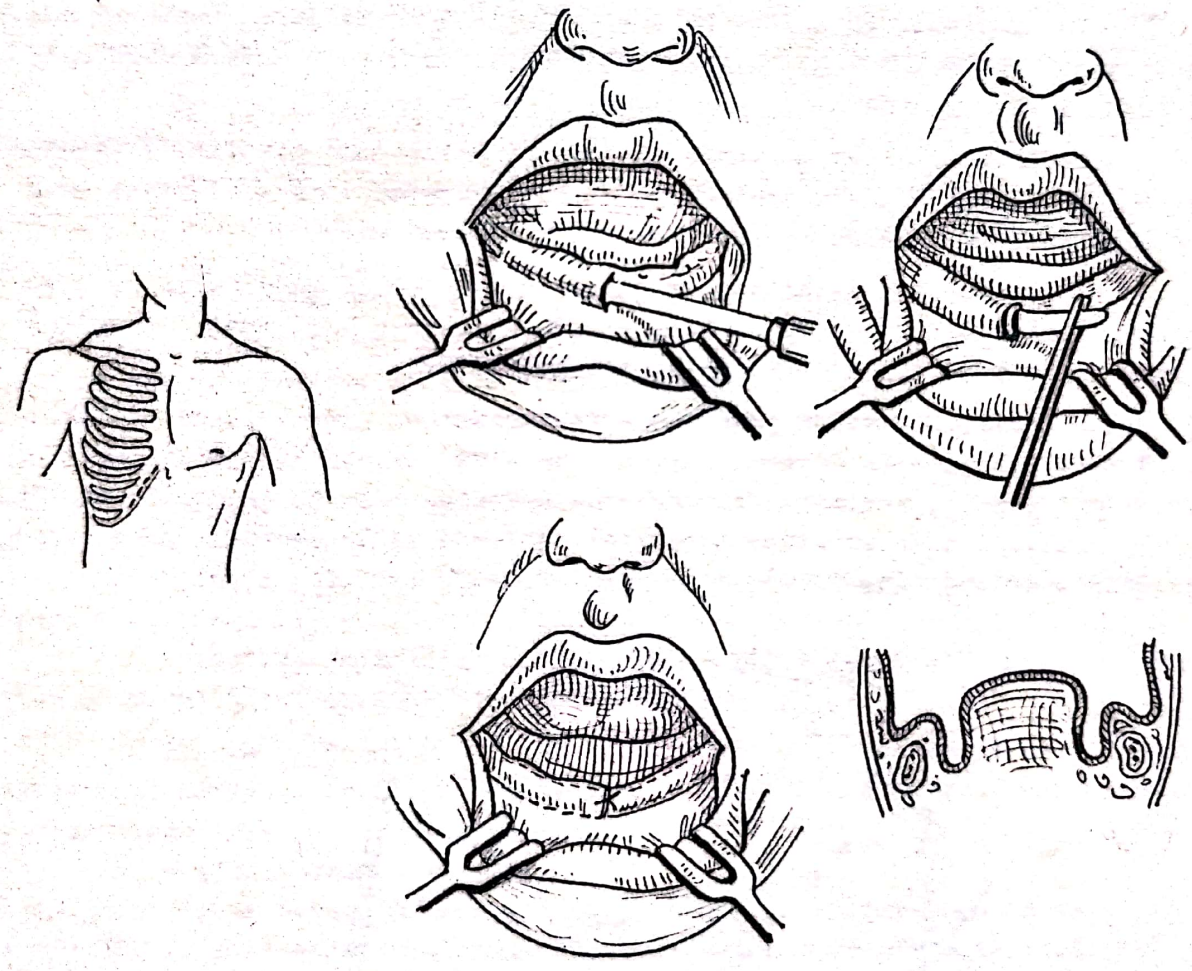


Fig.7.15. Reconstituirea crestei alveolare prin autotransplant cartilaginos costal: A. Linia de incizie pentru recoltarea cartilagiului costal; B. Incizia pe creastă şi crearea tunelului subperiostal de-a lungul coamei osoase; C. Introducerea autotransplantului cartilaginos în tunelul juxtaosos; D. Sutura; E. Relieful refăcut al crestei alveolare.

RECONSTITUIREA CRESTEI ALVEOLARE PRIN AUTOTRANSPLANTE OSOASE

Osteotransplantele aplicate strict subgingival se suprainfectează foarte uşor şi se elimină. Din această cauză s-au imaginat alte metode de înălţare a crestei alveolare, atît superioare cît şi inferioare.

Pentru maxilar se practică înălţarea crestei alveolare de la o tuberozitate la alta aplicînd aşa numitele grefe osoase "inlay" prin despicarea crestei restante şi introducerea unui osteotransplant costal sau de creastă iliacă fixat cu sîrme de osteosinteză sau plăcuţe miniaturizate.

În atrofiile accentuate maxilare de tip centripet în care maxilarul rămîne disproporţionat de mic faţă de mandibulă, se practică osteotomii ale plateului palato-alveolar cu avansarea sa şi aplicarea unui autotransplant osos la nivelul suturii pterigomaxilare.

La mandibulă se aplică un autotransplant pe marginea bazilară urmat de adîncirea şanţurilor vestibulare, intervenţie care se practică după ce transplantul osos s-a solidarizat cu osul (după 5-6 luni).

S-au imaginat de asemenea osteotomii orizontale practicate în zona frontală între cele 2 găuri mentoniere cu introducerea unui transplant osos iliac tip "sandwish" între suprafeţele osoase sîngerînde.

Sînt descrise osteotomii sagitale ale corpului mandibular cu mobilizarea şi înălţarea versantului lingual şi realizarea unui şanţ corespunzător care să asigure stabilitatea protezei inferioare.

Progresele privind procedeele de amprentare ale cîmpului protetic edentat total ca şi cele de realizare a retenţiei protezelor mobile sînt din ce în ce mai perfecţionate astfel încît se apelează mai rar la aceste metode.

Folosirea ceramohidroxiapatitei uşurează mult tehnicile de plastie în atrofiile osoase (Fig.7.16).

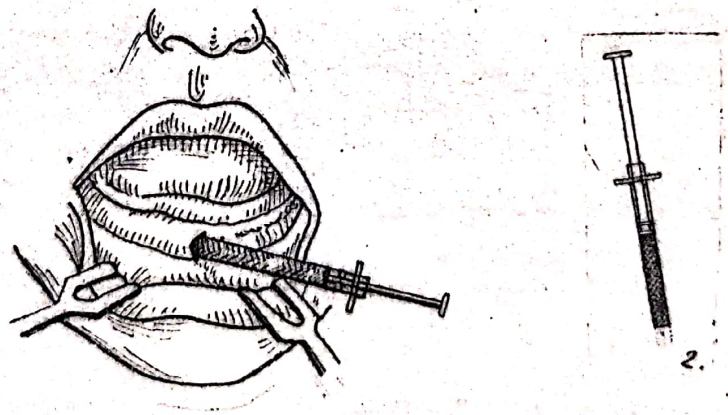


Fig.7.16. Tehnica înălţării crestei alveolare inferioare cu ceramohidroxiapatită (ALLOTROPAT): 1.Introducerea materialului ceramic printr-o incizie mediană în tunelul subperiostal creat pe coama crestei alveolare;2. Aplicatorul încărcat cu granule de hydroxil- apatităpregătit pentru utilizare.

PREGATIREA CHIRURGICALA A CIMPULUI PROTETIC EDENTAT PARTIAL

Condiţiile necesare unui stîlp de punte

Pentru ca un dinte să poată fi folosit ca stîlp de punte sau ca mijloc de ancorare a unei proteze mobilizabile, trebuie să îndeplinească următoarele condiţii:

- să aibă o bună implantare reprezentată printr-o rădăcină suficient de lungă;
- să nu prezinte mortificări sau procese patologice periapicale;
- să aibă o coroană corespunzătoare care să permită paralelizarea şi inserarea unei lucrări protetice;
- să aibă un parodonţiu marginal corespunzător.

In cazul dinţilor devitali, canalele radiculare trebuie corect tratate prin metodele conservatoare sau cu ajutorul unei metode chirurgicale ajutătoare terapiei endodontice.

Condiţia parodonţiului marginal dacă este cazul, poate fi îmbunătăţită prin tratamente antiinflamatoare şi chiar prin intervenţii chirurgicale.

Intervenţiile chirurgicale proprotetice în edentaţiile parţiale sînt indicate în:

- extruzii alveolo-dentare în bloc, cu dezechilibru ocluzo-articular la care după examenul modelelor de studiu se constată că refacerea planului de ocluzie necesită coronoplastie (scurtarea în sens apical a coroanei dintelui). Consecutiv acestei preparaţii proprotetice, în vederea inserării viitorului element de agregare este necesară o alungire a coroanei clinice care se obţine printr-o gingivectomie circulară "în coleretă";
- infradenţia sau oligodonţia cu dinţi incomplet eruptţi cu porţiunea coronară scurtă sau dinţi cu un volum al coroanei mai mic; în aceste situaţii pentru a asigura retenţia viitoarei lucrări protetice este necesară alungirea coroanei clinice;
- dinţi puternic abrazaţi la care suprafaţa de abraziune este în apropierea gingiei;
- resturi radiculare situate la marginea gingivală care au însă substanţa dentinară dură suficientă şi rădăcina lungă.

Pentru a obţine o coroană clinică cît mai favorabilă aplicării unui dispozitiv protetic (coroană de învelis, reconstituire corono-radiculară) se pot practica două intervenţii chirurgicale:

- gingivectomia simplă;
- gingivectomia asociată cu rezecţia unui inel osos la nivelul marginii libere a alveolei dintelui respectiv (alveolectomia circulară parţială).

Gingivectomia simplă

Gingivectomia în scopul măririi coroanei clinice a dintelui se deosebeşte de gingivectomia din tratamentul parodontopatiilor.

Intervenţia se efectuează de obicei pe dinţi fără procese distrofice ale parodonţiului marginal care mărgineso o breşă edentată; ei pot avea

sau nu dinţi vecini;

A n e s t e z i e: locoregională prin injecţie.

T e h n i c a: se măsoară cu sonda vestibular şi oral adîncimea şanţului gingival de la marginea liberă a gingiei, pînă la rebordul alveolei şi se înţeapă cu o sondă mucoasa la acest nivel.

Incizia secţionează mucoasa în unghi drept sau cu un uşor bizou spre apex pe versantul oral şi vestibular. Mezial şi distal, cînd nu există dinţi vecini, incizia vestibulară şi cea orală se unesc într-un unghi ascuţit, pe mijlocul crestei alveolare, la distanţă de 2-3 mm de dinte, secţionîndu-se mucoasa pînă la os. Se decolează apoi mucoasa gingivală şi se îndepărtează apoi cu un decolator sau cu un instrument de detartraj mărindu-se astfel coroana clinică extraalveolară a dintelui.

Suprafaţa sîngerîndă a gingiei se poate proteja fie cu meşe iodoformate, fie cu ciment parodontal.

Lucrarea protetică eventual provizorie trebuie inserată după aproximativ 5-6 zile pentru ca cicatrizarea să fie dirijată.

Dacă prin această tehnică, după îndepărtarea gingiei, se constată că dimensiunea verticală a coroanei este totuşi insuficientă ea mai poate fi mărită prin rezecţie osoasă marginală (alveolectomie circulară).

Alveolectomia circulară parţială

Tehnica decurge la început la fel ca la gingivectomia simplă apreciindu-se înălţimea coroanei dintelui, descoperindu-se cît mai bine marginea liberă a pereţilor alveolari. Cu o daltă mică şi bine ascuţită se rezecă marginea liberă a alveolei în jurul dintelui, mărindu-se în felul acesta înălţimea coroanei. Dacă dintele are vecini, rezecţia se opreşte vestibular şi oral în dreptul septului osos interdentar; lucrarea protetică va fi modelată în funcţie de conturul osos la distanţă mică de suprafaţa sîngerîndă, pentru a permite gingiei prin cicatrizarea secundară să se interpună între coroană şi os.

Îngrijirile postoperatorii şi confecţionarea lucrării protetice sînt identice ca la gingivectomia simplă.

Scanned with OKEN Scanner

C A P I T O L U L VIII

IMPLANTELE ALOPLASTICE

Dorinţa de înlocuire a dinţilor lipsă prin implante este foarte veche iar soluţiile propuse în timp au fost variate.

In ultimile 4 decenii implantologia s-a dezvoltat foarte mult. La ora actuală prin implant se înţelege introducerea în organism a unui corp străin organic sau anorganic care înlocuieşte un organ bolnav; acest implant nu are nici un contact cu mediul extern.

Implantele dentare în mod fortuit au o porţiune juxtaosoasă sau intraosoasă şi altă porţiune intrabucală fapt pentru care sînt numite "semi-implante".

La locul de trecere al implantului prin gingivo-mucoasă nu este realizată o închidere perfectă a comunicării patului implantului cu cavitatea bucală. Acest fapt favorizează pe de o parte pătrunderea de germeni în jurul implantului subgingival sau intraosos, iar pe de altă parte proliferarea epiteliului gingival de-a lungul stîlpilor implantului care duce în final la izolarea sa de către organism.

Materialele din care se confecţionează implantele dentare sînt aliaje de crom-cobalt, tantal, titan, ceramică, ceramohidroxiapatită, biovitro-ceramică (bioglass).

Din punct de vedere al tolerabilităţii aceste materiale sînt considerate bioinerte în sensul că sînt acceptate de organism; despre unele din aceste materiale (titan, ceramohidroxiapatită, biovitroceramică) se afirmă în urma unor studii histologice şi de microscopie electronică că ar fi bioactive deci integrate în organism prin realizarea unor legături histologice de tip fibros cu osul şi cu gingia.

Implantele actuale mai des utilizate în practica stomatologică sînt:

I. Implante subperiostale sau juxtaosoase.

II. Implante endoosoase.

Scanned with OKEN Scanner

I. IMPLANTELE ALOPLASTICE JUXTAOSOASE SAU SUBPERIOSTALE

Metoda constă în introducerea subperiostală a unor implante metalice în formă de schelet, care se sprijină pe suprafaţa osului; scheletul este prevăzut cu stîlpi metalici, care traversează mucoasa şi servesc la sprijinirea şi fixarea viitoarei proteze (Fig.8.1.).

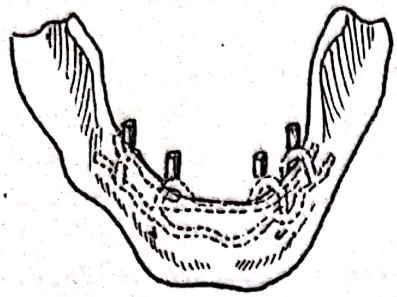


Fig.8.1. Implant aloplastic juxtaosos.

Preconizată în 1942 de către suedezul DAHL, această nouă metodă a fost însuşită şi practicată de o serie de autori, îndeosebi după publicaţiile lui GOLDBERG şi GERSCHOFF (1949).

Deşi marea majoritate a rezultatelor postoperatorii sînt încurajatoare, metoda nu este unanim acceptată şi este considerată ca o terapie de excepţie. Este indicată în edentaţiile totale şi parţiale terminale maxilare şi mandibulare, îndeosebi la pacienţii cu intoleranţă faţă de protezele mobile sau la cei cu obligaţii profesionale care impun o foarte bună stabilitate a protezei.

Pentru reuşita intervenţiei este necesar ca gradul de atrofie osoasă să nu fie prea mare, pentru ca scheletul juxtaosos să aibă un sprijin bun; o altă condiţie esenţială este ca pacientul să aibă o stare generală bună.

Intervenţia se efectuează după vindecarea completă, cu restructurarea definitivă a osului (6-8 luni de la ultima extracţie).

In indicaţia implantelor se va ţine seama de gradul de labilitate psihică a bolnavului. Nereuşita intervenţiei la cei cu psihicul labil, influenţează nefavorabil starea lor şi creiază dificultăţi mai mari în aplicarea protezelor clasice.

Contraindicaţii. Starea generală alterată, vîrsta foarte înaintată, leziuni evolutive ale mucoasei bucale şi ale osului, procesele scleroase, cicatriciale ale mucoasei crestei alveolare. Nu se va face indicaţia operatorie, decît după ce un examen atent radiologic va infirma existenţa proceselor patologice care ar putea compromite intervenţia (chisturi, procese tumorale, dinţi incluşi, resturi radiculare etc). Examenul radiologic este necesar, atît pentru furnizarea datelor asupra stării osului cît şi pentru precizarea raporturilor crestei alveolare cu canalul alveolar, gaura mentonieră, sinusul maxilar.

Preoperator, se confecţionează o lingură individuală din acrilat cu ajutorul căreia se va lua amprenta directă a osului. Inainte de operaţie

lingura individuală se va steriliza prin fierbere.

Intervenţia se practică în două şedinţe operatorii în aceiaşi zi sau la distanţă de 3-4 săptămîni. Vom prezenta ca tip de intervenţie, operaţiile efectuate la mandibula edentată total în vederea aplicării unui implant juxtaosos.

Timpul I. Se face anestezia tronculară periferică cu novocaină 4% sau xilină 2% + adrenalină şi infiltraţie subperiostală pe toată întinderea crestei alveolare.

Incizie pe creasta alveolară de la un unghi mandibular la celălalt, cu decolarea largă a părţilor moi şi descoperirea ambelor versante osoase cît mai mult pînă aproape de marginea bazilară.

Pentru reproducerea fidelă a reliefurilor osoase se ia amprenta cu material siliconat, folosind lingura individuală. După verificarea corectitudinei amprentei, lingura se reaplică pe os, se aşează pe coama sa două rulouri de ceară şi se determină ocluzia. Se ridică lingura şi se face sutura îngrijită, completă a plăgii, îndepărtîndu-se orice urmă de corpi străini. Se trimite amprenta la laboratorul de tehnică dentară unde se confecţionează implantul din crom-cobalt sau crom-cobalt - molibden.

Dacă bolnavul a fost purtător de proteză mobilă pentru dirijarea procesului de cicatrizare este preferabil să se aplice postoperator imediat proteza.

Timpul II - Intervenţia pentru introducerea implantului se execută fie în aceiaşi zi după ce s-a confecţionat implantul la distanţă de 5-6 ore de prima intervenţie fie după dispariţia completă a reacţiilor postoperatorii locale, la un interval de 3-4 săptămîni de la prima intervenţie.

In cazul în care intervenţia se practică în aceiaşi zi cu luarea amprentei, după anestezia locoregională, se îndepărtează firele de sutură şi se decolează lambourile gingivo-mucoase, aplicînd implantul direct pe suprafaţa osului. Dacă intervenţia se face la distanţă de 3-4 săptămîni de la luarea amprentei după anestezie, se face incizia pe creasta alveolară urmărind cicatricea rănasă după intervenţia anterioară. Se descoperă larg osul prin decolarea lambourilor periosteomucoase atît vestibular cît şi lingual, menajîndu-se buchetul mentonier. Implantul este introdus şi aşezat la locul său pe suprafaţa osoasă. Implantul trebuie să se adapteze perfect pe suprafaţa osului. Orice basculare în sens lateral sau axial este urmată de fenomene inflamatorii locoregionale şi în final de respingere.

Lambourile periosteomucoase sînt afrontate corect şi suturate de-a lungul crestei, avîndu-se grije ca în jurul stîlpilor să se realizeze o adaptare perfectă a periosteomucoasei.

Reacţiile postoperatorii dispar în cîteva zile. Bolnavul va folosi o alimentaţie lichidă şi alimente moi timp de 4-6 zile şi va păstra o igienă bucală foarte îngrijită. Firele de sutură se scot după 7 zile. Fixarea implantului prin retenţii, cuie sau şuruburi nu este indicată deoarece survin

Scanned with OKEN Scanner

procese de osteoliză urmate de mobilizarea acestuia. Păstrarea intactă a corticalei osoase este una din condiţiile de bază pentru reuşita metodei.

Protezarea definitivă se face după ce s-au scos firele. In acest scop se construieşte în laborator, odată cu scheletul implantului o punte totală care se ancorează prin cape metalice la stîlpii transmucoşi. Dinţii artificiali vor fi confecţionaţi din acrilat pentru a permite o modelare fiziologică şi anihilînd parţial microtraumatismele care se produc asupra osului.

Punţile totale cu capе pot fi cimentate pe stîlpii transmucoşi, pot fi fixate cu dispozitive demontabile sau pot fi purtate ca atare.

La modelarea scheletului punţii, trebuie să se ţină seama ca în părţile laterale să fie suspendată, iar în regiunea frontală să corespundă cerinţelor fizionomice, adică să permită aplicarea dinţilor şi în unele cazuri a gingiei artificiale pentru acoperirea completă a zonei edentate.

O mare atenţie se va acorda modelării suprafeţei ocluzale a dinţilor asigurîndu-se transmiterea forţelor pe mijlocul crestei alveolare în mod egal pe toţi stîlpii transmucoşi.

Este necesară supravegherea în timp a bolnavilor şi păstrarea unei riguroase igiene bucale.

Evoluţie - rezultate

Corect adoptat pe suportul osos implantul este încastrat pe un ţesut fibroconjunctiv cicatricial foarte strîns. Uneori în jurul stîlpilor transmucoşi pot apare unele zone inflamatorii asemănătoare cu inflamaţiile gingivale din parodontopatiile marginale. In aceste zone de minimă rezistenţă se produce ulterior proliferarea epiteliului gingival de-a lungul barelor implantului ceia ce în final duce la desgolirea acestuia.

Sînt posibile şi eliminări mai rapide ale implantului prin procese de supuraţie. Un inconvenient major al implantelor juxtaosoase este acela că după îndepărtarea lor rămîne un cîmp protetic nefavorabil cu rezorbţii masive şi bride cicatriciale periosoase care fac foarte dificilă o proteză clasică ulterioară.

II. Implante endoosoase

Metoda constă în introducerea într-o alveolă naturală sau creată chirurgical sau într-un lăcaş a unui dinte artificial sau a unui dispozitiv aloplastic pe care să se fixeze o coroană dentară.

Implantele endoosoase folosite frecvent sînt următoarele:

1. Implantele ac - autoforante - preconizate de SCIALOM şi KOMARI.
2. Implante în formă de şurub introduse în os după o forare prealabilă sau imediată postextracţională CHERCHEVE, HEINRICH, MURATORI.
3. Implante în formă de lamă, tip LINKOW, HEINRICH.
4. Implante osteointegrate tip BRANEMARK, MANCINI.
5. Implante disc tip SCORTECCI.

Scanned with OKEN Scanner

1. Implantele ac Scialom sînt confecţionate din sîrmă de tantal cu diametrul de 1,2 mm avînd o lungime variabilă de la 2,5 cm la 4,5 cm. Capătul care va fi introdus în os este ascuţit şi aplatizat şi va putea fi introdus direct prin rotaţia imprimată de o piesă în unghi, fiind deci autoforant. Extremitatea exterioară prezintă două aripioare ce se montează în portimplant, care la rîndul său se aplică la piesa în unghi.

Pentru buna reuşită a unui implant ac, este necesar să se respecte o serie de principii şi anume:

- implantele ac nu pot fi introduse decît în creste alveolare cicatrizate, zona respectivă trebuind să fie complet remineralizată. Deci între extracţie şi aplicarea implantului trebuie să treacă o perioadă de cel puţin 6 luni;

- implantul ac trebuie să fie mai lung decît rădăcina, fixîndu-se chiar în corticala opusă;

- numărul implantelor, care reconstituie un dinte, să fie de cel puţin 3 în aşa fel încît rezultanta forţelor verticale care se aplică pe viitorul bont să treacă întotdeauna în interiorul poligonului de susţinere (Fig.8.2.).

- divergenţa implantelor ac să fie cît mai accentuată pentru a mări poligonul de susţinere al dintelui respectiv;

- implantele trebuie bine solidarizate între ele şi în nici un caz unul dintre ele să fie supus unor forţe mai mari decît celelalte două.

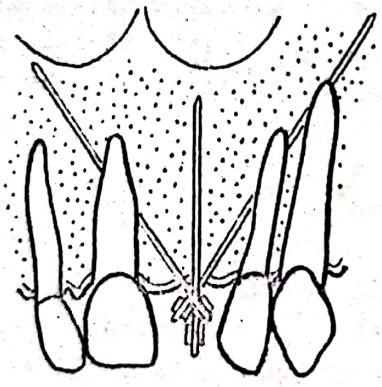


Fig.8.2. Implante ac.

Indicaţiile folosirii implantelor ac:

a. confecţionarea unui bont artificial pe care va fi aplicat apoi o coroană de înveliş;

b. stabilizarea protezei totale inferioare prin implantarea unui şir de 7-12 ace în regiunea frontală, între cele 2 găuri mentoniere (Fig.8.4);

c. transfixaţia dentară - constă în introducerea unei tije metalice, prin canalul radicular dincolo de apex în ţesutul osos periapical. Intervenţia are mai ales un scop profilactic, pentru prelungirea existenţei pe arcadă a unor dinţi, în special monoradiculari, dinţi care în alte condiţii ar trebui extraşi. Sînt confecţionate din crom cobalt, molibden, tantal, titan (Fig.8.3.).

Scanned with OKEN Scanner

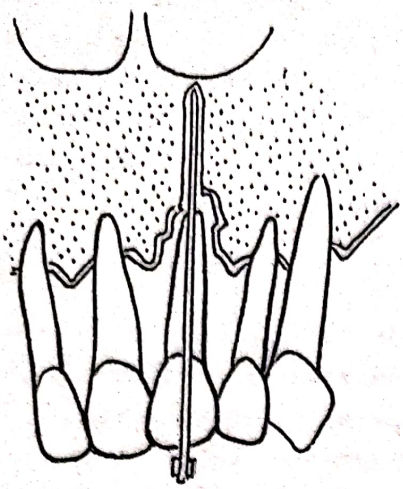


Fig.8.3. Transfixaţia dentară.

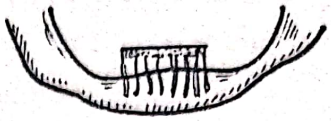


Fig.8.4. Implante ac solidarizate între ele pentru menţinerea unei proteze totale inferioare.

2. Implante şurub

In mod obişnuit porţiunea endoosoasă a implantului şurub are forma unui trunchi de con, pe suprafaţa căreia se găseşte filetul. Porţiunea extraosoasă a implantelor şurub poate face corp comun cu porţiunea din grosimea osului sau poate fi alcătuită ca parte separată şi fixată prin dispozitive speciale de porţiunea intraosoasă.(Fig.8.5.).

Fig.8.5. Implant şurub tip Heinrich.

S-au confecţionat numeroase tipuri de implant şurub care permit alegerea celui mai potrivit, în funcţie de lăţimea crestei alveolare. Un avantaj al acestor tipuri de implante, constă în faptul că pot fi aplicate imediat în alveola postextracţională. Dacă se introduc mai tîrziu este necesară forarea în os cu ajutorul unor freze speciale, la turaţie lentă, cu o răcire continuă cu ser fiziologic a lăcaşului implantului.

Ca inconvenient, este menţionat faptul că nu pot fi aplicate decît pe crestele alveolare care au o grosime şi o înălţime suficientă.

3. Implantele lamă

In principiu aceste implante prezintă două părţi distincte:

- o parte extraosoasă, care constituie stîlpul pe care se va sprijini viitoarea lucrare protetică. Acest stîlp are fie o formă de trunchi de con, fie o formă paralelipipedică;

- o porţiune endoosoasă, de forma unei lame cu numeroase spaţii goale. Aceste spaţii goale oferă locuri pentru proliferarea conjunctivo-osoasă, asigurînd astfel implantului o bună retenţie (Fig.8.6.).

Sînt indicate în special pentru realizarea unui stîlp distal în edentaţiile terminale. Se realizează întîi un lambou vestibular evidenţiind creasta alveolară, după care cu freze de dimensiuni potrivite se trasează un şanţ în os în care va fi apoi introdus implantul. Plaga se sutureazã. Protezarea se face

foarte simplu după aplicarea implantului.

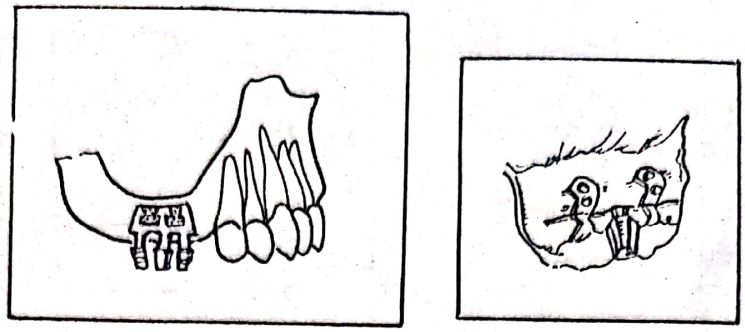


Fig.8.6. Implant lamă cu aripioare submucoase

4. Implante osteointegrate BRANEMARK

Sînt confecţionate din titan fiind compuse dintr-o porţiune endoosoasă în formă de şuruburi şi o structură endobucală. Aceste implante urmăresc realizarea integrării osoase a implantului înainte de a se trece la protezare.

Se forează un lăcaş în os pentru şurubul respectiv care după ce a fost introdus, se acoperă cu un lambou gingivo-mucos. Surubul introdus în os este protejat de traumatismele bucale timp de 3-4 luni pentru mandibulă şi 5-6 luni pentru maxilar utilizînd de obicei o proteză mobilă, După perioada de vindecare se localizează locul implantelor şurub, se incizează mucoasa la acest nivel şi se infiletează în şuruburile implantate bonturile artificiale. Sînt imaginate sisteme de localizare intraosoasă a şuruburilor ca şi de realizare a bonturilor paralele peste care se aplică apoi o lucrare protetică fixă (Fig.8.7, 8.8.).

Mancini a imaginat asemenea implante osteointegrate din ceramohidroxiapatită în care, de asemenea se înfiletează bonturile artificiale pe care ulterior se aplică fie coroana de înveliş izolate fie un element de agregare a unei lucrări protetice.

Implantele disc (Scortecci) - sînt confecţionate din titan avînd o porţiune endoosoasă şi alta extraosoasă.

Porţiunea endoosoasă are o parte orizontală în formă de disc perforat ce se introduce în os şi o tijă mediană care traversează osul de la disc pînă la nivelul gingiei fiind plasată exact pe mijlocul crestei alveolare.

Lăcaşul în os care are forma de "T" se realizează cu freze speciale care au aceleaşi dimensiuni ca discul şi tija mediană a implantului.

Tija mediană are prevăzut la capătul endobucal un filet în care se înşurubează bontul artificial ce constituie de fapt porţiunea superioară a acestui gen de implant (Fig.8.9.).

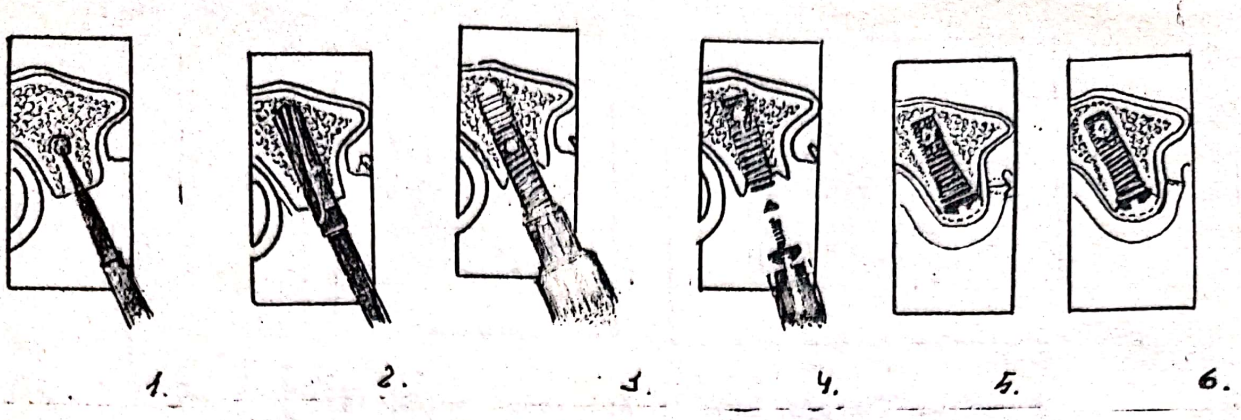


Fig.8.7. Implant osteointegrat - tehnica de aplicare la maxilarul superior: 1,2 - crearea lăcaşului osos; 3,4 - aplicarea implantului; 5. sutura; 6.aspectul după vindecare.

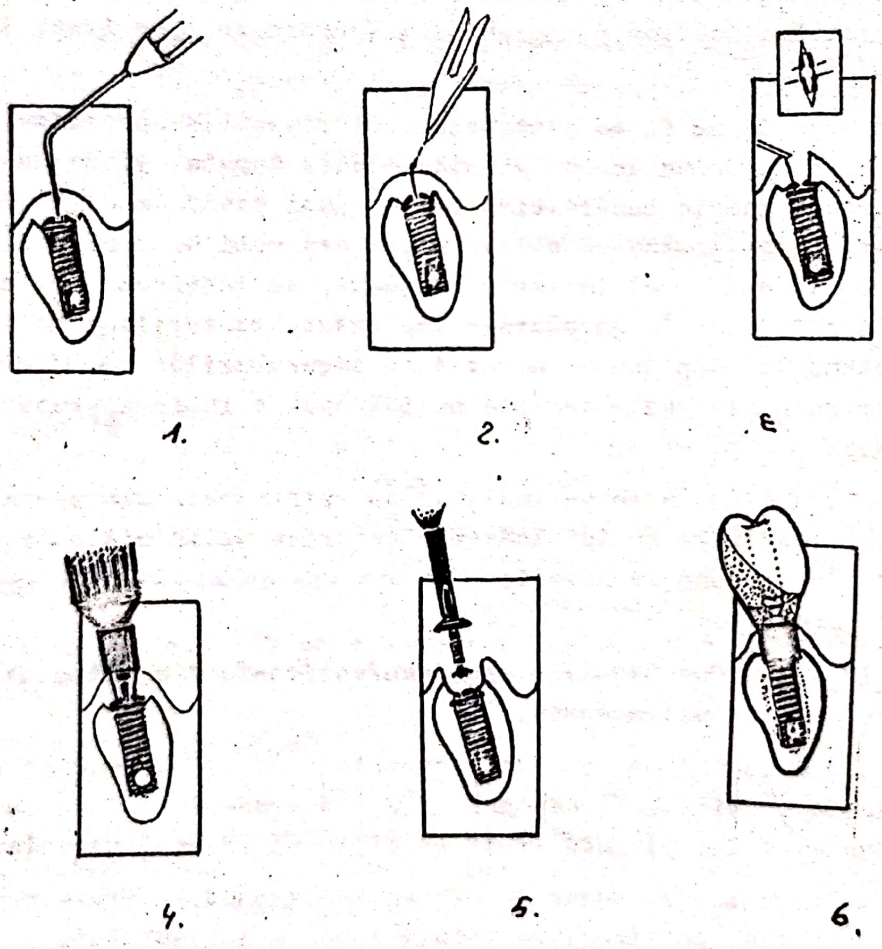


Fig.8.8. Implant osteointegrat - aplicarea coroanei: 1. Identificarea poziţiei şurubului; 2.3- Incizie; 4,5 - Indepărtarea şurubului de protecţie; 6. Aplicarea dispozitivului protetic.

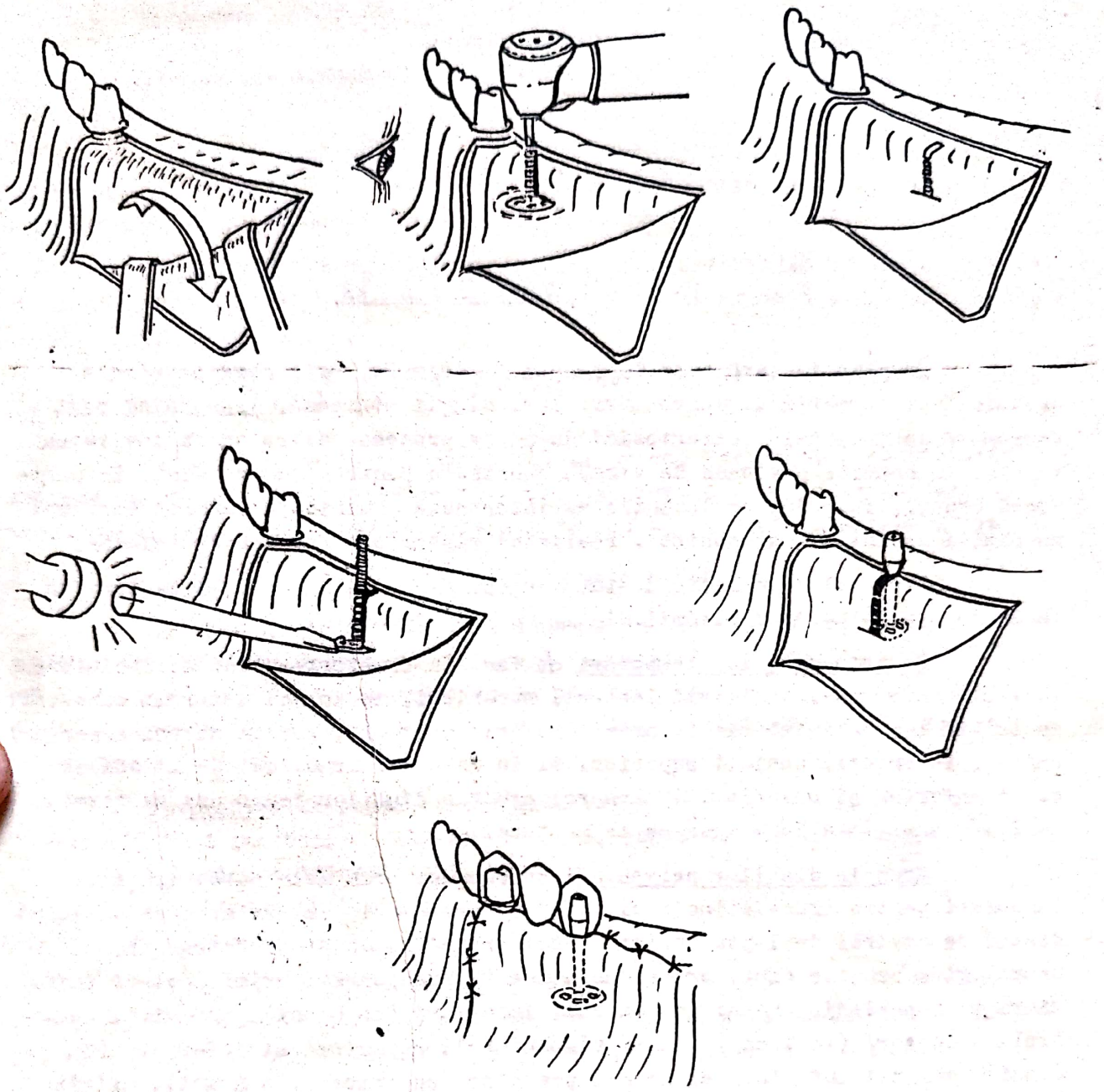


Fig.8.9. Aplicarea unui implant disc tip SCORTECCI: A. Decolarea mucoasei; B.C. - Crearea patului implantului; D. Inserţia imediată a implantului; E. Fixarea bontului artificial pe implant; F. Repoziţionarea şi sutura lamboului. Aplicarea provizorie a punţii.

C A P I T O L U L IX

PATOLOGIA ERUPTIEI DENTARE

Erupţia dentară este fenomenul fiziologic, prin care pe măsura desăvîrşirii formării şi dezvoltării lor, dinţii migrează, traversînd osul şi fibromucoasa gingivală, exteriorizîndu-se pe procesul alveolar în cavitatea bucală, la anumite perioade de vîrstă constante pentru fiecare dinte în parte. Odată erupţi, în mod normal, dinţii se integrează armonios pe arcadă împreună cu dinţii vecini şi antagonişti, realizînd rapoartele normale de ocluzie.

Procesul de erupţie dentară începe din luna a şasea şi se termină la 18-25 ani, cînd apar ultimii dinţi, molarii de minte.

Erupţia dinţilor temporari se face în următoarea ordine: incisivii centrali inferiori, incisivii centrali superiori, incisivii laterali superiori incisivii laterali inferiori, primii molari inferiori, primii molari superiori, caninii inferiori, caninii superiori şi în cele din urmă, cel de al doilea molar inferior şi superior. In general, erupţia dinţilor temporari se termină la 2 1/2 ani (în a 3o-a lună de la naştere).

Erupţia dinţilor permanenţi se produce prin înlocuirea dinţilor temporari pentru grupele incisivi, canini, premolari, iar molarii se dezvoltă distal de molarii de lapte, nefiind deci precedaţi de dinţi temporari. Cronologic, erupţia dinţilor permanenţi este următoarea: primii molari inferiori şi superiori, incisivii centrali inferiori (la 6 ani), incisivii centrali superiori (la 7 ani), incisivii laterali superiori şi inferiori (la 8 ani), caninii inferiori şi primii premolari superiori (la 9 ani), primii premolari inferiori şi caninii superiori (la lo ani), premolarii doi inferiori şi superiori (la ll ani) molarii doi inferiori şi superiori (la 12 ani). Intre 18-25 şi chiar pînă la 3o ani, apar molarii minte.

Abaterile de la normal în procesul de dezvoltare şi erupţie dentară îmbracă următoarele aspecte:

- Erupţia întîrziată, cînd dinţii apar pe arcadă la un interval mai mare de 1 an faţă de perioada normală de erupţie; se întîlneşte la subiecţii cu încetinirea generală a creşterii şi dezvoltării, fiind de regulă legată de tulburări endocrine.

- Erupţia precoce cînd dinţii apar înainte de termenul prevăzut, cu apariţia la naştere a celor doi incisivi centrali inferiori.

Scanned with OKEN Scanner

- Incluzia dentară cînd un dinte complet dezvoltat nu erupe pe arcadă la vîrsta normală a apariţiei lui, ci este reţinut împreună cu sacul folicular, intraosos sau submucos, la diferite nivele pe parcursul său normal de erupţie.

- Ectopia dentară cînd dinţi complet formaţi rămîn în grosimea osului la distanţă la locul normal de formare (incluzie în ectopie), sau cînd erup în afara poziţiei lor normale pe arcadă.

- Transpoziţia dentară este erupţia unui dinte în locul în care în mod normal trebuia să fie ocupat de alt dinte. Ex: erupţia premolarului I pe locul caninului.

- Heteropoziţia sau heterotopia este erupţia unui dinte la distanţă de arcada alveolară.

Atît la dentaţia temporară cît şi la cea permanentă, procesul de erupţie şi anomaliile dentare de poziţie pot provoca o serie de accidente şi complicaţii locale şi generale care uneori pot să îmbrace caractere grave.

I. ACCIDENTELE DE ERUPTIE ALE DINTILOR TEMPORARI

Erupţia dinţilor temporari decurge de obicei firesc, normal, fără nici un fel de acuză locală sau generală. Alteori însă, erupţia este însoţită de tulburări diverse, începînd de la simpla jenă locală şi o oarecare agitaţie psihomotorie ce se remite spontan şi pînă la tulburări mai grave de ordin local şi general.

Patogenia. In producerea accidentelor de erupţie ale dinţilor temporari, trei factori, de obicei reuniţi, joacă un rol important:

- factorul iritativ-reflex;
- factorul infecţios;
- terenul.

- Factorul iritativ-reflex. In procesul de erupţie, dintele poate produce iritaţii ale filetelor nervoase trigeminale gingivo-alveolare, iritaţii ce provoacă pe lîngă tulburări în troficitatea locală şi o serie de reflexe patologice la distanţă.

-Infecţia. Inflamaţia sacului pericoronar prin exacerbarea florei microbiene în zona permanent traumatizată, duce la o pericoronarită, ea însăşi declanşatoare de reflexe nociceptive ce agravează tulburările de erupţie şi alterează starea generală.

- Terenul. Stări patologice generale survenite în timpul vieţii intrauterine, sau după naştere, ce diminuă rezistenţa organismului, predispun copilul la tulburări generale care se răsfrîng în procesul de erupţie a dinţilor. Astfel pot fi incriminate în timpul vieţii intrauterine: sifilisul, disfuncţiile endocrine, intoxicaţiile mamei (alcool, tutun), eclampsia etc, iar după naştere, bolile infecţioase febrile ale primei copilării, dispepsiile, avitaminozele, rahitismul, tuberculoza.

Scanned with OKEN Scanner

Un rol deosebit îl joacă starea de hipervagotonie a copilului mic, care este exacerbată de diferitele afecţiuni intercurente.

Patologia erupţiei la copii se manifestă printr-o serie de accidente:

1. locale;
2. regionale;
3. generale.

1. Accidente locale

a. pericoronarita congestivă se caracterizează printr-o congestie vie a gingiei în dreptul dintelui care erupe. La acest nivel copilul prezintă prurit gingival intens şi dureri moderate pe care caută să le calmeze muşcîndu-şi degetele, sau introducînd în gură diferite obiecte. Salivaţia devine abundentă, copilul refuză sînul sau biberonul, este indispus şi extrem de iritabil;

b. pericoronarita supurată. Fenomenele congestive pot retroceda sau pot evolua ducînd la înrăutăţirea stării locale şi generale. Gingia este infiltrată, tumefiată, roşie-congestivă, dureroasă, îmbrăcînd tabloul clinic de colecţie subgingivală care, uneori se deschide spontan.

Starea generală se alterează. Copilul are insomnie, agitaţie, febră, ca în orice infecţie. El ţipă mai ales cînd i se deschide gura spre a fi alimentat.

c. gingivo-stomatita. Se produce prin asocierea tulburărilor trofice cu procesul infecţios. Poate îmbrăca diverse forme: eritematoasă, pultacee sau ulceroasă, localizată la gingie sau extinzîndu-se la mucoasa jugală, limbă, planşeu. Hipersalivaţia, halena fetidă, tumefacţia dureroasă a ganglionilor regionali completează tabloul clinic;

d. foliculita expulsivă (Capdepont) se caracterizează prin apariţia pe gingie la noul născut, a unor ulceraţii atone, uneori supurate, în care se exteriorizează dinţi temporari incomplet formaţi şi calcificaţi, aceştia se mobilizează şi se expulzează spontan.

Afecţiunea poate interesa unul sau mai mulţi folicuili dentari şi este datorită infectării endogene sau exogene a foliculului, urmată de expulzarea acestuia. Diagnosticul diferenţial trebuie făcut cu erupţia precoce, cînd dintele apare pe arcadă înainte de perioada normală, însă este complet format şi solid implantat, fără fenomenele inflamatorii ce însoţesc întotdeauna foliculita expulsivă.

2. Accidente regionale

Se caracterizează prin fenomene reflexe, trigemino-simpatico-parasimpatice, vasomotorii şi secretorii. Se traduc prin: hipersecreţie nazală, hipersecreţie salivară, lăcrimare, hiperemie conjunctivală, fotofobie, congestie unilaterală a feţei, de partea dintelui care erupe.

Scanned with OKEN Scanner

Tulburările reflexe, la care se adaugă infecţia, pot duce la apariţia unor complicaţii mai severe: coriză, conjunctivită, herpes, impetigo, eczema feţei etc.

3. Accidente generale

a. stări febrile. Acestea însoţesc de obicei pericoronarita şi gingivo-stomatita. Alteori, copilul prezintă ascensiuni febrile în timpul perioadei de erupţie, care sînt puse în legătură cu tulburările reflexe generate de erupţie. Ele se pot datora şi tulburărilor digestive, faringo-amigdalitelor etc, care însoţesc sau coincid cu erupţia dinţilor temporari. Se impune de aceea un examen atent în vederea diagnosticului cauzal al stării febrile.

b. tulburări nervoase. Se manifestă prin agitaţie, convulsii generalizate sau spasme faciale. Convulsiile generalizate sînt favorizate de un dezechilibru simpatico-parasimpatic ce poate duce la o inhibiţie a centrilor corticali şi exacerbarea reacţiilor automatice subcorticale şi medulare.

c. tulburări digestive: pierderea poftei de mîncare, vărsături, diaree.

Vărsăturile pot duce la acidoză, sînt datorate excitaţiei reflexe a parasimpaticului (vagotonie reflexă).

Diareea este datorată tot unei vagotonii reflexe care duce la mărirea secreţiilor glandelor digestive (gastrice, intestinale, pancreatice) şi mai ales la tulburări în motilitatea intestinală prin exagerarea peristaltismului.

Aceste fenomene duc la pierderea marcată în greutate a copilului, la tulburări în creştere şi uneori chiar la denutriţie.

d. tulburări respiratorii. Se manifestă printr-o tuse seacă iritativă, uneori cu caracter dispneic sau convulsiv. Aceşte tulburări preced cu 2-3 zile erupţia dintelui şi dispar după erupţie.

e. tulburări în creştere. Se caracterizează prin oprirea creşterii în greutate şi în înălţime a copilului. Curba de creştere rămîne în platou.

Diagnostic. Pentru stabilirea diagnosticului tulburărilor pe care le prezintă un copil în perioada erupţiei dinţilor este necesară colaborarea dintre stomatolog şi medicul pediatru. Se înlătură astfel posibilitatea confundării accidentului de erupţie cu o afecţiune de altă natură. Examenul bucal atent oferă elemente preţioase pentru diagnostic.

T r a t a m e n t u l. In perioada în care se semnalează primele fenomene de erupţie a dinţilor temporari, copilul trebuie să fie supravegheat cu atenţie. Se va pune accentul pe o igienă bucală riguroasă pe care o va face mama, curăţînd uşor cu tampoane îmbibate cu soluţii slab antiseptice mucoasa gingivală. Copilul va fi împiedicat prin aplicare de cotiere din carton, să-şi sugă degetele sau să introducă în gură diverse obiecte.

Accidentele de erupţie odată apărute, necesită un tratament ce poate fi medical (local şi general) sau chirurgical.

Scanned with OKEN Scanner

Tratamentul local. Se asigură igiena cavităţii bucale. Se vor face spălături bucale cu soluţii slab antiseptice şi alcaline (infuzie cu floraes chamomillae, apă bicarbonatată şi badijonări cu soluţii antiseptice calmante (glicerină sulfamidată lo%, diverse colutorii în care se înglobează antibioticul de elecţie conform antibiogramei, hidrocortizon şi vitamina A incorporate într-un vehicol ulcios etc). Se obţin rezultate bune badijonînd de 4-5 ori pe zi cavitatea bucală cu următorul colutorin:

Rp: Neomicină 1 g
Stamicin 1.ooo.ooo U
Metronidazol 5oo mg
Hidrocortizon 25 mg
Xilină 2% 4 ml
Vitamina A 3oo.ooo U
Bicarbonat de sodiu 1 g
Glicerină 3o ml

D.S. pentru badijonări bucale.

Tratamentul general

- Vitaminoterapie: C, A, D_2, B_{12}
- Sedative generale (sirop romergan infantil: 2-3 linguriţe pe zi; luminalete o,ol5 g: 1-3 tablete pe zi; aminofenazonă).

In cazuri de infecţii cu evoluţie acută, se vor asocia antibioticele.

Tratamentul chirurgical. In pericoronarita supurată se va face deschiderea şi drenajul colecţiei. Intervenţia trebuie să fie scurtă, rapidă, sub analgezie generală de preferinţă cu azeotrop sau locală, de contact (badijonări cu soluţie cocainä 1%, xilină 2%, gingicain etc); se practică o incizie pe bombarea tumefacţiei gingivale cu un bisturiu fin şi bine ascuţit. După evacuarea puroiului, fenomenele inflamatorii cedează rapid, dintele continuîndu-şi erupţia.

II. ACCIDENTELE DE ERUPTIE ALE DINTILOR PERMANENTI

Erupţia dinţilor permanenţi se face de obicei uşor şi fără tulburări la nivelul frontalilor şi premolarilor, pe măsură ce se produce căderea spontană a dinţilor temporari corespunzători, prin rizaliza progresivă pe care aceştia o suferă. De asemenea erupţia primilor 2 molari nu provoacă în general accidente. Cele mai frecvente accidente se produc în legătură cu erupţia molarilor de minte inferiori şi într-o măsură mai mică în legătură cu erupţia molarilor de minte superiori.

Accidentele de erupţie ale molarilor de minte inferiori. Se ştie că mugurii molarilor de minte inferiori se formează între 8 şi 11 ani, iar erupţia are loc între 18 şi 25 de ani, uneori chiar spre 3o ani.

După diferite statistici, erupţia acestor dinţi provoacă accidente şi complicaţii care pot îmbrăca uneori aspecte grave, într-o proporţie care poate merge pînă la 16%.

Frecvenţa atît de mare a complicaţiilor se poate explica prin rămînerea în incluzie a molarului de minte inferior datorită condiţiilor speciale de evoluţie embriologică a acestui dinte, prin rapoartele anatomice pe care el le are şi prin posibilităţile de infectare ale sacului său folicular.

Condiţiile care dau dificultăţile de erupţie şi rămînerea în incluzie. Molarul de minte se dezvoltă dintr-un mugure provenit din proliferarea lamei dentare - distal de molarul de 12 ani. Mugurele adamantin al celui de al treilea molar rămîne în poziţie oblică faţă de molarul de 12 ani, de care este legat printr-o porţiune a lamei dentare.

Mandibula creşte în lungime concomitent cu mineralizarea molarului de minte. Creşterea mandibulei se produce mai ales înapoi, spre gonion, exercitînd astfel o tracţiune asupra porţiunii încă necalcificată în acel moment a foliculului dentar al molarului de minte, adică asupra rădăcinii, care va fi deviată şi recurbată înapoi, recurbînd şi mai mult axul acestui dinte.

Prin vacuolizarea lamei dentare care leagă molarul de minte de cel de 12 ani, ia naştere "gubernaculum dentis", care este înconjurat de o teacă conjunctivă densă, "iter dentis".

In evoluţia sa normală, molarul de minte se va dezvolta în sensul gubernaculumului dentis, de-a lungul unei curbe cu concavitatea posterioră (curba de redresare a lui Capdepont), migrînd pînă cînd coroana sa ajunge în planul de ocluzie.

Dacă spaţiul în care se produce procesul de dezvoltare şi erupţie a molarului inferior de minte nu este suficient,apar accidente.

Schimbarea condiţiilor de viaţă şi de alimentaţie în timpul evoluţiei omului, a dus la o micşorare în lungime a mandibulei şi la închiderea unghiului mandibular. Spaţiul dintre ramul mandibulei şi molarul de 12 ani, s-a micşorat astfel foarte mult, arcada alveolară a devenit insuficientă pentru dezvoltarea celui de al 4-lea molar, care a dispărut în cursul evoluţiei filogenetice şi în prezent oferă condiţii neprielnice dezvoltării normale pentru cel de al 3-lea molar, care adesea nu mai apare pe arcadă, rămînînd în incluzie mai mult sau mai puţin profundă, deviat vestibular sau lingual.

O piedică apreciabilă în calea erupţiei molarului de minte, o constituie şi calitatea ţesuturilor pe care acesta este forţat să le străbată; el întîlneşte un os deja structurat, calcificat, deosebit de dens şi o gingie îngroşată, rezistentă, pe care le traverseaza cu greutate.

Rapoartele anatomice. Apariţia accidentelor precum şi diversele forme clinice sub care se prezintă complicaţiile sînt legate şi de rapoartele anatomice de vecinătate ale molarului de minte inferior:

- în sus şi înapoi, pilierii vălului amigdalian, regiunea amigdaliană şi spaţiul latero-faringian;
- în jos şi înăuntru, porţiunea posterioară a feţei interne a ramului orizontal mandibular (loja submaxilară);
- înapoi şi înăuntru spaţiul pterigo-mandibular al regiunii infratemporale;

Frecvenţa atît de mare a complicaţiilor se poate explica prin rămînerea în incluzie a molarului de minte inferior datorită condiţiilor speciale de evoluţie embriologică a acestui dinte, prin rapoartele anatomice pe care el le are şi prin posibilităţile de infectare ale sacului său folicular.

Condiţiile care dau dificultăţile de erupţie şi rămînerea în incluzie. Molarul de minte se dezvoltă dintr-un mugure provenit din proliferarea lamei dentare - distal de molarul de 12 ani. Mugurele adamantin al celui de al treilea molar rămîne în poziţie oblică faţă de molarul de 12 ani, de care este legat printr-o porţiune a lamei dentare.

Mandibula creşte în lungime concomitent cu mineralizarea molarului de minte. Creşterea mandibulei se produce mai ales înapoi, spre gonion, exercitînd astfel o tracţiune asupra porţiunii încă necalcificată în acel moment a foliculului dentar al molarului de minte, adică asupra rădăcinii, care va fi deviată şi recurbată înapoi, recurbînd şi mai mult axul acestui dinte.

Prin vacuolizarea lamei dentare care leagă molarul de minte de cel de 12 ani, ia naştere "gubernaculum dentis", care este înconjurat de o teacă conjunctivă densă, "iter dentis".

In evoluţia sa normală, molarul de minte se va dezvolta în sensul gubernaculumului dentis, de-a lungul unei curbe cu concavitatea posterioră (curba de redresare a lui Capdepont), migrînd pînă cînd coroana sa ajunge în planul de ocluzie.

Dacă spaţiul în care se produce procesul de dezvoltare şi erupţie a molarului inferior de minte nu este suficient, apar accidente.

Schimbarea condiţiilor de viaţă şi de alimentaţie în timpul evoluţiei omului, a dus la o micşorare în lungime a mandibulei şi la închiderea unghiului mandibular. Spaţiul dintre ramul mandibulei şi molarul de 12 ani, s-a micşorat astfel foarte mult, arcada alveolară a devenit insuficientă pentru dezvoltarea celui de al 4-lea molar, care a dispărut în cursul evoluţiei filogenetice şi în prezent oferă condiţii neprielnice dezvoltării normale pentru cel de al 3-lea molar, care adesea nu mai apare pe arcadă, rămînînd în incluzie mai mult sau mai puţin profundă, deviat vestibular sau lingual.

O piedică apreciabilă în calea erupţiei molarului de minte, o constituie şi calitatea ţesuturilor pe care acesta este forţat să le străbată; el întîlneşte un os deja structurat, calcificat, deosebit de dens şi o gingie îngroşată, rezistentă, pe care le traversează cu greutate.

Rapoartele anatomice. Apariţia accidentelor precum şi diversele forme clinice sub care se prezintă complicaţiile sînt legate şi de rapoartele anatomice de vecinătate ale molarului de minte inferior:

- în sus şi înapoi, pilierii vălului amigdalian, regiunea amigdaliană şi spaţiul latero-faringian;
- în jos şi înăuntru, porţiunea posterioară a feţei interne a ramului orizontal mandibular (loja submaxilară);
- înapoi şi înăuntru spaţiul pterigo-mandibular al regiunii infratemporale;

-în afară şi înapoi, regiunea maseterină;

- în afară şi înainte, coroana vine în raport cu mucoasa gingivală şi fundul de sac vestibular format prin inserţia bucinatorului pe rebordul alveolar, favorizînd difuzarea infecţiei spre obraz;

- înainte, cu molarul de 12 ani;

- în jos cu canalul mandibular; uneori pachetul vasculonervos alveolar inferior insinuîndu-se între rădăcinile molarului de minte inferior.

P a t o g e n i a. Factorii care joacă rol important în apariţia accidentelor şi complicaţiilor produse de erupţia molarilor de minte inferiori pot fi grupaţi în:

- factori favorizanţi;
- factori determinanţi.

Factorii favorizanţi sînt în legătură cu dezvoltarea anormală a molarului de minte şi anume:

- incluzia la nivelul locului normal de erupţie;

- incluzia ectopică, la distanţă, în grosimea ramurii ascendente, în unghiul mandibulei, în apofiza coronoidă, în condil etc;

- erupţia în poziţie anormală: deviere linguală, vestibulară, înclinaţii în ax (mezial, distal etc);

- capuşonul de mucoasă, elementul principal în apariţia şi dezvoltarea complicaţiilor septice. Căpăcelul de mucoasă care acoperă faţa ocluzală a molarului de minte, închizînd parţial sacul pericoronar, fiind permanent traumatizat de actul masticator şi favorizînd retenţiile, creiază condiţii optime de dezvoltare pentru germenii patogeni. Acest capuşon de mucoasă poate fi subţire, orizontal, acoperind suprafaţa ocluzală a molarului de minte, "ca o faţă de masă", sau poate fi gros, masiv, în prelungirea pilierului anterior al amigdalei căzînd "ca o cortină" groasă peste dinte. Indeosebi această a doua situaţie favorizează complicaţiile;

- raport foarte apropiat cu molarul de 12 ani, care poate prezenta leziuni inflamatorii apicale sau ale parodonţiului marginal.

Factorii determinanţi. Infecţia este factorul determinant în declanşarea accidentelor şi complicaţiilor. Există mai multe posibilităţi de infectare a sacului folicular:

- infecţia endogenă, generală, pe cale vasculosanghină. Microbii se pot localiza pe germenul dentar inclus care prezintă o zonă congestivă (loc de rezistenţă minimă);

- infectarea directă a sacului folicular, prin deschiderea sa în mediul bucal, de la o parodontită apicală prin carie a molarului de 12 ani, de la o pungă parodontală marginală, sau prin alveola rămasă deschisă şi infectată după extracţia molarului de 12 ani.

Studiul clinic. Tulburările în erupţia molarilor de minte inferiori pot duce la apariţia unor manifestări clinice extrem de variate şi anume:

1. Complicaţiile septice.
2. Tulburări nervoase.

3. Tulburări mecanice.
4. Tulburări trofice.
5. Complicaţii tumorale.

1. COMPLICATII SEPTICE-INFECTIOASE. Prima şi cea mai importantă este infecţia sacului pericoronar-pericoronarita, care constituie punctul de plecare al altor complicaţii septice, în părţile moi perimaxilare, în os, în ganglioni şi la distanţă.

Vom descrie în primul rînd tabloul clinic al pericoronaritei şi apoi vom arăta aspectele celorlalte complicaţii asupra cărora se va reveni mai pe larg în capitolele următoare (vezi: "supuraţiile perimaxilare", "osteomielita" etc).

Pericoronarita poate îmbrăca două forme clinice: pericoronarita congestivă şi pericoronarita supurată.

Pericoronarita congestivă

Bolnavul acuză: dureri în regiunea retromolară, jenă în deschiderea gurii, jenă în deglutiţie.

O b i e c t i v se observă că mucoasa situată distal de molarul de 12 ani, este roşietică, congestivă, adesea tumefiată, prezentînd amprenta feţei ocluzale a dintelui antagonist.

Cu sonda se poate simţi coroana molarului de minte acoperită de capuşonul de mucoasă. De sub capuşon, la presiune apare o secreţie serosanguinolentă.

E v o l u ţ i e: uneori totul intră în normal după cîteva zile, fie spontan, fie printr-un uşor tratament antiseptic local; adesea recidivează sub aceeaşi formă sau evoluează spre supuraţie, dînd naştere pericoronaritei supurate.

Pericoronarita supurată

- durere vie locală (retromolară) cu iradiaţii în ureche, în regiunea temporală, de-a lungul mandibulei;
- trismus accentuat: bolnavul nu poate depărta arcadele dentare, uneori nici cîţiva mm; orice încercare de deschidere a cavităţii bucale îi provoacă dureri mari. Este un trismus antalgic şi se datoreşte inflamaţiei locale, declanşat prin iritaţia neuroreflexă a muşchilor închizători ai gurii (maseter, pterigoidian intern);
- disfagie, jenă accentuată în deglutiţie, prin inflamaţia care cuprinde stîlpii vălului palatin şi regiunea amigdaliană.

Semne obiective:

Exobucal, la inspecţie se poate observa o uşoară tumefiere şi congestie a tegumentelor în regiunea subangulo-mandibulară şi periangulară. La palpare se poate percepe o îngroşare periostală la nivelul unghiului mandibular şi împăstarea părţilor moi. Se constată adenopatie regională cu ganglionii subangulo-mandibulari măriţi de volum, dureroşi, uneori cu fenomene de periadenită.

Examenul endobucal se face cu greutate din cauza trismusului. Se găseşte capuşonul mucos format din gingia tumefiată, congestivă, dureros la presiune; de sub el se scurge puroi. Cu sonda se poate simţi coroana molarului de minte.

Zona congestivă se întinde şi în vestibul şi pe stîlpul anterior ai vălului.

Tulburări generale: bolnavii pot prezenta o stare generală alterată, cu febră 38-39,5 grade, puls accelerat, agitaţie, insomnie.

E v o l u ţ i e. Chiar în faza supurată, pericoronarita poate ceda prin evacuarea spontană a colecţiei de sub capuşon şi stingerea procesului supurativ: capuşonul mucos se retrage progresiv, iar dintele îşi continuă erupţia. Această evoluţie este posibilă cînd dintele este în incluzie submucoasă, cu capuşonul de mucoasă acoperitoare subţire, are spaţiu suficient de erupţie şi axul vertical.

De obicei, însă infecţia difuzează şi astfel apar complicaţiile:

1. Complicaţii în părţile moi. Infecţia ţesuturilor moi din vecinătate se manifestă prin supuraţii localizate (abcese), sau supuraţii difuze (flegmoane). Procesul septic poate difuza în ţesuturile perimandibulare, precum şi în lojile superficiale şi profunde.

- O complicaţie frecventă întîlnită este abcesul bucconatomaxilar sau abcesul migrator.

Infecţia difuzează de-a lungul feţei externe a corpului mandibulei între muşchiul bucconator şi os şi se formează o colecţie purulentă la distanţă, în grosimea obrazului, exterierizîndu-se pe piele sau la mucoasă în dreptul premolarilor. La presiune pe zona tumefiată de la nivelul premolarilor se scurge puroi de sub capuşonul ce acoperă molărul de minte. De asemenea la palpare se percepe un cordon fibros între tumefacţie din dreptul premolarilor şi molarul de minte. (Fig.nr.9.1.).

- Abcesul lojii sublinguale, se produce prin difuzarea infecţiei de la nivelul sacului pericoronar pe deasupra milohioidianului pînă în loja sublinguală.

- Supuraţiile latero-faringiene se produc prin difuzarea infecţiei înăuntru şi în sus spre pilierii velari.

- Supuraţiile fosei zigomatice (spaţiul pterigo-mandibular) se produc prin difuzarea procesului supurativ de-a lungul feţei interne a ramurii verticale a mandibulei.

- Supuraţiile lojei maseterine: infecţia poate difuza între muşchi şi os sau înafara muşchiului.

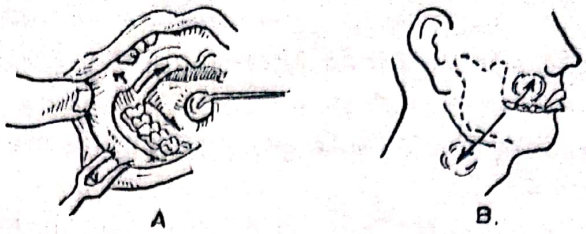


Fig.9.1. Posibilităţile de difuzare a procesului septic în pericoronarita supurată: A.In loja maseterină, loja sublinguală, spaţiul latero-faringian şi buccinato-maxilar; B.In loja submandibulară şi obraz.

2. Complicaţiile septice osoase. Procesul septic cu punct de plecare de la molarul de minte poate invada direct osul, producînd osteite şi osteomielite mandibulare cu tabloul clinic obişnuit; uneori se produc osteite hipertrofice, cu îngroşarea osului printr-o reacţie proliferativă, sub influenţa infecţiei cronice; această formă hiperostozantă se pretează la confuzie cu tumorile mandibulei.

3. Complicaţii ganglionare. Limfonodulii regionali subangulomandibulari, submaxilari, genieni, pretragieni se prind precoce. Se produc:

- adenite acute supurate;
- adenite subacute sau cronice, ce pot fi confundate cu adenopatiile bacilare sau tumorale.

4. Complicaţii septice la distanţă.

a. tromboflebita sinusului cavernos poate surveni în cursul supuraţiilor perimaxilare cu punct de plecare de la molarul de minte, mai cu seamă în supuraţiile fosei infratemporale, infecţia propagîndu-se pe calea plexului venos pterigoidian.

b. complicaţii pulmonare

- pneumonia;
- gangrena pulmonară - se produce prin aspiraţia directă în pulmon a germenilor şi îndeosebi a florei anaerobe fuzo-spirilare;

c. complicaţii generale

Infecţia poate invada organismul dînd;

- septicemii, septicopiemii;

Poate provoca tulburări la distanţă prin manifestări la nivelul altor organe, în cadrul bolii de focar.

2. TULBURARI NERVOASE

a. Tulburări senzitive: nevralgii dentare, sinalgii dentocutanate, otalgii, algii cervico-faciale etc;

b. Tulburări motorii: contracturi musculare ale muşchilor feţei, trismus prin contractura reflexă a muşchilor ridicători ai mandibulei, paralizii faciale, paraliza muşchilor oculomotori etc.

3. TULBURARI MECANICE. Incluzia molarului de minte inferior sau erupţia lui incompletă sau ectopică poate da o serie de tulburări şi accidente la nivelul celorlalţi dinţi, mucoasei obrazului şi limbii:

- carii ale molarului de 12 ani, prin presiunea exercitată de coroana molarului de minte pe faţa distală a acestui dinte;
- rezorbţii radiculare la molarul doi (prin acelaşi mecanism) cu mortificare retrogradă;
- carii ale premolarilor, mai rar, din cauza micşorării spaţiului dintre dinţi, prin înghesuirea datorită împingerii pe care o realizează molarul în timpul erupţiei;
- deplasări ale dinţilor, încălecări ale incisivilor cu rotaţia linguală sau vestibulară; fenomene de artrită ale incisivilor cu dureri în masticaţie; tulburări de ocluzie;
- leziuni ale mucoasei bucale:

a. ulceraţia obrazului, care poate merge pînă la perforaţia sa, prin erupţia vestibulară a molarului de minte;

b. ulceraţii ale limbii, putînd duce la confuzii cu neoplasmele ulcerate.

4. TULBURARI TROFICE

Gingivo-stomatita odontiazică. Leziunile încep pe capuşonul de mucoasă şi se extind apoi la mucoasa obrazului, pe stîlpii vălului palatin, pe văl, pe amigdală etc; ele pot merge de la o simplă congestie (gingivo-stomatită eritematoasă), la o stomatită ulceroasă, ulcero-membranoasă şi chiar ulcero-necrotică. Caracteristic este că leziunile rămîn strict unilaterale.

Stomatita odontiazică este datorită unei tulburări trofice a mucoasei, consecutivă tulburărilor reflexe, al cărui punct de plecare îl constituie iritaţia produsă prin erupţia dificilă a molarului de minte la care se adaugă apoi factorul septic.

5. COMPLICATII TUMORALE. In legătură cu molarii de minte inferieri şi anume, fie cu dezvoltarea mugurilor fie cu rămînerea lor în inoluzie, poate fi pusă producerea unor formaţiuni tumorale, ca de exemplu:

a. chisturi de maxilar (chist folicular, chist marginal);
b. adamantinom.

D i a g n o s t i c. De obicei bolnavii se prezintă pentru una din complicaţiile sau tulburările descrise mai sus. Pe calea diagnosticului ne pune, pe de o parte trismusul care este foarte accentuat în accidentele provocate de molarul de minte şi pe de altă parte semnele locale ale pericoronaritei. Pentru precizarea diagnosticului, examenul radiologic aduce elemente deosebit de utile.

Radiografia cu film endobucal nu dă totdeauna o imagine completă a molarului inclus, mai ales că uneori este greu de făcut sau chiar imposibil din cauza trismusului. De aceea sînt adesea necesare radiografii exobucale în incidenţele indicate pentru unghiul mandibular (mandibulă defilată sau ortopantomografie).

Radiografia dă atît indicaţiile de diagnostic, arătînd prezenţa molarului de minte inclus, care nu poate fi descoperit clinic, precum şi indicaţii terapeutice preţioase precizînd:

- poziţia dintelui în grosimea osului, adîncimea incluziei, direcţia axului său (oblic, orizontal, vertical);
- raportul dintre molarul de minte şi molarul de 12 ani şi starea molarului de 12 ani;
- rapoartele cu ramul mandibular şi cu canalul mandibular;
- forma coroanei şi rădăcinilor;
- starea osului în jurul dintelui.

Cunoaşterea acestor date este indispensabilă de regulă pentru conducerea tehnicii extracţiei chirurgicale a molarului de minte inclus.

T r a t a m e n t u l. Atitudinea terapeutică va di adaptată în raport cu:

a. forma clinică a complicaţiilor;
b. poziţia molarului.

Următoarele 4 situaţii sînt în general întîlnite:

1. Molar de minte inclus, fără tulburări;
2. Molar inclus cu tulburări inflamatorii uşoare;
3. Molar inclus cu complicaţii inflamatorii severe;
4. Complicaţii diverse neinflamatorii.

1. Molar de minte inclus, fără tulburări. Molarul de minte inferior poate rămîne inclus fără să producă nici o tulburare, el fiind descoperit numai întîmplător, la un examen clinic sau radiografic al regiunii pentru o altă cauză.

In aceste cazuri atitudinea variază: unii autori recomandă extracţia profilactică a molarului de minte, iar alţii, expectativa şi ţinerea bolnavului sub observaţie.

Dan Theodorescu recomandă extracţia pentru a preveni complicaţiile grave la care sînt expuşi oricînd pacienţii, cunoscînd faptul că extracţia la rece se face în condiţiile cele mai bune.

2. Molar de minte inclus cu tulburări inflamatorii uşoare. Prin accidente uşoare se înţeleg: pericoronarita congestivă şi pericoronarita supurată, la care se poate asocia şi o gingivo-stomatită uşoară, o anginâ sau adenopatia regională nesupurată.

In aceste cazuri, atitudinea variază după poziţia molarului:

a. molar de minte în poziţie normală, cu posibilitatea de a-şi putea completa erupţia şi anume: nu este în incluzie osoasă ci numai acoperit de un capuşon mucos subţire, iar pe radiografie se vede în poziţie verticală: se aplică un tratament antiseptic local (spălături largi antiseptice, badijonări etc) şi se aşteaptă desăvîrşirea erupţiei sau se face decapuşonarea;

b. molar în situaţie anormală prin imposibilitatea de a-şi termina erupţia spontană şi anume: incluzie osoasă profundă, în ectopie, molar în poziţie vicioasă, înclinat oblic sau orizontal: se aplică tratament antiinfecţios local şi general şi apoi, după reducerea fenomenelor inflamatorii, se practică odontectomia.

3. Molar inclus cu complicaţii inflamatorii severe. In cazul cînd bolnavii prezintă complicaţii supurative perimandibulare sau la distanţă (abcese, flegmoane, osteomielită) este indicat să se procedeze astfel:

- se face întîi deschiderea colecţiilor şi drenajul supuraţiilor;
- se aplică apoi un tratament local şi general antiinfecţios pînă la dispariţia fenomenelor acute: spălături şi badijonări antiseptice locale, antibioterapie etc).
- în al doilea timp se face extracţia molarului - suprimarea cauzei şi anume, după ce fenomenele generale şi locale, în special trismusul, au cedat. Extracţia nu trebuie temporizată prea multă vreme; dacă trismusul persistă se fac infiltraţii cu novocaină 1% în masa muşchilor închizători prin incizura sigmoidă, pentru a obţine deschiderea gurii pe amplitudinea necesară manoperelor operatorii endobucale.

4. Complicaţii diverse neinflamatorii. In această categorie intră complicaţiile tumorale (chisturi foliculare, chisturi marginale, adamantinoame), tulburări nervoase (nevralgii, sinalgii), tulburări mecanice, ulceraţii mecanice ale obrazului sau ale limbii, înmuguriri hipertrofice ale mucoasei etc. In general, în aceste situaţii se recomandă extracţia molarilor de minte.

In faţa unui molar de minte inferior inclus, în funcţie de tulburările şi complicaţiile care apar în timpul perioadei sale de erupţie, putem adopta fie o atitudine conservatoare, fie una radicală.

Tratamentul conservator urmăreşte înlăturarea tulburărilor şi crearea condiţiilor favorabile unei erupţii normale. Acest tratament poate fi aplicat numai cînd în urma examenului clinic şi radiologic apreciem că, folosind metode medicale sau chirurgicale putem asigura erupţia molarului respectiv şi integrarea lui pe arcadă.

A. Tratamentul conservator medical va urmări combaterea infecţiei locale şi generale şi mărirea rezistenţei organismului.

In pericoronarita acută congestivă se vor face spălături bucale largi din 2 în 2 ore, cu soluţii de hipermanganat de potasiu 1/10.000, apă călduţă bicarbonatată; badijonări ale capuşonului de mucoasă cu clorură de zinc 10-20%, nitrat de argint 10%. Se pot face de asemeni, aplicaţii de apă oxigenată pulverizată cu atomizorul sau duşuri cu oxigen care au acţiune calmantă, antiseptică, dezodorizantă şi stimulantă asupra circulaţiei sanguine locale, agenţi fizici (diatermie, ultrascurte).

Se asociază un tratament general cu: antibiotice, vaccinuri nespecifice (polidin), calciu, vitamine (A,C, complex B).

B. Tratamentul conservator chirurgical

a. Drenajul sacului pericoronar se practică de urgenţă în cazul pericoronaritei supurate, prin următoarele procedee:

- evacuarea colecţiei de sub capuşonul de mucoasă, urmată de spălături cu antiseptice, fără presiune, ale sacului pericoronar (folosind un ac bont) şi drenajul acestuia cu o meşă iodoformată subţire);

- dacă colecţia locală este mai mare, drenajul cu pensa ineficient, este indicată incizia. (Fig.9.2).

Sub anestezie de contact sau prin infiltraţie se face o incizie largă antero-posterioară (cu bisturiul sau cu o foarfecă fină) interesînd toată grosimea capuşonului care bombează în spaţiul retromolar. Se spală apoi plaga cu un jet slab de soluţie antiseptică şi se asigură drenajul cu o meşă iodoformată.

Dacă după încetarea supuraţiei dezincluzia nu se produce, ce va proceda fie la decapuşonarea secundară, fie la odontectomie.

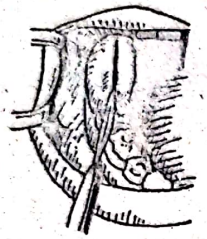


Fig.9.2. Incizia capuşonului de mucoasă în pericoronarita supurată pentru drenajul sacului pericoronar.

b. Decapuşonarea este metoda chirurgicală prin care se face excizia căpăcelului de fibromucoasă ce acoperă coroana molarului pentru a crea posibilitatea continuării şi desăvîrşirii erupţiei. Decapuşonarea este indicată cînd:

- molarul este în poziţie verticală cu rădăcinile drepte sau foarte uşor recurbate;

- incluzia este numai submucoasă, fără să existe nici o porţiune din suprafaţa ocluzală a dintelui acoperită de os;

- căpăcelul de fibromucoasă este subţire şi întins peste suprafaţa ocluzală a dintelui, ca o "faţă de masă".

O condiţie esenţială este existenţa unui spaţiu suficient pentru erupţie între coroana molarului de 12 ani şi ramul ascendent al mandibulei.

Nu se face decapuşonarea dacă mucoasa acoperitoare este groasă căzînd direct, ca o perdea, peste molar, ca o prelungire a pilierului amigdalian anterior (ca o cortină) şi nici în cazurile de incluzii osoase, chiar parţiale (Fig.nr.9.3.).

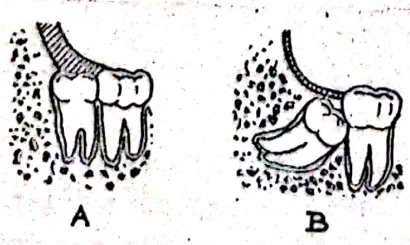


Fig.9.3. Situaţii în care nu este indicată decapuşonarea: A.Capuşon gros, porţiunea distală a coroanei molarului de minte acoperită de os; B. Molar în incluzie osoasă oblică.

Tehnica decapuşonării

A n e s t e z i a: badijonaj cu soluţie de cocaină 10% şi apoi infiltraţia mucoasei cu novocaină 1% plus adrenalină, sau xilină, sau anestezie tronculară periferică la gaura mandibulară.

Excizia fibromucoasei acoperitoare: se face o incizie curbă de jur împrejurul capuşonului mucos, înconjurînd faţa ocluzală a molarului subiacent (Fig.9.4).

Incizia porneşte de la marginea distolinguală a molarului 2, se continuă înapoi pînă la limita porţiunii orizontale a spaţiului retromolar şi se întoarce de-a lungul versantului vestibular pînă la marginea distovestibulară a molarului 2.

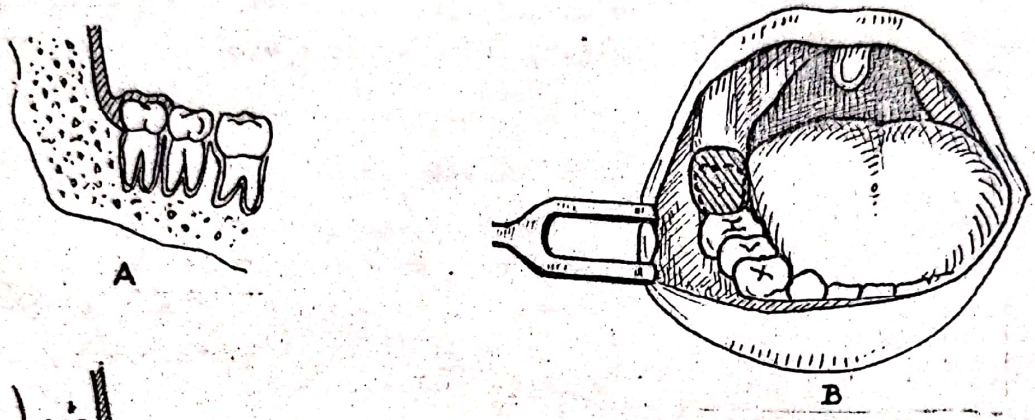


Fig.9.4. Decapuşonarea. A. Molar de minte inferior vertical, cu rădăcinile drepte, cu capuşonul de mucoasă ca o "faţă de masă"; B. Incizia retromolară, cu zona de mucoasă care va fi excizată (haşurat); C. După excizia căpăcelului de mucoasă, coroana este degajată în totalitate.

Incizia se face cu bisturiul obişnuit sau cu bisturiul electric în cazul în care capuşonul de mucoasă care acoperă molarul de minte, inclus, are tendinţa de proliferare.

Mucoasa circumscrisă de incizie este apoi prinsă cu o pensă şi extirpată.

Se controlează dacă coroana este complet degajată, excizîndu-se resturile din sacul pericoronar, rămase în jurul coletului dintelui.

Se tamponează plaga cu o meşă iodoformată, avîndu-se grijă ca marginile plăgii să fie cît mai mult împinse spre coletul dintelui, spre a împiedica burjonarea peste coroana molarului.

Tratamentul postoperator. Intrucît bolnavul prezintă dureri, disfagie şi trismus se prescriu analgetice şi spălături bucale largi cu soluţii slab alcaline sau uşor antiseptice. Meşa iodoformată se schimbă la fiecare două zile, pînă la completa cicatrizare.

Se pot face cauterizări cu soluţie saturată de acid tricloracetic sau cu clorură de zinc 30% dacă mucoasa burjonează şi are tendinţa să acopere

din nou dintele.

Postoperator se recomandă o igienă bucală îngrijită.

Rezultate: coroana molarului fiind bine degajată, dintele îşi continuă erupţia şi ajunge în planul de ocluzie.

C. Tratamentul chirurgical radical

Odontectomia se impune în toate cazurile în care nu există posibilitatea erupţiei normale, chiar prin decapuşonare, şi anume:

- în incluzii osoase parţiale şi totale;
- în cazurile în care dintele este în poziţie oblică sau orizontală, coroana proptindu-se în coroana molarului 2;
- cînd nu există spaţiu pentru erupţie şi cînd molarul inclus a provocat complicaţii importante locoregionale.

A n e s t e z i a. Este necesară o anestezie de durată care să permită desfăşurarea intervenţiei, adesea deosebit de laborioasă.

Anestezia loco-regională îşi găseşte cea mai curentă întrebuinţare şi anume în cazurile în care fenomenele inflamatorii nu sînt prea intense.

Cînd bolnavul prezintă trismus, se asociază infiltraţia muşchiului maseter şi pterigoidian intern prin scobitura sigmoidă (incizura mandibulară).

In cazul cînd se impune anestezia generală, bolnavul va fi internat în spital, practicîndu-se intubaţia endotraheală cu tamponamentul fundului gîtului, gura fiind menţinută deschisă cu un depărtător autostatic.

Inainte de intervenţie trebuie create condiţii chirurgicale adecvate pentru o intervenţie aseptică şi de durată, care necesită o trepanaţie osoasă într-o regiune unde osul este deosebit de dur şi rezistent.

T e h n i c a - variază după poziţia şi înclinaţia dintelui şi după raportul său cu molarul 2 şi cu canalul mandibular (Fig.9.5.).

Totdeauna dintele va fi descoperit pe cale vestibulară şi retromolar, evitîndu-se lezarea tablei osoase orale pentru a nu traumatiza vasele şi nervul lingual şi a evita pericolul de difuzare a infecţiei în planşeul bucal.

I n c i z i a . S-au recomandat mai multe incizii: rectilinie, în baionetă, sau incizie triunghiulară cu excizia unui lambou triunghiular de mucoasă în trigonul retromolar.

Incizia care dă cea mai largă descoperire a regiunii este incizia "în baionetă"; se începe de la nivelul spaţiului retromolar superior în jos şi înainte, de-a lungul marginii anterioare a ramului ascendent mandibular, pînă la molarul de 12 ani. Incizia înconjoară apoi faţa distală a molarului de 12 ani şi se prelungeşte vertical în vestibul în dreptul rădăcinii distale a molarului 2. Se incizează mucoasa şi periostul.

Decolarea lamboului muco-periostic. Se decolează cu decolatorul lamboul vestibular care este menţinut cu un depărtător Langenbeck, descoperindu-se astfel larg osul în regiunea retromolară şi pe versantul său vestibular.

Este bine ca manoperele de decolare şi de tracţiune ale lamboului cu depărtătorul să se facă fără bruscheţe, pentru a evita traumatizarea părţilor moi şi a periostului şi pentru ca în momentul reaşezării lamboului, plaga să poată fi bine acoperită.

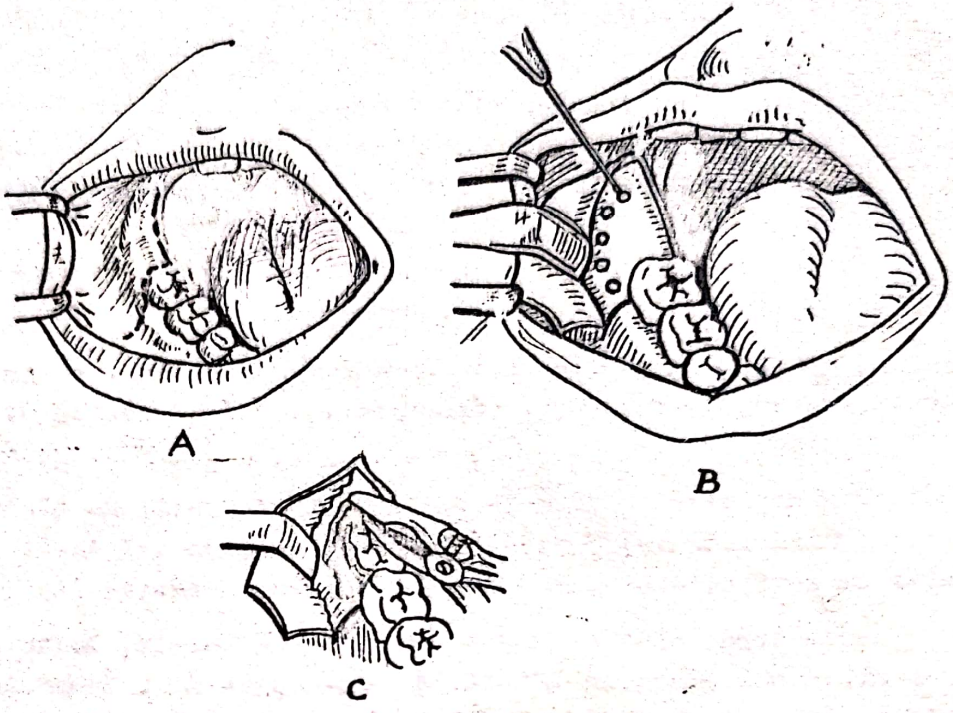


Fig.9.5. Tehnica descoperirii molarului de minte inferior în incluzie osoasă: A.Incizia "în baionetă" ; B. Forarea orificiilor în corticala osoasă, cu freza; C. Lărgirea ferestrei osoase cu pensa ciupitoare.

Dacă molarul este în incluzie mucoasă, coroana apare degajată încît se poate face extracţia cu cleştele sau elevatorul.

Dacă dintele este în incluzie osoasă, tehnica este continuată prin rezecţia osoasă care se poate face fie cu freze montate la turul electric, fie cu dalta şi cu ciocanul, fie cu pensa ciupitoare de os.

Rezecţia cu freza are avantajul că este rapidă şi bine suportată, de bolnav, dar încălzeşte osul putînd să meargă pînă la necroză, favorizînd apariţia infecţiei.

Pentru a înlătura aceste inconveniente se va face un frezaj lent, cu turaţie mică, spălînd plaga continu, cu ser fiziologic. Se rezecă tot stratul osos acoperitor, descoperindu-se dintele pe o porţiune suficientă pentru a putea fi prins cu cleştele sau a permite luxarea cu elevatorul.

Rezecţia cu dalta şi ciocanul este o metodă bună, dar greu de suportat de bolnav din cauza zguduiturilor pe care le produce.

Un procedeu care dă rezultate bune este rezecţia combinată a tablei osoase cu freza şi dalta după următoarea tehnică: cu freze rotunde noi, schimbate frecvent, se crează orificii de jur împrejurul spaţiului retromolar şi

pe versantul vestibular şi apoi cu dalta şi ciocanul prin lovituri uşoare se unesc aceste orificii şi se ridică capacul osos, descoperindu-se coroana dintelui.

Rezecţia cu instrumente de mînă. Osul este rezecat bucăţică cu bucăţică cu pensa ciupitoare de os sau cu instrumentarul special de mînă (osisectoare). Este o metodă bună, greu de aplicat însă, secţiunea osului compact, dur, fiind deosebit de dificilă.

Rezecţia osoasă trebuie să fie suficient de întinsă, descoperind larg coroana dentară şi uneori şi rădăcina pentru a da posibilitatea aplicării cu eficienţă a instrumentelor de extracţie şi pentru a putea degaja şi luxa dintele fără să fie nevoie de manopere excesive de forţă.

Luxarea şi extracţia dintelui. Coroana odată descoperită, extracţia propriu-zisă variază ca tehnică, după cum:

a. coroana este liberă;
b. molarul este înclinat şi coroana este proptită în molarul 2;
c. dintele este în poziţie orizontală.

Extracţia se face cu cleştele, dacă acesta se poate aplica şi se asigură o priză bună; cu elevatorul "limbă de crap", dacă rădăcinile sînt îndoite distal; cu elevatoarele cu cioc lateral, dacă rădăcinile sînt drepte.

a. Molarul înclinat cu coroana proptită în molarul de 12 ani. Se face degajarea dintelui prin rezecţia porţiunii meziale a coroanei cu pietre şi freze diamantate sau cu discuri de carborundum sau Herico utilizate cu prudenţă şi apoi se aplică cleştele sau elevatorul (Fig.9.6.).

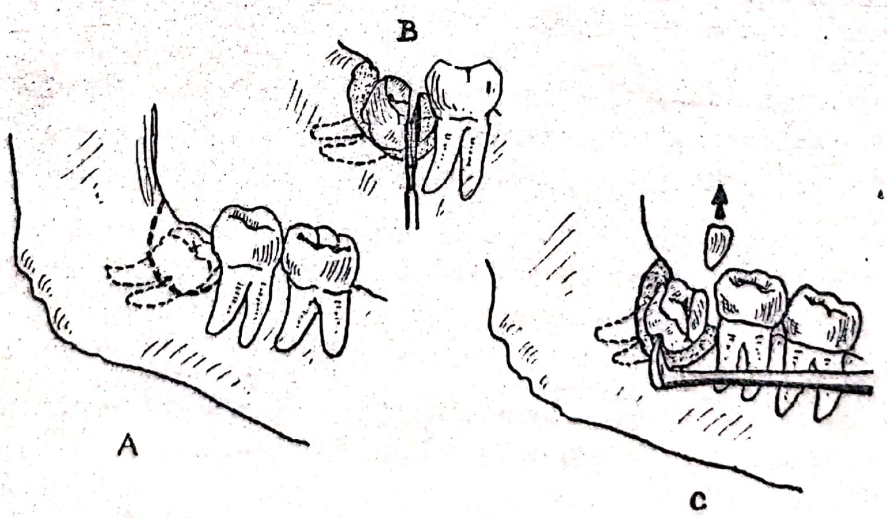


Fig.9.6. Odontectomia molarului de minte inferior inclus în poziţie oblică: A. Linia de rezecţie osoasă (punctat); B. Rezecţia cu freza a porţiunii mezio-ocluzale a coroanei dentare pentru degajarea de sub molarul 2; C. Indepărtarea fragmentului coronar şi luxaţia cu elevatorul.

b. Molarul orizontal. Se secţionează molarul la nivelul coletului şi se extrag separat cele două fragmente, coronar şi radicular. Pentru secţionare se procedează astfel: se face cu freza sau cu piatra un şanţ transversal

la coletul dintelui şi apoi cu o lovitură de daltă se despică, separînd cele două fragmente. Se face luxarea cu elevatorul, mai întîi a fragmentului coronar şi apoi a celui radicular. Uneori este necesar să se facă în prealabil o rezecţie a unei porţiuni intermediare din regiunea coletului (Fig.9.7.).

c. Molarul de minte cu înclinare oblică distală. Dintele se află în incluzie osoasă profundă avînd coroana îndreptată în sus şi înapoi în grosimea ramului mandibulei. Pentru descoperire, incizia retromolară trebuie prelungită de-a lungul marginii anterioare a ramului mandibulei. Prin trepanaţia osului se pune în evidenţă coroana dentară şi apoi mergîndu-se progresiv înapoi şi înafară se degajează treptat, din aproape în aproape, pînă cînd dintele poate fi luxat.

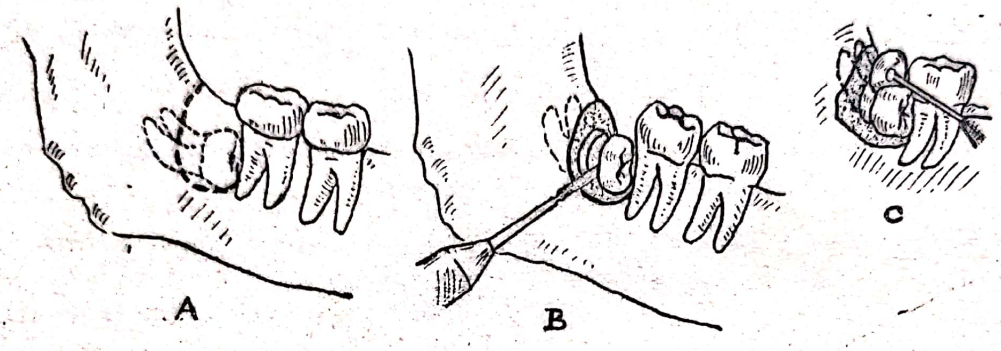


Fig.9.7. Odontectomia molarului de minte inferior în incluzie orizontală profundă; A. Linia de rezecţie osoasă (punctat); B. Secţionarea transversală cu freza cilindrică la nivelul coletului pentru extragerea separată a porţiunii coronare şi radiculare; C. Secţionarea cu piatra lenticulară.

Luxarea se face cu elevatorul cu cioc lateral (Fig.9.8). Dacă cu toată această degajare largă, luxarea nu este posibilă, se procedează la secţiunea transversală sau oblică a dintelui cu piatra sau cu freza diamantată.

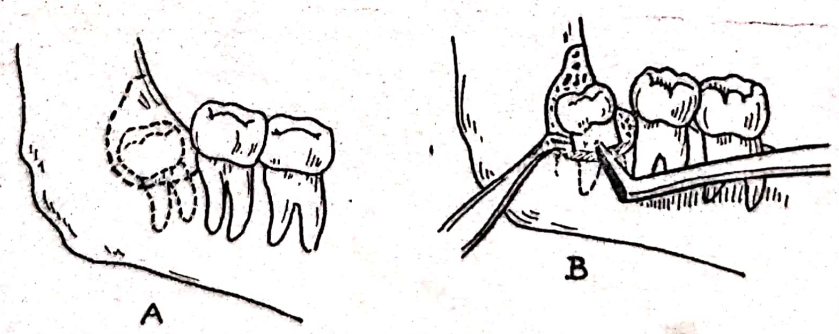


Fig.9.8. Odontectomia molarului de minte în incluzie oblică distală: A. Linia de rezecţie osoasă (punctat); B. După rezecţia osoasă extinsă, se face luxaţia cu elevatoarele.

Fragmentarea este indicată în special în cazul molarilor incluşi voluminoşi, deformaţi şi cu rădăcinile divergente, pentru a face posibilă extracţia prin breşa osoasă care nu poate fi lărgită atît de mult încît să permită trecerea dintelui întreg.

Extracţia de necesitate a molarului 2. Uneori odontectomia molarului de minte inclus nu este posibilă fără a se face şi extracţia molarului 2.

Indicaţia extracţiei de necesitate a molarului 2, este dată de profunzimea incluziei molarului de minte, poziţia sa vicioasă, reporturile molarului de minte cu molarul 2, astfel:

- cînd coroana molarului de minte se găseşte profund situată, în contact direct cu rădăcinile molarului 2;
- cînd septul osos interdentar este complet distrus şi alveola rădăcinii distale a molarului de 12 ani se continuă cu spaţiul pericoronar al molarului inclus;
- cînd coroana molarului de minte este situată sub rădăcinile molarului 2;
- cînd molarul 2 este înclinat distal, acoperind în mare parte molarul inclus, îngustînd foarte mult accesul spre molarul inclus;
- cînd pentru degajarea molarului de minte ar trebui sacrificată multă substanţă osoasă compromiţînd rezistenţa mandibulei şi predispunînd la fracturi.

In aceste cazuri se face mai întîi extracţia molarului 2 după care accesul asupra molarului de minte va putea fi realizat printr-un sacrificiu cît mai economic de os.

Terminarea intervenţiei şi tratamentul postoperator. După îndepărtarea dintelui se face un control foarte atent al plăgii postoperatorii îndepărtîndu-se eschilele osoase libere şi resturile din sacul pericoronar. Cu ajutorul pensei ciupitoare de os şi cu chiuretele se netezesc marginile neregulate ale plăgii osoase, după care, cu un jet de ser fiziologic sau apă oxigenată, se îndepărtează resturile mici de ţesuturi care ar putea să favorizeze apariţia complicaţiilor. Se reaplică pe patul osos lamboul mucoperiostic şi se face sutura cu fire separate nerezorbabile. Se urmăreşte o afrontare a marginilor inciziei şi acoperirea completă a osului.

Pentru a se menţine lamboul intim adaptat pe os şi pentru a favoriza astfel formarea unui cheag bun şi a evita hematoamele, se va aplica un tampon din meşă iodoformată peste mucoasă, recomandîndu-se bolnavului să rămînă cu dinţii strînşi pe tampon 2-3 ore, sau chiar pînă în a doua zi.

Contraindicăm lăsarea plăgii nesuturată, deschisă, de asemenea introducerea meşelor în aleveolă deoarece se întîrzie mult cicatrizarea, împiedicîndu-se organizarea unui cheag bun şi favorizîndu-se astfel infecţia.

Accidente intraoperatorii. In timpul manoperelor operatorii se pot întîmpla următoarele accidente:

a, Fractura rădăcinilor molarului de minte, atunci cînd aceste rădăcini sînt lungi, efilate şi recurbate. Se va preciza sediul, forma şi mărimea acestor rădăcini şi apoi se vor descoperi prin rezecarea osului cu pensa ciupitoare sau cu freza şi se vor luxa cu elevatorul subţire. Uneori, este nevoie să se facă o nouă radiografie de urgenţă, pentru a avea certitudinea extracţiei restului radicular.

b. Fractura sau luxaţia molarului de 12 ani. In luxaţiile incomplete, dintele va fi introdus în alveolă şi eventual imobilizat, supraveghindu-se vitalitatea sa.

In luxaţiile complete, se poate încerca replantarea după tratamentul endodontic dacă pereţii alveolari sînt integri.

c. Luxaţia mandibulei se produce prin exagerarea deschiderii gurii şi prin presiunea puternică exercitată pe mandibulă în timpul extracţiei. După terminarea extracţiei se face reducerea luxaţiei şi imobilizarea cu o frondă mentonieră.

d. Fractura mandibulei se produce cînd manoperele operatorii nu sînt dozate suficient şi este favorizată de incluziile profunde şi de faptul că în jurul molarului rezistenţa osului este scăzută din cauza unui proces de osteită rarefiantă. Folosirea elevatorului "limba de crap" cînd molarul de minte este vertical, poate duce la fractura mandibulei.

După extracţie şi după tratamentul plăgii postoperatorii se face imobilizarea mandibulei.

e. Deschiderea canalului mandibular cu hemoragie prin lezarea pachetului vascular şi anestezia buzei prin lezarea nervului alveolar inferior, se produce în incluziile profunde cînd rădăcina dintelui se poate găsi chiar în canal. Se face hemostază prin tamponament; leziunea nervoasă lasă de obicei hipoestezie sau anestezie pasageră.

f. Perforarea tablei osoase interne, linguale, este favorizată de incluziile în poziţie transversală a molarului de minte sau de rezorbţia osoasă dată de complicaţiile osteitice sau chistice precum şi de manoperele neadecvate.

Se va evita lărgirea breşei osoase şi perforarea cu instrumente a periostului, în acest fel vor fi evitate leziunile vaselor, nervului lingual şi însămînţarea lojilor plaţeului bucal.

g. Impingerea dintelui în spaţiul pterigo-mandibular sau înafară, spre obraz. Se va lărgi incizia pentru a permite reperajul dintelui şi prinderea sa cu o pensă. Plaga va fi suturată.

Evoluţie şi îngrijiri postoperatorii. Postoperator, se recomandă bolnavilor prişniţe, spălături bucale antiseptice, alimentaţie adecvată; în primele 24 de ore lichide, după care masticaţia va fi reluată treptat. Durerile vor fi combătute prin analgeticele obişnuite (piramidon, aspirină). In zilele următoare se produce de obicei un edem în părţile moi, care cedează în cîteva zile. Rareori apar echimoze care se pot exterioriza la piele în jurul gonionului. De asemenea, se instalează un trismus destul de accentuat în primele zile, cu jenă dureroasă în mişcările de deschidere a gurii şi în deglutiţie.

Prevenirea complicaţiilor septice se face administrîndu-se timp de 4-6 zile antibiotice (penicilină, metronidazol).

Siguranţa unei intervenţii aseptice şi a unei evoluţii postoperatorii bune ne poate face să renunţăm la administrarea antibioticelor.

Complicaţii postoperatorii

a. Dureri postoperatorii. Durerile pot fi localizate sau iradiate, apărînd imediat după operaţie, sau mai tîrziu, după 3-4 zile. Aceste dureri sînt provocate de infecţia plăgii osoase, de procese de nevrită, sau sînt de origină simpatică. In infecţii se va asigura drenajul asociat cu tratamentul antalgic şi antiinfecţios, local şi general.

b. Persistenţa trismusului va fi tratată prin mecanoterapie, asociată cu agenţi fizici (raze U.S.) şi eventual novocainizări locale.

c. Osteita alveolară şi osteomielita necrotică cu dureri vii şi eliminarea de sechestre poate surveni prin infecţia osului după operaţie. Se extrag sechestrele libere, se drenează supuraţia şi se aplică tratamentul local şi general obişnuit.

Odontectomia molarilor de minte incluşi ectopic

Inainte de extracţie este necesar ca printr-un examen clinic şi radiologic să se precizeze sediul molarului inclus, poziţia şi raporturile sale. Radiografiile vor fi făcute în cel puţin două incidenţe. Date preţioase ne dă ortopantomografia iar pentru localizările profunde tomografia.

Intervenţia se poate face pe cale endobucală sau exobucală în raport cu sediul dintelui inclus.

In incluzia profundă, aproape de marginea inferioară a mandibulei, este folosită calea externă, subangulo-mandibulară (Dan Theodorescu).

Cînd molarul de minte inferior este inclus în procesul condilian al mandibulei, se foloseşte calea de acces exobucală pretragiană, identică cu cea folosită pentru intervenţiile asupra articulaţiei temporo-mandibulare.

In cazul molarilor de minte incluşi în ramura ascendentă a mandibulei, odontectomia poate fi realizată pe calea endobucală, printr-o incizie verticală, de-a lungul şi înafara marginii anterioare a ramului mandibular.

Cînd molarul de minte inferior este inclus în ectopie în apofiza coronoidă, se practică incizia de-a lungul marginii anterioare a ramului ascendent, prelungită pînă la baza apofizei coronoide, bolnavul ţinînd gura larg deschisă.

Accidentele de erupţie ale molarilor de minte superiori.

Erupţia molarului de minte superior poate provoca accidente asemănătoare cu cele date de molarul de minte inferior, însă mult mai rare şi mai puţin dramatice.

Molarul de minte superior poate rămîne inclus sau poate erupe vicios şi provoca:

a. pericoronarită congestivă sau supurată;
b. ulceraţia mucoasei obrazului prin erupţia deviată în vestibul;
c. stomatită odontiazică;

d. supuraţii perimaxilare, de obicei ale groapei zigomatice, (spaţiul pterigo-maxilar) cu difuzarea în fosa temporală;

e. accidente nervoase: algii faciale;

f. sinuzită maxilară, catarală sau supurată - accident frecvent, atunci cînd sinusul maxilar prezintă un diverticul mare posterior;

g. osteita şi osteomielita crestei alveolare şi a tuberozităţii maxilarului.

Un molar de minte superior care produce accidente trebuie extras. Atitudinea terapeutică indicată este radicală - odontectomia, neexistînd posibilitatea păstrării dintelui printr-un tratament conservator.

Dintele inclus este situat de obicei înapoia molarului 2, cu suprafaţa ocluzală orientată vestibular sau palatinal, de asemenea el poate fi găsit în diverse poziţii (Fig.9.9):

- în poziţie oblică mezială, coroana orientată în jos şi înainte;
- în poziţie oblică distală, cu coroana orientată înapoi;
- în poziţie orizontală, cu coroana orientată mezial cu faţa ocluzală spre molarul de 12 ani, rădăcinile fiind complet distalizate în tuberozitate;
- în poziţie orizontală transversală cu coroana orientată vestibular, iar rădăcinile palatinal;
- în poziţie oblică deasupra molarului 2, coroana sa coafînd apexurile rădăcinilor acestui molar.

Mai rar, se întîlnesc incluzii în ectopie în pereţii sinusali, în porţiunea superioară a tuberozităţii maxilarului, în podeaua orbitei etc.

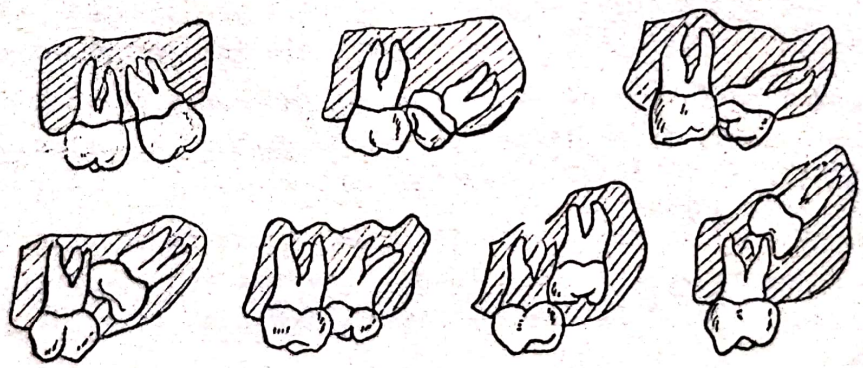


Fig.9.9. Diferitele poziţii ale molarului de minte superior.

Odontectomia molarului de minte superior inclus. In general odontectomia molarului de minte superior întîmpină mai puţine dificultăţi decît a celui inferior. In efectuarea tehnicii operatorii, trebuie să se ţină seamă de factorii care pot complica intervenţia: structura spongioasă a osului ce poate favoriza fractura tuberozităţii, vecinătatea imediată a sinusului maxilar, raporturile intime cu rădăcinile molarului 2, posibilitatea deformaţiilor mari ale rădăcinilor acestui dinte.

Tehnica operatorie (Fig.9.1o). Se face anestezie locoregională la tuberozitate, pe cale endobucală şi anestezia nervului palatin anterior la gaura palatină.

I n c i z i a vestibulară, curbă, cu concavitatea în jos la limita mucoasei mobile, pornind din dreptul molarului 2 pînă pe versantul posterior al tuberozităţii. Unii autori recomandă o incizie oblică de-a lungul axului mare al dintelui sau o incizie în "T" cu ramura verticală imediat înapoia molarului 2 şi ramura orizontală de-a lungul limitei mucoasei fixe. Se decolează lamboul mucoperiostic, descoperindu-se astfel osul înapoia molarului de 12 ani, pe faţa vestibulară şi pe marginea liberă a crestei alveolare şi a convexităţii tuberozităţii. Lamboul de mucoasă va fi menţinut cu un depărtător Langenbeck.

După decolarea părţilor moi, poate apare în plagă coroana dintelui descoperită parţial. In aceste cazuri se lărgeşte breşa osoasă cu ajutorul dălţii şi ciocanului sau pensei ciupitoare de os, se eliberează pînă la nivelul coletului şi se extrage.

In caz de incluzie completă osoasă, se procedează la trepanaţia tablei acoperitoare cu dalta şi ciocanul sau cu frezele.; rezecţia osoasă va începe înapoia şi puţin deasupra marginii distovestibulare a molarului 2, pînă cînd se cade pe coroana molarului inclus. Se lărgeşte breşa osoasă degajîndu-se dintele de-a lungul versantului vestibular.

Degajarea trebuie făcută cu multă grijă spre a nu se deschide sinusul maxilar şi spre a nu se fractura tuberozitatea maxilarului.

Luxarea şi extracţia dintelui se face cu ajutorul elevatoarelor şi a cleştelui. Uneori este nevoie să se fragmenteze molarul spre a putea fi luxat. Manevrarea elevatorului trebuie făcută cu prudenţă, fără mişcări de forţă, spre a nu împinge dintele sau un rest radicular în sinusul maxilar.

După controlul plăgii osoase şi înlăturarea tuturor elementelor patologice existente, se repune lamboul mucoperiostal pe planul osos şi se face sutura marginală cu cîteva fire, nerezorbabile. Se aplică apoi deasupra un tampon cu meşă iodoformată pentru ca lamboul să fie intim adaptat pe os, favorizîndu-se astfel organizarea cheagului şi cicatrizarea.

x

x x

Incluziile ectopice necesită intervenţii adaptate de la caz la caz. Se urmăreşte crearea unor căi de acces suficient de largi, care trebuie obţinute însă cu sacrificii cît mai reduse de substanţă osoasă:

- în incluziile în pereţii sinusului şi în podeaua orbitei, se foloseşte calea transsinusală;

- în incluziile deasupra molarului de 12 ani, se face extracţia de necesitate a acestui dinte, pentru a se uşura accesul asupra molarului de minte.

Scanned with OKEN Scanner

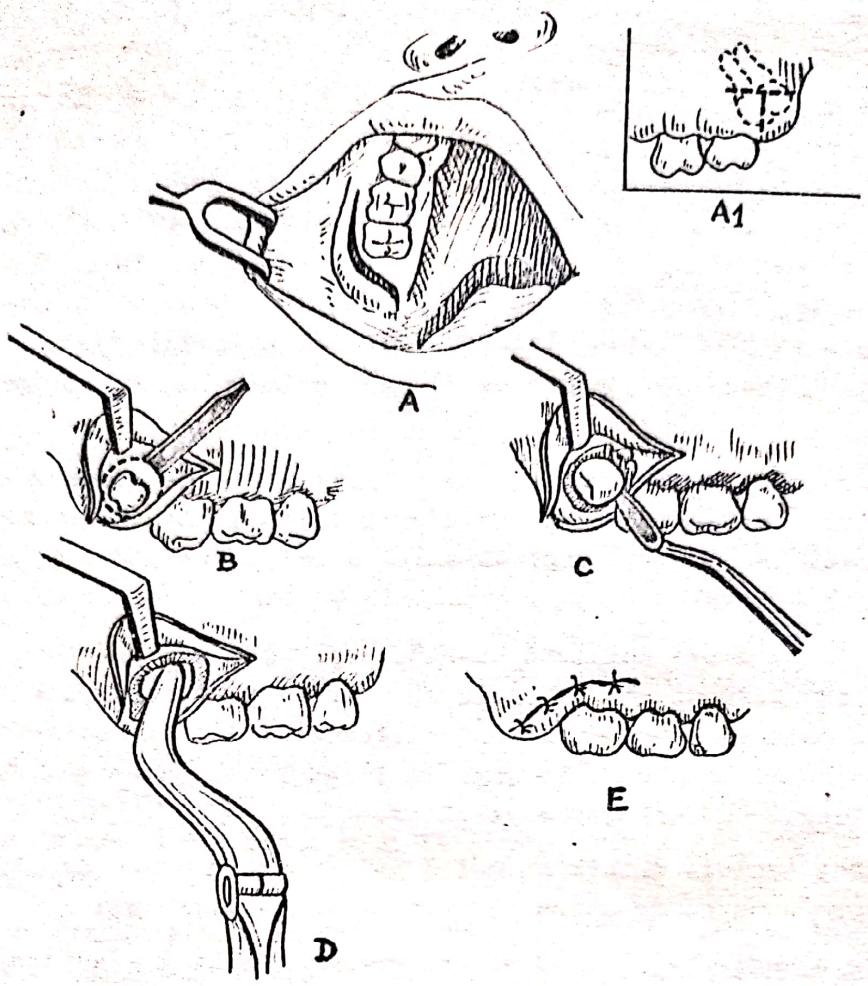


Fig.9.1o. Odontectomia molarului de minte superior inclus: A.Incizie curbă vestibulo-retrotuberozitară; A'. Incizia "în T"; B.Decolarea periosteomucoasei şi trepanarea tablei osoase; C. Luxaţia cu elevatorul; D. Extracţia cu cleştele; E. Sutura.

Extracţia molarului de 12 ani se impune uneori şi în celelalte forme de incluzie, pentru a se evita accidentele şi complicaţiile.

Cînd molarul de 12 ani prezintă leziuni de carie complicată sau fenomene de parodontită marginală profundă, cînd este dislocat şi cînd rădăcinile sale sînt în raporturi strînse cu spaţiul pericoronar al molarului de minte, se procedează în primul rînd la extracţia sa şi apoi se continuă, în condiţii mai uşoare, degajarea molarului de minte inclus.

Evoluţia postoperatorie. In primele zile după operaţie se pot produce edem sau echimoze ale obrazului şi pleoapei inferioare, care cedează prin revulsive locale. De asemenea, durerile postoperatorii sînt calmate prin analgeticele obişnuite şi cedează în cîteva zile.

Accidente operatorii

1. Fractura tuberozităţii maxilarului a cărui rezistenţă este slabă;
2. Deschiderea sinusului maxilar;

3. Impingerea molarului sau a unui fragment dentar în sinusul maxilar;

4. Impingerea molarului în fosa pterigo-maxilară (spaţiul retromaxilar);

5. Hematomul obrazului, accident destul de frecvent, se produce prin lezarea plexului venos pterigoidian.

Pentru tratamentul acestor accidente vezi "Accidentele şi complicaţiile extracţiei dentare".

INCLUZIA DENTARA

Un dinte se consideră inclus sau "reţinut" dacă rămîne, împreună cu sacul său coronar, închis intraosos sau submucos peste pericada sa normală de erupţie, avînd terminată evoluţia morfologică, cu formarea completă a rădăcinii.

Frecvenţa. Incluziile se întîlnesc destul de frecvent la dinţii temporari cît şi la cei permanenţi. Pot fi întîlnite incluzii şi la dinţii supranumerari.

Cel mai mare procentaj îl dau caninii superiori şi molarii de minte inferiori. Ordinea frecvenţei este următoarea: 1. molarii de minte inferiori; 2. caninii superiori; 3. molarii de minte superiori; 4. caninii inferiori; 5. premolarii superiori şi inferiori; 6. incisivii superiori şi inferiori şi cu totul excepţional molarii 1 şi 2 superiori şi inferiori.

Dintele inclus se poate găsi fie pe locul unde în mod normal se formează germenul său, fie la distanţă (incluzie ectopică).

In incluzie pot rămîne mai mulţi dinţi sau, în cazul cel mai frecvent, un singur dinte. Caninii superiori şi molarii de minte inferiori sînt frecvent incluşi bilateral.

Etiopatogenia. Concepţiile patogenice deosebesc cauzele locale şi cauzele generale ale incluziei.

Cauze locale:

1. cauze în legătură cu germenul dentar;
   - germen dentar situat profund în os;
   - germen dentar deformat sau situat transversal faţă de linia de erupţie;
2. cauze în legătură cu dintele însuşi:
   - malformaţii radiculare: rădăcini recurbate, rădăcini deformate cu odontoame satelite etc;
   - malformaţii coronare: exces de volum al coroanei care constituie astfel un obstacol în erupţie;
3. Cauze date de ţesuturile şi organele vecine:
   - persistenţa peste limita normală a dintelui temporar care împiedică erupţia dintelui permanent;

- prezenţa unor dinţi supranumerari pe locul de erupţie al dintelui normal (dinţi " previa").

- malpoziţii ale dinţilor vecini;

- prezenţa unor formaţiuni tumorale în calea dintelui: odontoame, adamantinoame, chisturi etc;

- lipsa de spaţiu datorită căderii precoce a dintelui temporar corespunzător, cu mezializarea şi distalizarea dinţilor vecini;

- tulburări în dezvoltarea maxilarelor (compresia maxilarelor, microgenia etc).

Aceste cauze constituie obstacole în calea de erupţie a dintelui şi suprimă spaţiul de erupţie.

Cauze generale:

- boli distrofiante (sifilis, rahitism, boli constituţionale)
- disostoza cleidocraniană;
- avitaminoze;
- boli endocrine (insuficienţa tiroidiană).

Există legături certe între incluzie şi reducerea filogenetică a sistemului dentar ca proces evolutiv, prin schimbările survenite în modul de viaţă, în special în modul de alimentaţie.

Deci, în etiopatogenia incluziei dentare sînt incriminate cauze multiple care duc pe de o parte la micşorarea spaţiului normal de erupţie (prin tulburări în dezvoltarea maxilarelor sau prin reducerea evolutivă a dimensiunilor acestora), iar pe de altă parte, constituie obstacole care se opun erupţiei normale a dintelui pe arcadă.

Dinţii incluşi pot rămîne perioade lungi de timp fără să provoace tulburări. Ei pot fi descoperiţi întîmplător cu ocazia unui examen radiografic pentru altă cauză. Alteori produc accidente şi complicaţii, care pot îmbrăca forme diverse, unele foarte asemănătoare celor date de tulburările erupţiei dentare:

- complicaţii septice, prin infectarea sacului folicular cu interesarea structurilor vecine;

- complicaţii tumorale (chisturi marginale, chisturi foliculare, adamantinoame, procese hiperplazice ale mucoasei la edentaţii purtători de proteză);

- tulburări nervoase (senzitive, motorii, senzoriale);

- tulburări trofice;

- dificultăţi în protezarea edentaţiilor (decubitusuri sau basculări ale protezelor);

- tulburări asupra dinţilor vecini (înghesuiri, rotaţii, dislocări, poziţii vicioase, mortificări, lize radiculare, tulburări de ocluzie etc);

- fracturi patologice la nivelul mandibulei, favorizate de scăderea rezistenţei osului prin procese de osteoliză inflamatorie, pe care le întreţine dintele însuşi.

Examenul local nu este întotdeauna concludent deoarece incluzia nu se trădează.prin semne obiective caracteristice. Lipsa de pe arcadă a unui dinte poate fi datorită şi agenezieî mugurelui său dentar.

Totuşi la un examen clinic atent, putem găsi unele simptome care ne fac să bănuim o incluzie şi anume:

- lipsa de pe arcadă a dintelui definitiv, după un interval mai mare de timp de la perioada sa normală de erupţie;
- prezenţa pe arcadă a dintelui temporar;
- tulburări ale dinţilor vecini (deplasări, torsiuni, deviaţii, mortificări);
- dureri cu caracter nevralgic fără cauză aparentă;
- deformaţii osoase;
- prezenţa de fistule cronice, rebele la tratamente;
- procese inflamatorii ale mucoasei (pericoronarite, stomatite).

Pentru precizarea diagnosticului este indispensabilă radiografia care ne furnizează totdeauna date în privinţa indicaţiilor terapeutice, a tehnicii operatorii şi a situaţiei dintelui inclus.

Pentru incluziile la nivelul normal de erupţie se vor indica radiografii dentare în incidenţele obişnuite. In incluziile profunde, ectopice şi în cazuri de trismus trebuie făcute radiografii cu filme mari exofaciale.

In incluziile care nu dau semne de exteriorizare vor fi făcute stereoradiografii şi tomografii, pentru a stabili sediul dintelui în grosimea osului, poziţia sa, în vederea alegerii căii de acces pentru intervenţia chirurgicală.

Atitudinea faţă de dinţii incluşi, va fi în raport cu tulburările pe care le-au provocat, cu profunzimea, poziţia şi dezvoltarea lor, cu vîrsta şi cu starea generală a bolnavului. In raport cu aceste date se va decide dacă este posibilă păstrarea dintelui printr-o metodă chirurgicală ortodontică sau dacă se impune înlăturarea lui prin extracţie.

In principiu, dinţii incluşi trebuie socotiţi elemente care pot provoca mai curînd sau mai tîrziu accidente şi complicaţii şi înlăturarea lor devine necesară.

Elementul care trebuie discutat este momentul extracţiei. In cazul incluziilor dentare, care nu au provocat tulburări şi care au fost descoperite incidental, se recomandă extracţia profilactică, intervenţia putîndu-se efectua "la rece" în condiţii optime, punînd astfel bolnavii la adăpost de complicaţiile care ar putea surveni, îndeosebi pe acei care nu pot fi ţinuţi sub observaţie şi care nu au posibilitatea de asistenţă atunci cînd apar complicaţiile. Se va atrage atenţia bolnavilor care nu acceptă extracţia, să se prezinte pentru intervenţie la ivirea celor mai mici tulburări, explicîndu-li-se posibilităţile eventualelor complicaţii.

Cînd dinţii incluşi au provocat complicaţii şi întreţin procese patologice evolutive, extracţia trebuie făcută cît mai urgent.

In procesele supurative acute se va amîna extracţia pînă la liniştirea fenomenelor, pentru ca actul operator să se poată efectua în condiţii cît mai bune.

Particularităţile clinice şi terapeutice ale incluziei molarilor de minte inferiori şi superiori, au fost studiate în capitolul anterior, împreună cu celelalte tulburări de erupţie ale acestor dinţi.

In continuare, vom descrie mai pe larg incluzia caninilor superiori şi succinat unele aspecte ale incluziei celorlalţi dinţi care se întîlnesc excepţional.

INCLUZIA CANINILOR SUPERIORI

Caninii superiori erup normal în perioada de vîrstă de la 10-13 ani, aşa încît dacă se observă lipsa lor pe arcadă după această dată, se poate bănui o incluzie. Incluzia caninilor superiori este mult mai frecventă decît a celor inferiori (cam de 15-20 ori mai freoventă). Este mai des întîlnită la femei din cauza dimensiunilor mai reduse ale maxilarelor.

Incluziile pot fi unilaterale sau bilaterale.

In ceea ce priveşte sediul în grosimea osului, caninul inclus se poate găsi pe locul de formare al germenului, în mijlocul procesului alveolar, spre faţa vestibulară a osului, sau de cele mai multe ori, spre bolta palatină unde bombează.

Dintele poate avea fie o direcţie orizontală, perpendiculară pe rădăcinile dinţilor vecini (premolari şi incisivi) sau pe procesul alveolar, fie o direcţie oblică de sus în jos şi dinapoi-înainte.

Adesea incluzia nu provoacă nici un fel de tulburare pacientului, acesta consultînd un specialist pentru faptul că dintele temporar nu s-a schimbat, sau pentru că, după căderea acestuia, nu a fost înlocuit de caninul permanent.

La examenul clinic se descoperă în primul caz persistenţa caninului temporar, care este recunoscut după caracterele sale (e mult mai mic, are coroana globuloasă, mai transparentă, este uşor albăstrui sau lăptos şi prezintă în jurul coletului un şanţ). In cazul al doilea, se observă absenţa de pe arcadă a caninului definitiv şi mezializarea dinţilor vecini (incisivul lateral şi premolarul 1, care sînt apropiaţi, lăsînd între ei un spaţiu foarte redus).

La palpare se poate percepe în vestibul sau în bolţa palatină o deformaţie dură, nedureroasă, acoperită de o mucoasă normală.

R a d i o g r a f i a - este indispensabilă atît pentru precizarea diagnosticului, demonstrînd prezenţa dintelui inclus, cît şi pentru datele referitoare la indicaţiile terapeutice şi calea de abordare chirurgicală.

Caninul inclus poate rămîne în această fază de linişte multă vreme. Mai curînd sau mai tîrziu poate produce tulburări. Aceste tulburări sînt date le următoarele complicaţii şi accidente:

1. Infecţia sacului coronar al dintelui inclus se poate face: printr-un traumatism care produce o soluţie de continuitate şi o comunicare a sacului coronar cu cavitatea bucală; de la o gangrenă complicată a dinţilor vecini, de la o pungă adîncă parodontală; de la un focar de osteomielită; printr-o atrofie mare a procesului alveolar la edentaţi, care poate duce la deschiderea sacului coronar; printr-un decubitus provocat de o protează mobilă; pe cale sanguină, în cursul bolilor infecţioase.

Urmările pericoronaritei sînt:

a. fistule vestibulare, palatinale sau cutanate care supurează continuu, cronic şi la explorarea cărora, cu un stilet subţire, putem percepe dintele inclus;

b. abcese perimaxilare;

c. osteita maxilarului;

d. rinite supurate şi sinuzite supurate, care se produc de obicei cînd caninii incluşi sînt în ectopie spre podeaua nazală sau spre sinus.

2. Accidente nervoase se manifestă prin:

a. nevralgii localizate sau iradiate, algii faciale, polinevralgii (trigemen, plex cervical, plex brahial etc);

b. tulburări motorii: trismus reflex, spasme faciale, paralizii faciale, paralizii ale nervilor oculomotori etc;

c. tulburări senzoriale, de obicei oculare, care pot merge pînă la cecitate pasageră;

d. tulburări trofice: herpes, peladă, stomatită.

3. Complicaţii tumorale:

a. chisturi foliculare (corono-dentare), se dezvoltă în legătură cu dintele, care rămîne astfel în centrul cavităţii chistice;

b. adamantinoame - tumori polichistice, dezvoltate din ţesuturi dentare embrionare.

4. Tulburări mecanice asupra dinţilor vecini:

a. deplasări şi deviaţii ale incisivului lateral şi primului premolar; aceşti dinţi pot fi deviaţi vestibular sau palatinal, rotaţi în jurul axului, înclinaţi mezial sau distal;

b. devitalizarea şi mortificarea pulpară retrogradă, fără carie şi rezorbţia radiculară (rizaliza) prin presiunea exercitată de caninul inclus.

De asemenea, lucrurile se pot petrece şi invers, dinţii vecini pot provoca la rîndul lor o presiune pe caninul inclus, producînd rezorbţii coronare, radiculare sau mortificarea pulpară a acestuia.

5. Tulburări fizionomice: caninul superior are un rol fizionomic important susţinînd relieful buzei superioare; dacă lipseşte acest dinte, buza rămîne uşor înfundată dînd un aspect plat figurii.

6. Tulburări la edentaţi: bascularea protezei mobile prin bombarea provocată de dintele inclus; decubitus provocat de presiunea protezei; fistule supurate sau tumori hiperplazice, care se pretează la confuzii cu tumorile maligne.

Diagnosticul clinic în cazurile care evoluează fără tulburări, se face prin constatarea absenţei de pe arcadă a caninului, pe care pacientul nu-şi aminteşte să-l fi extras, prin deplasările dinţilor vecini şi prin perceperea la palpare a unei bombări dure vestibulare sau palatinale. Radiografia precizează diagnosticul arătînd dacă este vorba de un canin inclus sau de o agenezie.

In cazurile complicate, tabloul clinic variind şi îmbrăcînd aspectul altor afecţiuni, examenul radiologic este singurul care ne pune pe cale diagnosticului. Se vor indica radiografii cu filme endobucale - în proiecţie oblică, palatinală şi în proiecţie verticală cu film muşcat ocluzal. In incluziile în mijlocul procesului alveolar - stereoradiografia şi tomografia ne dau elemente foarte importante în legătură cu profunzimea incluziei şi raporturile dintelui cu regiunile şi structurile vecine.

Radiografia arată: sediul în grosimea osului (spre vestibul, spre boltă sau călare pe rădăcinile celorlalţi dinţi);

- orientarea dintelui şi poziţia rădăcinii şi coroanei în raport cu vestibulul şi bolta palatină;
- direcţia dintelui: orizontal, vertical, oblic;
- forma coroanei şi forma rădăcinii (dreaptă, îndoită în baionetă);
- rapoartele cu dinţii învecinaţi, cu sinusul maxilar şi cu fosele nazale;
- prezenţa de formaţiuni sau de leziuni asociate: chisturi foliculare, focare de osteită, formaţiuni tumorale.

T r a t a m e n t. Tratamentul indicat în incluzia caninilor superiori incluşi este intervenţia chirurgicală radicală sau conservatoare în raport cu forma, poziţia şi profunzimea în os a dintelui inclus, existenţa pe arcadă a spaţiului, vîrsta pacientului, starea osului, complicaţiile pe care incluzia le-a provocat.

Metodele de tratament folosite în practică sînt:

1. Redresarea chirurgical-ortodontică;
2. Odontectomia;
3. Transplantarea.

1. Redresarea chirurgical-ortodontică

Metoda constă în descoperirea chirurgicală a coroanei dintelui inclus pe care se ancorează un dispozitiv ortodontic (inel ortodontic fixat prin cimentare, croşet metalic transcoronar, ligatură de sîrmă făcută în buclă între ecuatorul şi coletul dintelui), cu ajutorul căruia dintele este redresat în axul său normal şi tracţionat lent şi progresiv pînă cînd este adus la locul său pe arcadă (Fig.9.11).

Este indicată la copii şi tineri şi se poate aplica în următoarele condiţii:

- caninul inclus trebuie să se găsească în dreptul spaţiului său normal de erupţie, în poziţie verticală sau uşor oblică;
- incluzia să nu fie prea profundă, iar stratul osos care acoperă coroana să fie subţire;
- rădăcina să nu aibă curburi;
- să existe un spaţiu suficient pe arcadă.

Dacă spaţiul de redresare de pe arcadă este mai redus decît dimensiunea coroanei caninului, este necesar ca preoperator să se aplice un aparat ortodontic de dilatare a arcadei şi îndepărtare a dinţilor.

2. Odontectomia

Această metodă radicală este indicată în toate cazurile în care dintele inclus nu poate fi recuperat printr-un tratament asociat chirurgical-ortodontic sau cînd condiţiile locale nu sînt corespunzătoare transplantării şi anume: în incluzii profunde, în incluziile orizontale sau oblice, cînd porţiunea coronară a dintelui este situată deasupra rădăcinilor incisivilor, la bolnavii în vîrstă, precum şi cînd incluzia este însoţită de complicaţii septice locale, complicaţii tumorale, tulburări nervoase, tulburări mecanice etc.

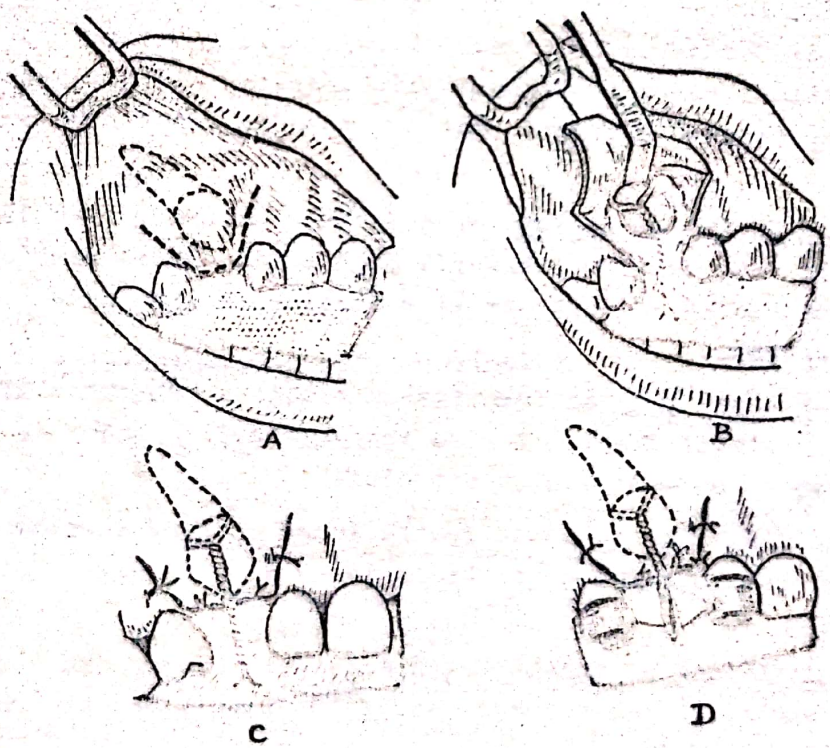


Fig.9.11. Redresarea chirurgical-ortodontică a caninilor superiori incluşi: A. Incizia; B.Descoperirea coroanei şi aplicarea ligaturii de sîrmă la colet; C.Sutura; D.Tracţiunea elastică pe dispozitivul ortodontic.

In raport cu situaţia dinţilor în grosimea osului, odontectomia caninilor incluşi se face pe cale vestibulară, palatinală, sau mixtă vestibulo-palatinală. Intervenţia este laborioasă şi trebuie efectuată cu respectarea riguroasă a regulilor de asepsie şi antisepsie, după o bună pregătire preoperatorie a bolnavului.

Bolnavul va fi aşezat într-o poziţie adaptată în raport cu calea de abordare şi anume: - cînd se intervine pe cale vestibulară, bolnavul stă pe fotoliu cu spătarul uşor înclinat, iar capul bine fixat în tetieră;

- cînd se intervine pe cale palatinală se dă spătarului şi tetierei o înclinare mai mare, capul bolnavului venind în extensie accentuată; cîmpul operator trebuie să fie bine iluminat.

A n e s t e z i e tronculară periferică la gaura infraorbitară, gaura incisivă, gaura palatină mare, şi după caz, la tuberozitate.

T e h n i c a:

Odontectomia pe cale vestibulară (Fig.9.12). Este indicată cînd caninul inclus se găseşte mai aproape de tabla vestibulară, unde uneori bombează deformînd corticala.

Se îndepărtează buza superioară cu depărtătorul cu fereastră.

I n c i z i e curbă cu concavitatea inferioară, în mucoasa mobilă, de la nivelul incisivului central pînă la premolarul 2. Se decolează periosteo-mucoasa descoperindu-se osul la nivelul fosei canine. Lamboul inferior este răsturnat şi menţinut cu un fir trecut prin grosimea sa, prins într-o pensă Péan, marginea superioară a plăgii este trasă cu un depărtător cu cioc (Langenbeck).

Trepanarea tablei osoase: cu dalta sau cu freza rotundă se creiază o fereastră, care este lărgită progresiv pînă se descoperă complet coroana dintelui, căutîndu-se să se degajeze bine marginea sa incizală precum şi o porţiune din rădăcină.

E x t r a c ţ i a se face fie cu cleştele "în baionetă", fie cu elevatoarele (elevatorul drept, cu cioc lateral) prin mişcări de tatonare armonizate în raport cu mobilizarea dintelui.

Cînd dintele are rădăcina foarte lungă şi cînd coroana nu poate fi bine degajată se face secţiunea transversală la nivelul coletului şi extracţia fragmentată.

După extracţie se îndepărtează eschilele osoase din plagă şi resturile sacului pericoronar, se netezesc marginile plăgii osoase şi se face sutura cu fire neresorbabile.

Odontectomia pe cale palatinală. Calea palatinală este folosită cînd în urma examenului clinic coroborat cu cel radiologic se precizează poziţia palatinală a dintelui.

Preoperator este bine să se confecţioneze o placă palatinală de protecţie din acrilat, care va menţine după extracţie fibromucoasa intim aplicată pe os.

Bolnavul va fi aşezat pe fotoliu, cu capul dat mult pe spate, în extensie accentuată, cu gura larg deschisă.

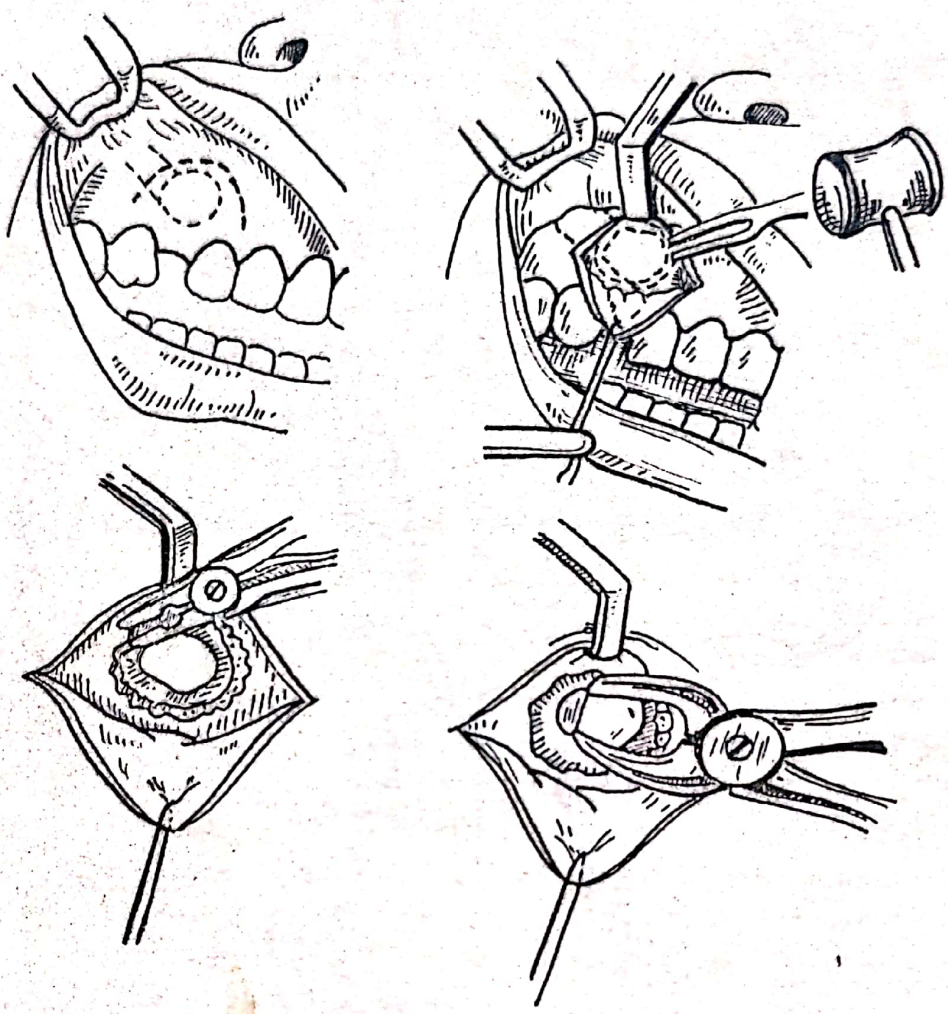


Fig.9.12. Odontectomia pe cale vestibulară a caninilor superiori incluşi: A. Incizia; B. Trepanarea tablei osoase cu dalta; C. Lărgirea breşei osoase cu pensa ciupitoare; D. Extracţia cu cleştele.

I n c i z i a. In incluziile unilaterale, se face o incizie curbă, de-a lungul dinţilor, la 1-2 mm de marginea gingivală, pornind din dreptul primului molar pînă la linia mediană (în dreptul spaţiului inter-incisiv); o altă incizie pe linia mediană a bolţii, ocolind papila incisivă (Fig.9.13).

In incluziile bilaterale: incizie curbă de-a lungul coletului dinţilor de la primul molar dintr-o parte, pînă la primul molar din partea opusă (Fig.9.14) de asemenea ocolind papila retroincisivă.

Decolarea fibromucoasei, se face cu multă atenţie, folosind un decolator potrivit pentru a nu sfîşia fibromucoasa. Lamboul de fibromucoasă este reclinat înapoi, descoperindu-se suprafaţa osoasă.

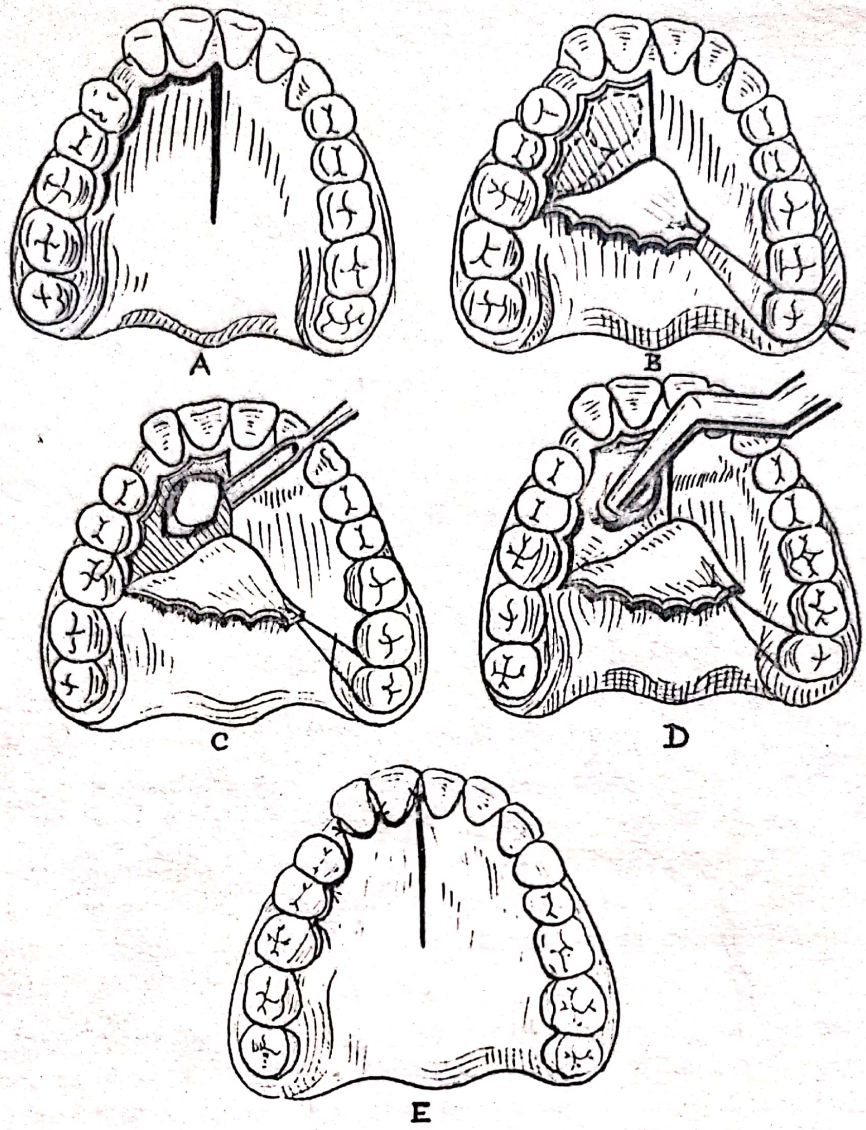


Fig.9.13. Odontectomia pe cale palatinală în incluzia unilaterală a caninilor: A.Incizia; B.Decolarea lamboului şi fixarea sa cu un fir la un dinte de pe hemiarcada opusă; C.Rezecţia osoasă şi descoperirea coroanei; D.Extracţia cu cleştele "în baionetă"; E.Sutura.

T r e p a n a r e a se face cu dalta, folosind manopere blînde, evitîndu-se izbirile puternice cu ciocanul. Osul va fi ridicat în aşchii mici, căutîndu-se să se degajeze complet marginea incizală şi apoi, treptat coroana. Se poate face îndepărtarea osului care acoperă caninul inclus şi cu freza, utilizînd turaţii reduse şi răcirea permanentă a osului cu ser fiziologic.

L u x a r e a se face de obicei cu un elevator drept, care este insinuat din aproape în aproape pe măsură ce dintele se mobilizează. Cleştele în baionetă poate fi folosit pentru extracţie, dacă se reuşeşte să se degajeze suficient dintele spre a asigura priza.

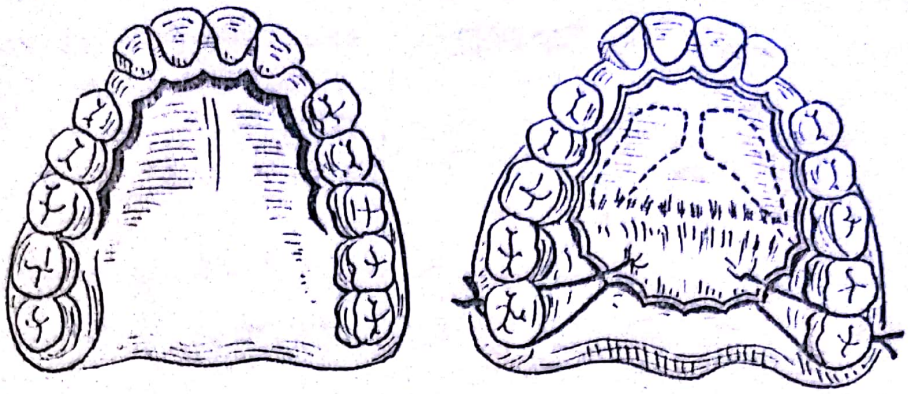


Fig.9.14. Incizia şi decolarea lamboului în odontectomia pe cale palatinală a caninilor incluşi bilateral.

In timpul trepanaţiei şi al luxării vom avea grijă să nu se mobilizeze sau să nu se lezeze rădăcinile premolarului sau incisivului lateral, sau central superior.

Dacă coroana caninului inclus are raporturi strînse cu rădăcinile dinţilor incisivi, pentru a se evita dislocarea acestor dinţi în timpul manoperelor de luxaţie, se va face secţiunea transversală a dintelui cu ajutorul unei freze cilindrice, la unirea coroanei cu rădăcina (odontotomia cervicală), cele două fragmente - coronar şi radicular - putînd fi luxate şi extrase mai uşor separat.

S u t u r a .Plaga este curăţată de toate eschilele osoase libere, se îndepărtează cu o chiuretă sacul folicular şi se netezesc marginile osoase ascuţite, neregulate. Lamboul de fibromucoasă se reaplică la locul său, suturîndu-se marginal prin cîteva fire.

Lamboul de fibromucoasă trebuie să fie menţinut aplicat intim pe planul osos: în acest scop se construieşte o plasă de sîrmă ancorată pe dinţi şi trecută transversal peste boltă, sub care se face un tamponament compresiv cu meşe iodoformate. Menţinerea lamboului se realizează mai bine cu ajutorul unei plăci palatinale construită preoperator, sub care se introduce meşa iodoformată(Fig.9.15).In acest fel va fi suprimat spaţiul mort şi evitată formarea hematomului.

Firele vor fi scoase a 6-a - a 7-a zi, cînd se va îndepărta şi tamponamentul compresiv, menţinîndu-se placa palatinală de protecţie.

Odontectomia pe cale mixtă. Calea mixtă este folosită în incluziile transversale, vestibulo-palatinale, cînd poziţia dintelui inclus şi raporturile sale cu dinţii vecini ar impune sacrificii prea mari de os aau ar expune la riscul lezării celorlalţi dinţi.

In primul timp se descoperă dintele pe cale vestibulară şi apoi se face trepanaţia palatinală.

Extracţia se realizează prin împingerea dintelui dinspre porţiunea radiculară, cu ajutorul unui elevator, fie prin plaga vestibulară, fie prin cea palatinală.

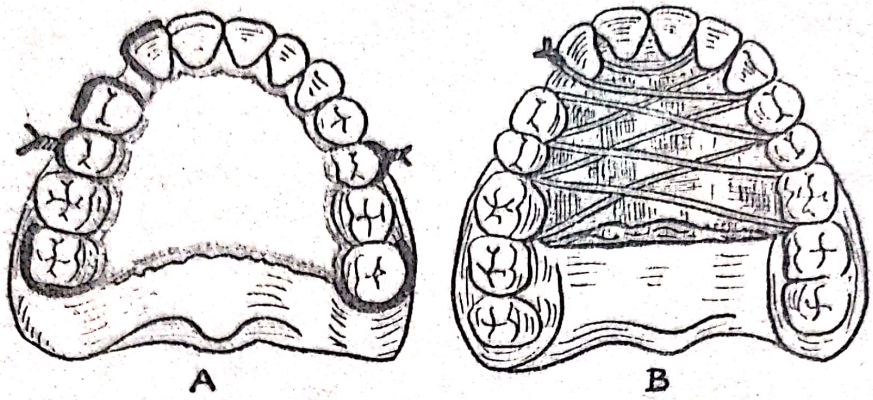


Fig.9.15. După odontectomia caninilor superiori, fibromucoasa este aplicată pe os printr-un tamponament menţinut cu: A.Placă palatinală cu croşete şi ligaturi de sîrmă; B.Plasă de sîrmă.

Accidente intraoperatorii

In timpul manoperelor operatorii, îndeosebi a trepanării osoase şi a luxării dintelui inclus, pot surveni o serie de accidente:

- luxaţia dinţilor vecini. In luxaţiile incomplete cu mobilitate mică, dintele va fi lăsat pe loc şi supravegheat în timp. La nevoie, se aplică ligaturi de sîrmă pentru imobilizare.

In mortificările pulpare se va face trepanaţia la punctul de electie al dintelui şi obturaţia corectă.

In luxaţiile complete, dacă alveola este păstrată, se trepanează dintele, se obturează şi se replantează; dacă alveola este zdrobită, replantarea nu mai este indicată;

- descoperirea sau fracturarea vîrfului rădăcinilor dinţilor vecini, cu lezarea pachetului lor vasculonervos: se va face trepanarea acestor dinţi, obturaţia lor corectă, îndepărtarea porţiunii apicale fracturate şi netezirea bontului radicular ca în rezecţia apicală;

- deschiderea accidentală a sinusului maxilar. Dacă avem certitudinea asepsiei operatorii, se suturează complet plaga (de obicei breşa sinusală se închide fără urmări). Dacă sinusul sau plaga operatorie sînt infectate se va proceda la drenajul sinonazal;

- fractura procesului alveolar. Fragmentul mic, complet detaşat se extrage. Dacă fragmentul osos este mai mare şi poate fi conservat se va imobiliza printr-o metodă adecvată;

- deschiderea fosei nazale. Este un accident excepţional care se poate produce în incluziile înalte, cînd dintele se găseşte în ectopie în planşeul nazal sau cînd coexistă cu un chist folicular sau un proces de osteită. Comunicările buco-nazale care rămîn în urma acestui accident se închid

foarte greu şi necesită adesea intervenţii repetate.

Pentru a evita accidentul, se va avea grijă permanentă de menajarea planşeului nazal în timpul intervenţiei. După terminarea intervenţiei, lamboul periosto-mucos vestibular va fi înfundat peste breşă şi menţinut strîns aplicat timp de 4-6 zile cu ajutorul unei meşe iodoformate.

Evoluţia postoperatorie este cea obişnuită după intervenţiile chirurgicale pe procesele alveolare.

Pentru combaterea edemului local se recomandă prigniţe, spălături antiseptice bucale. Alimentaţia cu produse moi şi lichide.

In caz de deschidere accidentală a sinusului maxilar se vor face bolnavului instilaţii nazale cu soluţii slab antiseptice şi i se va recomanda să nu sufle nasul.

Antibioticele vor fi indicate în cazul suspiciunii unui proces septic. Suturile şi tamponamentul palatin vor fi îndepărtate după 7-8 zile.

3. Transplantarea caninilor inclusi. Această metodă trebuie folosită cu mult discernămînt de la caz la caz în raport cu condiţiile pe care le oferă procesul alveolar şi ocluzia. Ea constă din odontectomia caninului inclus şi introducerea lui imediată într-o alveolă nou creată.

Pentru ca intervenţia să reuşească este necesar ca extracţia chirurgicală a dintelui să nu fie traumatizantă, să poate fi făcută fără sacrificii mari de os, procesul alveolar să fie bine conformat şi suficient de gros ca să permită săparea unei neoalveole cu pereţi rezistenţi atît vestibular cît şi palatinal, iar ocluzia să nu fie adîncă.

T e h n i c a. După extracţia caninului pe una dintre căile amintite, se procedează la trepanarea lui şi depulparea cu obturaţia canalului radicular, cu sau fără rezecţie apicală.

Se face apoi o incizie pe creasta alveolară, între incisivul lateral şi primul premolar; cu freza cu turaţie lentă, cu dăltiţe mici sau cu burghiul de os se sapă în os cavitatea care să corespundă cu diametrul şi lungimea rădăcinii dintelui respectiv.

Se introduce apoi dintele pregătit, cît mai forţat, în noua alveolă creată, pentru a se adapta intim pereţilor cavităţii.

Dacă coroana dintelui nu are loc suficient, se poate reduce prin şlefuirea feţelor sale aproximale.

Dintele transplantat poate avea o bună fixitate imediat după intervenţie. El trebuie să fie pus în condiţii de repaus, ferit de solicitări funcţionale sau traumatisme; în acest scop va fi scos din articulare şi se va aplica un aparat de contenţie (inele ortodontice fixate pe dinţii vecini sau gutiere acrilice).

INCLUZIA CANINILOR SI PREMOLARILOR INFERIORI

Incluzia acestor dinţi este foarte rară şi provoacă de obicei nevralgii rebele, explicabile prin raporturile strînse cu canalul mandibular şi gaura mentonieră. De asemenea pot da cortegiul de complicaţii comune incluziilor dentare.

Tratamentul este numai chirurgical radical: odontectomia.

T e h n i c a odontectomiei diferă în raport cu profunzimea incluziei:

- Cînd coroana se găseşte mai aproape de creasta alveolară, descoperirea se face printr-o incizie curbă pe versantul vestibular.

- In incluziile joase, spre marginea bazilară a osului, se face incizia curbă în fundul vestibulului; în timpul decolării şi trepanaţiei osoase se va evita lezarea filetelor nervoase şi vaselor mentoniere precum şi a canalului mandibular. Trepanaţia este îngreunată din cauza grosimii tablei externe. Se va crea o fereastră osoasă în dreptul coroanei dintelui inclus care va fi lărgită atît cît este necesar pentru aplicarea instrumentelor de luxare. Luxaţia şi enuclearea se face cu elevatoarele insinuate mezio- şi distolingual, sub dintele inclus, prin mişcări de basculare.

Postoperator, pot rămîne tulburări de sensibilitate în domeniul buchetului mentonier, care dispar complet în cîteva luni.

INCLUZIA DINTILOR SUPRANUMERARI

Dinţii supranumerari se găsesc destul de frecvent în incluzii şi nu rareori se văd incluzii multiple. Ei pot provoca tulburări nevralgice, complicaţii chistice sau infecţioase şi tulburări ale dentaţiei normale şi de aceea se impune extracţia lor chirurgicală (odontectomia).

T e h n i c a. Intervenţia se face după tehnicile descrise pentru extracţia celorlalţi dinţi incluşi, calea de acces fiind fixată în raport cu localizarea şi avîndu-se grijă ca traumatismul operator să nu producă leziuni asupra dinţilor permanenţi vecini.

Cînd dinţii supranumerari incluşi sînt situaţi între rădăcinile molarilor se impune şi extracţia de necesitate a dinţilor definitivi respectivi.

In incluziile multiple, odontectomia se va face în aceeaşi şedinţă în cazurile în care dinţii incluşi sînt vecini sau foarte apropiaţi; în incluziile multiple la distanţă, extracţia se va practica în şedinţe separate.

In prealabil se face o radiografie pentru a se preciza profunzimea şi raporturile acestor dinţi cu structurile învecinate.

TABLA DE MATERII

pag.

PREFATA 3
I. EXAMENUL CLINIC BUCOMAXILOFACIAL 5
II. ANESTEZIA IN STOMATOLOGIE 18
- Anestezia generală 18
- Anestezia locală şi regională 34
- substanţe anestezice 36
- anestezia prin refrigeraţie 48
- anestezia de contact 49
- anestezia prin infiltraţie 5o
. anestezia plexală 51
- anestezia nervului trigemen 54
- anesteziile tronculare bazale 62
- anesteziile tronculare periferice 67
- anestezia ganglionară 82
- accidentele şi complicaţiile anesteziei loco-regionale prin injecţie 84
. locale 84
- generale 88
III. EXTRACTIA DENTARA 97
- Indicaţiile extracţiei dinţilor temporari 98
- Indicaţiile extracţiei dinţilor permanenţi 99
- Factori care contraindică sau temporizează extracţia dentară.. 1oo
- Pregătirile preextracţionale 1o5
- Instrumentarul 1o8
- Extracţia cu cleştii 118
- Extracţia rădăcinilor dentare 133
- cu cleştele de rădăcini 133
- cu elevatoarele 134
- separaţia rădăcinilor 136
- Alveolotomia 137
- Extracţia dinţilor temporari 14o
- Vindecarea plăgii postextracţionale 142
- Tratamentul postextracţional 144
- Extracţia alveoloplastică 146
- Accidentele extracţiei dentare 149
- accidente dentare 15o

Scanned with OKEN Scanner

- leziuni ale părţilor moi perimaxilare 151
- leziuni osoase 152
- accidente sinusale 154
- aspirarea de corpi străini 156
- Complicaţiile extracţiei dentare 157
- alveolita postextracţională 157
- hemoragia postextracţională 161
IV. METODE CHIRURGICALE AJUTATOARE TRATAMENTULUI ENDODONTIC CONSERVATIV 167
- Osteotomia transmaxilară 167
- Chiuretajul periapical 168
- Rezecţia apicală 170
- Amputaţia radiculară 178
V. REPLANTAREA, TRANSPLANTAREA SI IMPLANTAREA DENTARA 182
VI. TRATAMENTUL CHIRURGICAL AL PARODONTOPATIILOR MARGINALE PROGRESIVE. 187
- Chiuretajul subgingival 191
- Gingivectomia 197
- Operaţia cu lambou 196
- Gingivoplastia 201
VII. METODELE CHIRURGICALE AJUTATOARE TRATAMENTULUI PROTETIC 206
- Operaţii de modelare plastică a părţilor moi 210
- Operaţii de modelare plastică a osului 220
- Reconstituirea plastică a reliefului crestei alveolare 222
VIII. IMPLANTE ALOPLASTICE 227
IX. PATOLOGIA ERUPTIEI DENTARE 236

Scanned with OKEN Scanner

Regim de slăbire

Luni - d - 1 ceai
- 1 măr

p - 1 ou, salată asortată
- 1 felie pâine prăjită

S - 1 ou, roșii, ceai

Marți - d - 1 ceai
- 1 măr

p - carne
- castraveți, măsline, ceai

S - ou, mere, ceai

Miercuri - d - cafea, mere

p - carne, castraveți, ceai

S - ouă, roșii, ceai

Joi - d - ceai, măr

p - ouă, brânză vaci, spanac

S - ouă, spanac, ceai

Vineri - d - cafea, măr

- p - pește, salată
- 1 felie pâine prăjită

S – 1 ou, spanac, cafea

Sîmbătă – d – ceai, măr

– p – gratar roșii

– s – ceai

Duminică – d – ceai, măr

– p – pui, roșii, salată

– s – " " , ceai

Poftă bună!

[signature]

← după 14 zile